

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXIII

1926

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1926

ATTI

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEL LINGUO

ITALIANA

1880

RELAZIONE

RENDICONTI

Classi di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ROMA 1880



ROMA

Stampato in Roma

presso la tipografia di ...

1880

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1926.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Meccanica. — *Sui moti einsteiniani in seconda approssimazione.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾.

Nel preparare, per la traduzione inglese delle *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (in collaborazione col prof. Enrico Persico), due capitoli addizionali di applicazione alla teoria della relatività, mi venne fatto di rilevare un'equivalenza meccanica di seconda approssimazione, che è altrettanto generale quanto comoda per la trattazione spedita di alcuni problemi concreti.

Non mi consta che il risultato sia noto, e mi permetto perciò di comunicarlo all'Accademia, rimandando per la dimostrazione al libro suaccennato, presentemente in corso di stampa presso l'editore Blackie di Glasgow.

1. Poniamoci per un momento dal punto di vista della meccanica classica. Sia P un punto materiale (di massa 1) mobile nello spazio ordinario. Designi x, y, z coordinate cartesiane; dl_0 l'arco elementare descritto da P nel tempuscolo dt ; $U(x, y, z)$ il potenziale (unitario) del campo di forza newtoniano entro cui avviene il moto. Questa funzione U dovrà in conformità ritenersi armonica.

Detta ancora E l'energia totale spettante a P in dipendenza dalle circostanze iniziali del moto, varrà l'integrale delle forze vive

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dl_0}{dt} \right)^2 - U = E.$$

(1) Presentata nella seduta del 20 giugno 1926.

2. Ciò premesso, passiamo a considerare (le condizioni fisiche rimanendo inalterate) lo stesso problema di moto secondo la relatività generale dell'Einstein.

Mentre, in prima approssimazione, si ricade notoriamente nelle equazioni newtoniane, in seconda approssimazione si è in definitiva condotti all'enunciato seguente:

Le traiettorie del moto einsteiniano coincidono con quelle di un moto newtoniano (nell'ordinario spazio euclideo) pel quale, l'energia totale essendo ancora E , la forza deriva dal potenziale

$$(2) \quad U_1 = \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) U + \frac{3U^2}{c^2},$$

dove c rappresenta al solito la velocità della luce (nel vuoto e in assenza di cause perturbatrici).

Detto t_1 il tempo in questo problema newtoniano ausiliario, si ha corrispondentemente l'integrale delle forze vive

$$(3) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dl_0}{dt_1} \right)^2 - U_1 = E.$$

Fra t_1 e la variabile t che funge da tempo nel moto einsteiniano passa la relazione

$$(4) \quad dt = \frac{dt_1}{1 + \frac{4U}{c^2}}.$$

3. Nel caso particolare in cui il campo di forza sia dovuto ad un'unica massa m_0 situata nell'origine O delle coordinate, si ha

$$U = \frac{fm_0}{r},$$

essendo f la costante di attrazione universale e $r = \overline{OP}$.

La (2) mostra allora che, almeno nei riguardi delle traiettorie, tutto va come se, valendo la meccanica ordinaria, il punto P si trovasse soggetto oltrechè ad una attrazione newtoniana, di componente radiale

$$\left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) \frac{dU}{dr} = - \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) \frac{fm_0}{r^2},$$

anche ad una forza perturbatrice, pure attrattiva, in ragione inversa dei cubi della distanza, di componente radiale

$$\frac{3}{c^2} \frac{dU^2}{dr} = - \frac{3fm_0}{c^2 r^3}.$$

Tenendone conto, si ricava naturalmente, per le orbite (in prima approssimazione) ellittiche, uno spostamento del perielio nella precisa misura calcolata per la prima volta dall'Einstein, e ritrovata poi in più modi da vari autori⁽¹⁾, sia direttamente, sia profittando della soluzione rigorosa dello Schwarzschild.

Matematica. — *Sulla teoria delle superficie R e delle loro trasformazioni.* Nota del Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Proprietà proiettive delle superficie a curvatura metrica costante.* Nota del Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.* VI. *Solfati di cerio (ceroso) e potassio*⁽²⁾. Nota del Socio FERRUCCIO ZAMBONINI e della Dott. S. RESTAINO⁽³⁾.

Continuando le nostre ricerche⁽⁴⁾, comunichiamo, nella presente Nota, i risultati ai quali siamo pervenuti con lo studio della parte per noi interessante del sistema ternario $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{K}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$, come al solito per l'isoterma di 25°.

I solfati doppi di cerio ceroso e potassio sono stati oggetto di indagini più o meno estese da parte di numerosi sperimentatori, a cominciare da Berzelius. Le ricerche più importanti sono dovute a Hermann, a Czudnowicz, a Jolin, a Barre.

Hermann⁽⁵⁾ ha descritto tutti i composti da lui preparati come anidri, senza, peraltro, dire, in modo da non lasciare dubbî, se erano stati privati della eventuale acqua di cristallizzazione presente prima di sottometterli

(1) Per es. De Sitter, Droste, Eddington, Palatini.

(2) Presentata nella seduta del 3 giugno 1926.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.

(4) ZAMBONINI e CAROBBI, « Rend. R. Acc. Lincei », (5°), 1924, XXXIV, 2° sem., 301; ZAMBONINI e CAGLIOTI, ibidem, 308; ZAMBONINI e CAROBBI (6°), 1925, 1° sem. 278; ibidem, 2° sem., 300; ibidem, 374; ZAMBONINI e CAGLIOTI, ibidem, 158; ZAMBONINI e RESTAINO, 1926, 1° sem.

(5) « Journ. für prakt. Chemie », 1843, XXX, 186.

all'analisi, o se erano effettivamente anidri già quando si erano formati. A giudicare dal testo, sembrerebbe vera questa seconda ipotesi ⁽¹⁾, mentre i risultati ottenuti dagli altri sperimentatori rendono più verosimile l'altra, almeno per alcuni dei sali doppi, che sono stati preparati con acqua di cristallizzazione. Ad ogni modo Hermann ha dato le seguenti formule ai tre solfati doppi da lui analizzati: $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4$ ovvero 1 — 3; $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 2\text{K}_2\text{SO}_4$ o 1 — 2; $2\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4$ ossia 2 — 3.

Czudnowicz ⁽²⁾ ha, diciassette anni più tardi, ripreso e completato le ricerche di Hermann. Egli ha ottenuto il composto 1 — 3, già descritto da Hermann, ed un altro di formula $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ o 1 — 1 — 2: il primo si origina in presenza di un eccesso di K_2SO_4 , il secondo quando si mescola una soluzione contenente una parte di K_2SO_4 con una che ne contiene due o più di $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ e si riscalda a bagno-maria.

Jolin ⁽³⁾ ha ottenuto, come i suoi predecessori, il composto anidro 1 — 3, e, come diidrato, anche il sale doppio di Hermann 1 — 2.

Finalmente, una ricerca sistematica è dovuta al Barre ⁽⁴⁾, il quale, in base ad alcune determinazioni di solubilità a 16°, ha dedotto la formazione di tre sali doppi: $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$; $2\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$; $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5\text{K}_2\text{SO}_4$.

In definitiva, sono noti, finora, i seguenti solfati doppi di cerio ceroso e potassio:

$\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	o 1 — 1 — 2
$2\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$	o 2 — 3 — 8 (dato anidro da Hermann)
$\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 2\text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	o 1 — 2 — 2 (id. id.)
$\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4$	o 1 — 3
$\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5\text{K}_2\text{SO}_4$	o 1 — 5.

È notevole il fatto che i vari studiosi non sono giunti a risultati troppo concordanti. Così, per esempio, Hermann, Czudnowicz e Jolin hanno ottenuto principalmente il composto 1 — 3, che, viceversa, non si è formato nelle esperienze del Barre. Nuove ricerche apparivano assai opportune, tanto più che, oggi, è facile poter disporre di cerio puro, contrariamente a quanto avveniva ai tempi di Hermann, di Czudnowicz, di Jolin. Data la difficoltà di riconoscere con sicurezza la presenza o meno del lantanio (se si prescinde dallo spettro d'arco o di scintilla) nei miscugli di terre rare, non può certo escludersi la possibilità che il cerio adoperato dagli studiosi ora nominati abbia contenuto del lantanio.

(1) Infatti, HERMANN per il composto $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 2\text{K}_2\text{SO}_4$ scrive: «Hierbei setzt sich ein weisses Pulver ab, welches bestand aus...». E per l'altro composto $2\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4$: «Es entsteht auch hierbei ein weisser pulveriger Niederschlag, der bestand aus...».

(2) «Journ. prakt. Chem.», 1860, LXXX, 22.

(3) «Bull. Soc. Chim.», [2], XXI, 533.

(4) «Compt. rend.», 1910, CLI, 871.

Le nostre esperienze sono state eseguite adoperando cerio puro, e con i soliti metodi descritti nei precedenti lavori. I risultati ottenuti sono riuniti nella seguente tabella I:

TABELLA I

Numero dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	Ce ₂ (SO ₄) ₃	K ₂ SO ₄	H ₂ O	$\frac{K_2SO_4}{H_2O}$	Ce	SO ₄	H ₂ O	K	$\frac{Ce_2(SO_4)_3}{K_2SO_4}$	
1	0.00	9.80	90.20	0.108	15.00	53.70	—	31.26	0.44	1 — 5 + K ₂ SO ₄
2	0.00	9.66	90.34	0.107	17.42	53.24	—	29.34	0.53	
3	0.00	9.22	90.78	0.101	19.60	52.99	—	27.41	0.67	
4	0.00	7.72	92.28	0.083	19.89	52.94	—	27.17	0.68	1 — 5
5	0.00	6.22	93.78	0.066	19.98	52.99	—	27.09	0.68	
6	0.00	5.56	94.44	0.059	20.00	52.90	—	27.10	0.69	
7	0.00	4.65	95.35	0.048	20.62	53.00	—	26.38	0.72	1 — 4 1/2
8	0.00	2.87	97.13	0.029	20.40	52.73	0.57	26.30	0.71	
9	0.00	1.77	98.23	0.018	20.28	53.23	0.42	26.07	0.70	
10	0.05	1.43	98.52	0.014	20.72	53.45	0.52	25.31	0.72	1 — 4 1/2 + 2 — 3 — 8
11	0.13	1.17	98.70	0.012	22.85	51.33	1.68	24.14	0.92	
12	0.13	1.21	98.66	0.012	24.55	50.12	4.89	20.44	1.10	
13	0.12	1.26	98.62	0.012	26.54	50.38	4.69	18.39	1.28	2 — 3 — 8H ₂ O
14	0.13	1.22	98.65	0.012	28.27	48.91	6.61	16.21	1.59	
15	0.16	1.24	98.60	0.012	29.45	49.01	7.06	14.48	1.75	
16	0.15	1.13	98.72	0.012	30.21	47.79	7.92	14.08	2.02	2 — 3 — 8 + 1 — — 1 — 2
17	0.30	0.79	98.91	0.0079	31.00	47.73	8.20	13.07	2.19	
18	1.74	0.16	98.10	0.0016	35.29	49.43	4.48	10.80	2.99	
19	3.48	0.12	96.30	0.0012	35.88	49.36	4.99	9.77	3.21	1 — 1 — 2
20	4.88	0.07	95.05	0.0007	35.85	49.00	4.92	10.23	3.30	
21	6.66	0.04	93.30	0.0004	35.98	49.25	5.08	9.69	3.30	
22	7.95	0.02	92.03	0.0003	36.03	48.29	6.07	9.61	3.87	

Composizione teorica dei composti ottenuti.

	Ce	K	SO ₄	H ₂ O
Ce ₂ (SO ₄) ₃ · 5K ₂ SO ₄	19.48	27.15	53.37	—
Ce ₂ (SO ₄) ₃ · 4 1/2 K ₂ SO ₄	20.73	26.01	53.26	—
2Ce ₂ (SO ₄) ₃ · 3K ₂ SO ₄ · 8H ₂ O	31.09	13.00	47.92	7.99
Ce ₂ (SO ₄) ₃ · K ₂ SO ₄ · 2H ₂ O	36.01	10.04	49.33	4.62

Nella fig. 1 sono rappresentati, con lo stesso metodo già adoperato negli altri nostri lavori sull'argomento, i risultati della tabella I: sulle ordinate si trovano riportati i rapporti $\frac{\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{K}_2\text{SO}_4}$ determinati nei corpi di fondo, e sulle ascisse, invece, quelli $\frac{\text{K}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$ delle fasi liquide.

Dalla tabella I, come pure dalla fig. 1, appare chiaro che i composti formatisi, a 25°, nelle nostre condizioni sperimentali, sono i seguenti:

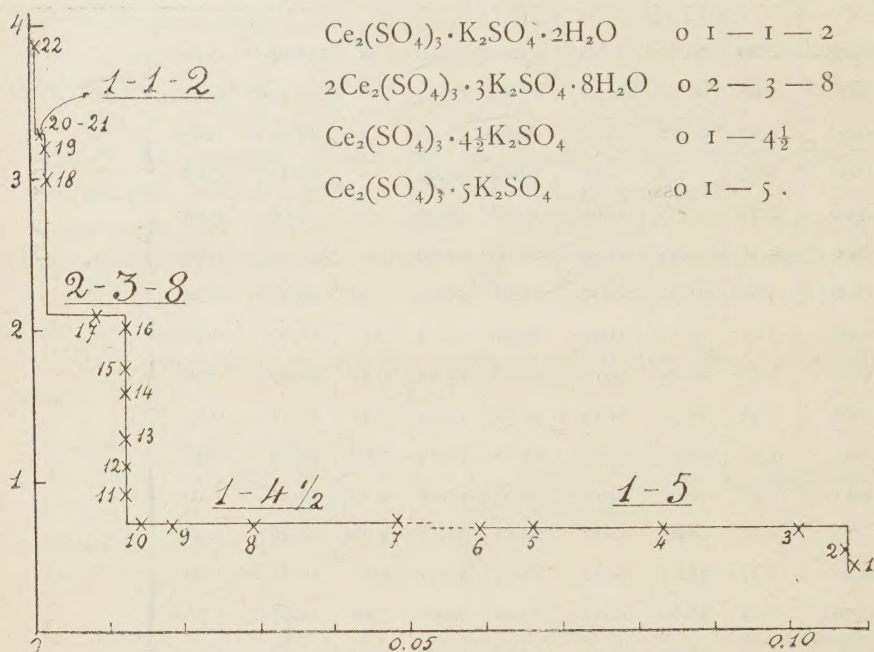


Fig. 1.

Di questi composti, il primo 1 — 1 — 2 era stato preparato già da Czudnowicz e, poi, più recentemente, dal Barre nelle sue ricerche sistematiche: lo stesso Barre aveva pure ottenuto i due sali 2 — 3 — 8 e 1 — 5. Nessuno, invece, aveva, finora, almeno per quanto ci è noto, fatto conoscere il composto $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 4\frac{1}{2}\text{K}_2\text{SO}_4$, e la cosa è tanto più notevole se si pensa che, nelle nostre condizioni sperimentali, è precisamente uno dei due composti che hanno il campo di esistenza di gran lunga più esteso. È verosimile che il Barre, nelle sue indagini, abbia confuso insieme i due composti 1 — 4 $\frac{1}{2}$ e 1 — 5, tanto più che, come risulta dai valori sopra riferiti, le differenze nella composizione chimica sono lievi.

Si è già accennato, che il Barre non ha osservato il composto 1 — 3, ottenuto da Hermann, da Czudnowicz, da Jolin. È interessante che non si

sia formato nemmeno nelle nostre esperienze, per quanto si sia posta particolare cura nel non farcelo sfuggire, qualora la sua formazione si fosse verificata. Ora, per il composto 1 — 3 si calcola la composizione seguente: SO_4 52.81, Ce 25.70, K 21.49, ed è facile vedere, esaminando la tabella I, che nessuno dei corpi di fondo corrispondenti alle esperienze dalla 9^a alla 15^a, comprese fra i campi di esistenza spettanti ai composti 2 — 3 — 8 e 1 — 4 $\frac{1}{2}$, ha una composizione prossima a quella richiesta dal sale doppio 1 — 3. La fig. 1 conferma pienamente, poi, l'assenza del composto 1 — 3 nelle nostre esperienze. Per spiegare i risultati diversi di Hermann, di Czudnowicz e di Jolin non resta che il ricorrere, come abbiamo già detto, all'ipotesi che il cerio adoperato da quegli studiosi contenesse anche La e Nd: noi, infatti, abbiamo ottenuto dei solfati doppi di questi elementi col potassio rispondenti, appunto, al tipo 1 — 3. Dalle nostre indagini risulta, ad ogni modo, stabilito con certezza che dalle soluzioni di solfato ceroso, in presenza di un eccesso notevole di solfato potassico (rispetto al rapporto 1 : 1), non si separa, almeno a 25°, il sale 1 — 3, ma, invece, l'altro 1 — 4 $\frac{1}{2}$ ovvero, magari, l'1 — 5.

Daremo, ora, alcuni cenni sui composti da noi ottenuti.

$\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ o 1 — 1 — 2. Si presenta sotto forma di una polvere cristallina, bianca, costituita da minuti cristallini, per lo più tabulari, allungati, con estinzione parallela alla direzione di allungamento, che è positiva. Dei cristalli contenenti in totale 4.99 % H_2O (teorico 4.62 %) hanno perduto a 130° 0.12 %, a 200° 3.51 (calc. per 1.5 H_2O 3.54 %). Questo sale doppio ha un campo di esistenza limitatissimo. Puro, è stabile in contatto con soluzioni che contengono da 4.9 a 6.7 % $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ e tracce di solfato potassico (da 0.07 a 0.04 %).

$2\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ o 2 — 3 — 8 è una polvere cristallina bianca, stabile, pura, in presenza di soluzioni contenenti da 0.15 a circa 1 % di $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ e da 1 % a 0.2 % di K_2SO_4 . Si è ottenuto anche in nitidi, ma molto piccoli cristalli, per evaporazione di una soluzione contenente i due solfati nelle proporzioni (molecolari) di 1 : 1. È perfettamente isomorfo col composto corrispondente di neodimio, da noi già descritto⁽¹⁾. E, precisamente, i cristallini più grandi corrispondono in tutto alla fig. 2 del lavoro ora ricordato: i più piccoli alla fig. 3 a. L'angolo piano trovato = 111° nel composto di neodimio è risultato di 110° in quello di lantanio. Dal pinacoide secondo il quale i cristalli sono tabulari emerge, in luce convergente, un asse ottico all'orlo del campo: il piano degli assi ottici è parallelo a (010). Si hanno, cioè, le stesse proprietà ottiche del composto di neodimio.

Quanto al sale doppio $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 4\frac{1}{2}\text{K}_2\text{SO}_4$, forma dei minutissimi cristallini birifrangenti senza nitidi contorni, stabili, se puri, in presenza di soluzioni contenenti da 5 % circa a 1.2 % K_2SO_4 .

(1) ZAMBONINI e CAGLIOTI, « Rend. R. Acc. Lincei », (5^a), 1924, XXXIV, 2° sem., 301.

Il composto $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5\text{K}_2\text{SO}_4$ si presenta in piccolissimi cristallini birifrangenti indeterminabili, stabili in contatto di soluzioni contenenti da 5 a 9 % circa di K_2SO_4 .

Ci è grato ringraziare il dott. Mario Tobia, per l'aiuto datoci nella esecuzione delle analisi.

Chimica-fisica. — *Sulla struttura cristallina di alcuni cloruri bivalenti* ⁽¹⁾. Nota del Socio G. BRUNI, e di A. FERRARI ⁽²⁾.

In un precedente lavoro ⁽³⁾ abbiamo studiato l'isomorfismo del cloruro di litio e del cloruro di magnesio anidri, applicando l'esame röntgenografico. Abbiamo mostrato come la formazione di cristalli misti in ogni proporzione, già nota dall'analisi termica, doveva attribuirsi al fatto singolare che le celle elementari delle due predette sostanze hanno identiche dimensioni, quando si riferiscono rispettivamente a quattro molecole di LiCl e a due molecole di MgCl_2 . Esse sono entrambe due cubi il cui spigolo è all'incirca di 5.10 \AA . Abbiamo pure detto come dall'esame ottico risulti che i due reticoli, pur presentando una eguale maglia cubica, abbiano però una diversa simmetria: monometrica il cloruro di litio; uniassica, tetragonale o esagonale (anche trigonale) quello di magnesio.

Per individuare la struttura di MgCl_2 abbiamo eseguito il calcolo delle intensità che presenterebbe il fotogramma di Debye di questa sostanza per alcune possibili strutture tetragonali, esagonali, o romboedriche, senza giungere per alcuna di esse a dei valori che si accordassero con quelli osservati; così da permettere di identificarla con quella del cloruro di magnesio.

Allo scopo di abbordare questo problema, c'è parso utile studiare la struttura di altri cloruri anidri bivalenti, scelti fra quelli di metalli che danno generalmente composti isomorfi a quelli di magnesio e che hanno maggiori analogie con esso.

Abbiamo così scelto: il cloruro manganoso MnCl_2 , perchè all'analisi termica dà con MgCl_2 cristalli misti in tutti i rapporti ⁽⁴⁾ ed inoltre i composti manganosi mostrano in genere reticoli vicinissimi a quelli di magnesio; il cloruro di cadmio CdCl_2 che dà pure cristalli misti in ogni rapporto con MgCl_2 , e quello di zinco ZnCl_2 per le analogie assai strette fra zinco e magnesio, quantunque fra i cloruri (come per i metalli) si abbia una strana anomalia per cui magnesio e cadmio danno soluzioni solide, mentre lo zinco non le forma con nessuno dei due ⁽⁵⁾.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 20 giugno 1926.

(3) Questi « Rendiconti », vol. II (6^a) 1925 (2^o sem.) 457.

(4) C. SANDONNINI, « Gazz. Chim. » 44 1914 (1^o sem.) 360.

(5) O. MENGE, « Zeit. f. an. Chem. », 72 (1911) 162; G. HERMANN, « Zeit. f. an. Chem. », 71 (1911) 257.

Del cloruro di magnesio abbiamo già dato l'ordinamento del fotogramma di Debye secondo un sistema di assi monometrici, nel nostro già citato lavoro.

Del cloruro manganoso non ci è stato possibile finora ottenere un fotogramma col metodo delle polveri, malgrado la sostanza fosse in modo indubbio cristallina. La difficoltà di ottenere fotogrammi dei composti di manganese era già stata riscontrata precedentemente; nel caso del cloruro non si ottenne un fotogramma calcolabile nemmeno con l'anticatodo di cromo, che è il migliore per questi composti ⁽¹⁾.

Anche per il cloruro di cadmio si incontra qualche difficoltà per avere dei fotogrammi di Debye, assai meno però che per quello di manganese: i fotogrammi finora ottenuti sono infatti deboli e il loro ordinamento può lasciare dei dubbi sulla sua esattezza.

Per il cloruro di zinco con anticatodo di rame abbiamo ottenuto un fotogramma col metodo delle polveri debole e povero di linee, che *sembra* potersi però calcolare e ordinare in una struttura esagonale avente il rapporto assiale $\frac{c}{a} = 2.36$, che corrisponde ad un romboedro con l'angolo $\alpha = 91^\circ 30'$ e quindi abbastanza vicino a quello del cloruro di magnesio che è di 90° . Nella tabella I è dato l'ordinamento di questo fotogramma nei due sistemi romboedrico ed esagonale.

TABELLA I.

(Cloruro di zinco - anticatodo di rame - diametro del preparato 1.5 mm)

Numero	θ	$\text{sen } \frac{\theta'(2)}{2}$	d	$\begin{matrix} h_1 h_2 h_3 \\ \text{nel} \\ \text{romboedrico} \end{matrix}$	a	$\begin{matrix} h_1 h_2 h_4 \\ \text{nel-} \\ \text{l'esagonale} \end{matrix}$	a_1	Intensità osservate
1	31.1	0.257	2.990	$\bar{1}11$	5.140	10 1	3.680	f
2	49.7	0.412	1.868	$\bar{2}20$	5.220	11.0	3.738	mf
3	51.2	0.424	1.815	220	5.200	10.4	3.732	f
4	59.0	0.485	1.586	$\bar{1}13$	5.255	11.3	3.757	mf
5	61.5	0.505	1.525	$\bar{2}22$	5.240	20.2	3.757	mf
6	72.0	0.582	1.322	400	5.288	20.4	3.790	m
7	81.5	0.649	1.186	240	5.260	12.2	3.762	m
8	91.7	0.714	1.075	$\bar{2}24$	5.250	12.4	3.755	m
9	94.5	0.731	1.052	224	5.265	10.8	3.770	md
10	98.7	0.756	1.018	$\bar{1}15$	5.282	12.5	3.780	d
11	102.5	0.778	0.990	333	5.277	00.9	3.777	d

(1) A. FERRARI. Questi « Rendiconti », vol. III (6^a) 1926 (1^o sem.) 224.

(2) Gli angoli θ sono corretti secondo la formola di PAULI:

$$\theta' = \theta - \frac{r}{2} (1 + \cos \theta)$$

dove θ è l'angolo letto, θ' quello corretto per lo spostamento derivante dal diametro del preparato il cui raggio è r .

La cella romboedrica è definita dalle seguenti costanti: $\alpha = 91^\circ 30'$
 $a = 5.27 \text{ \AA}$ per cui il volume della cella diviene

$$V = 5.27^3 \sin^2 91^\circ 30' \cdot \sin 88^\circ 25' = 146.10 \text{ \AA}^3$$

Ammettendo, come sembra probabile, che nella cella siano contenute due molecole di ZnCl_2 il peso specifico risulta:

$$d = \frac{2 \times 136.38 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr}}{146.10 \times 10^{-24} \text{ cm}^3} = 3.10$$

poco superiore a quello sperimentale (2.75 - 2.90).

Le costanti della cella esagonale come si ricavano dalla precedente tabella, sono invece $a_1 = 3.77 \text{ \AA}$ e $c_1 = 8.90 \text{ \AA}$; per giungere alla densità voluta, in questa cella dovrebbero essere contenute 4, 5 molecole, per cui con questi valori la cella esagonale non si può assumere come cella elementare. Un fatto analogo mostreremo si verifica anche per il cloruro di magnesio.

Resta da spiegare come una così grande rassomiglianza dei due reticoli di MgCl_2 e ZnCl_2 non trovi riscontro nella miscibilità allo stato solido delle due sostanze.

Interessanti dati sulla struttura di questi cloruri si possono trarre dai fotogrammi di Laue. Per ottenerli abbiamo dovuto superare la difficoltà presentata dalla igroscopicità di questi cloruri anidri.

Dopo parecchi tentativi non riusciti, questa difficoltà fu superata disgregando la massa del cloruro fusa in corrente di acido cloridrico sotto una soluzione diluita di paraffina in benzolo. Ciò permette di lavorare la sostanza senza temere la sua idratazione e ci permise di isolare delle lamine che al microscopio apparivano come degli unici cristalli. Le lamine migliori separate su dei vetrini, furono poste in un essiccatore a vuoto sempre coperte dalla soluzione di paraffina. Allora il benzolo evapora e la paraffina depositandosi sul cristallo forma un velo sottile, che lo protegge dal contatto dell'aria durante il tempo dell'esposizione fotografica.

Abbiamo così potuto ottenere i fotogrammi dei cloruri di magnesio, manganese e cadmio riprodotti nelle figg. 1, 2 e 3; come si vede, i punti di questi fotogrammi sono alquanto allungati perchè le lamine sottili presentano quasi sempre delle deformazioni più o meno grandi. La estrema deliquescenza del cloruro di zinco non ci permise fino ad ora di ottenere dei Laue di questa sostanza, nemmeno colla detta protezione. Essi sarebbero di grande interesse per confermare le deduzioni fatte sul fotogramma di Debye del cloruro di zinco, che, come abbiamo visto, presentano un certo grado di incertezza.

I fotogrammi delle figg. 1, 2 e 3 mostrano nettamente una simmetria ternaria, ed essendo i cloruri corrispondenti birifrangenti, si esclude la possibilità che essi corrispondano alla faccia (111) di una sostanza monometrica e permettono di concludere senz'altro che la faccia colpita dai raggi era la faccia basale (111) di una sostanza romboedrica. A questo sistema si debbono quindi indubbiamente ascrivere i cloruri anidri di magnesio, manganese e cadmio.

Questi Laue ordinati, danno rispettivamente i rapporti assiali:

$$\text{MgCl}_2, \frac{c}{a} = 2.45 \quad \text{MnCl}_2, \frac{c}{a} = 2.33 \quad \text{CdCl}_2, \frac{c}{a} = 2.20.$$

Non possiamo fare una affermazione precisa sulla disposizione degli atomi nella cella elementare di questi tre cloruri. Tra le strutture finora ritrovate quella di Bozorth, presentata dall'ioduro di cadmio, non è attribuibile a questi cloruri perchè il Laue di questa sostanza da noi eseguito mostra nettamente una simmetria senaria o pseudosenaria. La cella elementare di questi cloruri deve indubbiamente ritenersi costituita da dei romboedri poco diversi da cubi contenenti due molecole.

Tratteremo diffusamente questa questione in una prossima Nota.

Struttura analoga a quella dei cloruri di Cd, Mn e Mg, presentano con grande probabilità il cloruro di calcio (il cui reticolo pare assai vicino a quello di cadmio) e quelli di nichel e cobalto. Di essi non è stato possibile ottenere che dei Debye, i quali non sono per altro ancora stati completamente calcolati. Sulla struttura dei cloruri di nichel, cobalto e cadmio abbiamo or ora trovato un accenno in un lavoro di V. M. Goldschmidt⁽¹⁾, uscito quando il nostro lavoro sulla struttura dei cloruri bivalenti era già da parecchio tempo iniziato. In esso è detto solo che questi cloruri dovrebbero presentare una struttura trigonale o esagonale. La prima ipotesi è quindi in accordo con quanto appare dal nostro fotogramma di Laue del cloruro di cadmio.

Riassumendo:

a) Si dimostra che i cloruri anidri di magnesio, di manganese e di cadmio sono romboedrici coi rapporti assiali 2.45; 2.34 e 2.20.

b) Il cloruro di zinco presenta probabilmente una struttura romboedrica o esagonale. Dalle dimensioni del reticolo esso apparirebbe abbastanza simile come struttura a quello di magnesio. $\left(\frac{c}{a} \text{ di } \text{MgCl}_2 \text{ } 2.45 \quad , \quad \text{di } \text{ZnCl}_2 \text{ } 2.36\right)$.

(1) «Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente», VI, p. 16. (Vid. Akad. Skrifter I. M. N. Kl.) Oslo, 1926.

Geologia. — *A proposito della scoperta di un presunto filone di roccia vulcanica postglaciale nei dintorni di Bressanone nell'Alto Adige.* Nota del Socio G. DAL PIAZ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla ricerca delle singolarità delle* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ove* $a_n = g(n)$ *per* n *intero positivo con* $g(n)$ *trascendente intera.* Nota di SILVIO MINETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio S. PINCHERLE.

§ 1. — In una mia precedente Nota ⁽²⁾, estendendo alcune ricerche del Leau ⁽³⁾, ho dimostrato il seguente

« **TEOREMA.** — Se $f(z)$ è funzione analitica regolare in $z = 0$ e se « $\sum a_n z^n$ » è il suo sviluppo in serie di potenze di z in un intorno di questo « punto, il coefficiente generale a_n essendo il valore che per n intero e positivo assume una funzione intera $g(n)$ di genere $k = 0$ ed ordine ⁽⁴⁾ $\rho = 1$, « e se per una infinità di valori dell'indice i è soddisfatta la condizione

$$r_{i+1} > (1 + \eta) r_i$$

« η essendo una quantità comunque piccola ma « fissata *a priori* », il raggio « di convergenza della $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ » è l'unità ».

Nella presente Nota invece proseguendo quello studio, inizio la ricerca delle singolarità delle $f(z)$ che soddisfano alle condizioni di cui al teorema enunciato, e stabilisco intanto che per esse il punto $z = 1$ è certamente singolare sul loro cerchio di convergenza, in conformità di quanto avevo annunciato nella mia precedente Nota.

(1) Nella seduta del 16 maggio 1926.

(2) Vedi MINETTI, « Rend. R. Accademia dei Lincei », 1926, vol. III, Serie VI, fasc. n. 10, p. 723.

(3) *Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor*, « Journal de Mathématiques », 5^{me} série, to. V, 1899.

(4) Nel senso di Borel; vedi la Memoria di quell'Autore sulle funzioni intere, « Acta Mathematica », to. XX, e le *Leçons sur les Fonctions entières*, del medesimo Autore 1900, p. 26, nota (1).

Invero, adottando ancora tutte le stesse notazioni usate nel mio precedente lavoro, il prodotto infinito che ivi considero

$$(1) \quad \prod_1^{\infty} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right)$$

è assolutamente ed uniformemente convergente in qualunque campo finito del piano delle n essendo tale il prodotto

$$\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) = g(n);$$

lo è dunque in particolare per n intero e positivo.

Scelti dunque che siano, ε positivo qualunque; α reale positivo qualunque; fissata la serie $\sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i = \alpha$ e determinato il valore corrispondente $m^{(1)}$ (che è indipendente da n) notiamo con Poincaré che possiamo determinare un valore n_1 di n , così grande perchè sia verificata la disequaglianza

$$(2) \quad |P_m| = \left| \prod_1^m e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per $n \geq n_1$.

Poi a causa dell'uniforme convergenza in qualunque area finita del prodotto infinito (1) noi potremo scegliere un valore i_1 dell'indice i tale che per $i \geq i_1$ ed $n \geq n_1$, sia

$$(3) \quad \left| \prod_1^{i_1} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) - \prod_1^{\infty} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| < \varepsilon.$$

Scelto allora fra i due indici m ed i_1 il più grande fra essi, siccome ciascun fattore

$$e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right)$$

per $i > m$, risulta in valore assoluto minore dell'unità, si ha

$$|R_m| = \left| \prod_{m+1}^{\infty} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| \leq 1$$

ed è chiaro che le disequaglianze (2) e (3) sussisteranno a maggior ragione per il maggiore dei due valori m ed i_1 , che noi, per maggior chiarezza, indicheremo con M_1 .

(1) Vedi POINCARÉ, *Mémoire sur les fonctions entières*, « Bull. de la Soc. Math. de France », 1883, o BOREL, loc. cit., p. 49 e 50.

Per $n \geq n_1$ si avrà allora

$$\begin{aligned} \left| \prod_1^{M_i} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) - \prod_1^{\infty} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| &\leq \left| \prod_1^{M_i} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| + \\ &+ \left| \prod_1^{\infty} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| = \left| \prod_1^{M_i} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| + \\ &+ \left| \prod_1^{M_i} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| R_m < \varepsilon. \end{aligned}$$

Noi possiamo dunque determinare un valore M_i dell'indice i , tale che qualunque sia n , cioè per $n \leq n_1$ o per $n \geq n_1$, si abbia

$$\left| \prod_1^{M_i} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) - \prod_1^{\infty} e^{-\alpha_i |n|} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| < \varepsilon$$

con ε positivo qualunque « fissato *a priori* ».

Il prodotto infinito (1) è dunque assolutamente ed uniformemente convergente in tutto il piano, « compreso il punto $n = \infty$ ».

Considerando allora la serie identicamente eguale a quel prodotto infinito, che si considera a fianco di esso nella teoria elementare dei prodotti infiniti, rilevando altresì che il ben noto Teorema:

« Se per $x = a$ i termini di una serie uniformemente convergente « tendono a dei limiti finiti, la somma della serie tende anche ad un limite « finito eguale alla somma dei limiti dei suoi termini »

sussiste ancora se si considera il caso di $a = \infty$, se ne conclude subito che i due segni \lim e \prod per il prodotto infinito (1) sono fra loro commutabili.

Si può dunque scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha(n+1)} \prod_1^{\infty} e^{-\alpha_i(n+1)} \left(1 - \frac{n+1}{a_i}\right)^{(1)}}{e^{\alpha n} \prod_1^{\infty} e^{-\alpha_i n} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right)} = \\ &= e^{\alpha} \frac{\prod_1^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-\alpha_i(n+1)} \left(1 - \frac{n+1}{a_i}\right) \right]}{\prod_1^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-\alpha_i n} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right]} = \\ &= e^{\alpha} e^{-\sum_1^{\infty} \alpha_i} \prod_1^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{n+1}{a_i}\right)}{\left(1 - \frac{n}{a_i}\right)} = e^{\alpha} e^{-\alpha} \prod_1^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_i - n}\right) = 1. \end{aligned}$$

(1) Qui non importa più scrivere nelle formule $|n|$, variando n per valori interi positivi.

Il punto $z = 1$ è dunque, per un noto teorema di Fabry ⁽¹⁾, proprio l'affisso di un punto singolare della nostra $f(z)$ sul suo cerchio di convergenza.

§ 2. — Si può dunque enunciare, più generalmente, il seguente:

TEOREMA. — Se $f(z)$ è funzione analitica regolare in $z = 0$ e se $\sum a_n z^n$ è il suo sviluppo in serie di potenze di z in un intorno di questo punto, il coefficiente generale a_n essendo il valore che per n intero e positivo assume una funzione trascendente intera $g(n)$ di genere $k = 0$ ed ordine $\rho = 1$, e se per una infinità di valori dell'indice i è soddisfatta la condizione

$$r_{i+1} > (1 + \eta) r_i$$

r_i essendo il modulo del posto-zero generico della $g(n)$ e η una quantità positiva comunque piccola ma fissata a priori, il raggio R di convergenza della $f(z) = \sum a_n z^n$ è l'unità ed il punto $z = 1$ è certamente un punto singolare di essa.

Ci proponiamo tornare quanto prima sull'argomento, in conformità di talune ricerche già intraprese, circa l'estensione dell'indagine della distribuzione dei punti singolari della $f(z)$ e della natura di essi in rapporto all'ordine della $a_n = g(n)$ e circa l'enunciazione di altre condizioni sufficienti per la validità delle conclusioni a cui giunge il Teorema qui esposto, condizioni traducendosi in ipotesi relative alla distribuzione degli r_i sul semiasse positivo reale e alle quali soddisfano classi di funzioni intere che si sono dimostrate particolarmente interessanti specie nella Teoria delle Funzioni intere e della Crescenza, talune delle quali furono prese in esame dal Lindelöf e Boutroux nei loro ultimi lavori sulle funzioni intere che in riassunto compaiono in comunicazioni fatte nei « Comptes-Rendus », nonché circa uno studio più approfondito della particolare $g(n)$ fornitaci dall'integrale di Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

analitica intera rispetto ad n e naturalmente nulla per ogni n intero negativo. Nel caso poi di una $g(n)$ di genere $k = 1$ ed ordine $\rho = 1$ il raggio di convergenza R dello sviluppo $\sum a_n z^n$ può assumere in generale un valore qualunque come pure ci proponiamo mostrare in una prossima comunicazione.

(1) FABRY, *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux*, « Annales scient. de l'École Norm. sup. », 3^{me} série, to. XIII, 1896.

Matematica. — *Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche in tre o più variabili.* Nota di MAURO PICONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La mia ultima Nota apparsa in questi « Rendiconti » sarà nella presente citata con la notazione (N_1).

Se $O(x_1^0, \dots, x_n^0)$ è un fissato punto dello spazio euclideo $S_{(n)}$ a n dimensioni ($n \equiv 3$), denoteremo con $\omega(O)$ la ipersuperficie sferica (di $S_{(n)}$) di raggio uno e di centro in O , con ω_n la misura di $\omega(O)$, con $d\omega(P)$ l'elemento di misura di $\omega(O)$ nel punto P . Per un punto A di $S_{(n)}$ diremo sue coordinate polari col polo in O , la distanza $\rho = \overline{OA}$ e le coordinate, sull'ipersfera $\omega(O)$, del punto P secondo cui il raggio vettore \overrightarrow{OA} incontra $\omega(O)$. È facile verificare che:

I. Se $u(\rho, P)$ è una funzione armonica e regolare nel dominio sferico di $S_{(n)}$, di raggio R e di centro nel punto O , la funzione $\frac{1}{\rho^{n-2}} u\left(\frac{R^2}{\rho}, P\right)$ è armonica e regolare nel dominio dei punti non interni al detto dominio sferico, infinitesima all'infinito, d'ordine, rispetto a $\frac{1}{\rho}$, almeno eguale a $n - 2$.

Sia $O(x_1^0, \dots, x_n^0)$ un punto di $S_{(n)}$ nel quale la funzione armonica $u(x_1, \dots, x_n)$ possa, eventualmente, presentare una singolarità isolata. Indicheremo con $\delta(O)$ la distanza del punto O dall'insieme costituito dai rimanenti punti singolari della u . Si dimostra subito che:

II. Se O è un possibile punto singolare isolato per la funzione armonica $u(\rho, P)$, considerata un'ipersfera variabile S , di centro in O e di raggio r , detta $\mu(r)$ la media dei valori che la u prende su S , si ha, per r sufficientemente limitata,

$$(I) \quad \mu(r) = a + br^{2-n},$$

con a e b costanti.

Ed invero, supposto r variabile nell'intervallo $(0, \delta(O))$, si ha

$$\mu(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\omega(O)} u(r, P) d\omega(P),$$

$$\mu'(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\omega(O)} u_\rho(r, P) d\omega(P) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\omega(O)} u_\rho(r, P) r^{n-1} d\omega(P) = \frac{k}{r^{n-1}},$$

ove k è una costante, donde, integrando, segue la (I).

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

Alla media $\mu(r)$ daremo il nome di *residuo* della funzione armonica $u(\rho, P)$ relativo al punto O , oppure nel punto O . Dai teoremi I e II si deducono i due seguenti:

III. Se O è un possibile punto singolare isolato per la funzione armonica $u(\rho, P)$ e se, per $\rho \rightarrow 0$, è determinato e finito il limite di $\rho^{n-2} u(\rho, P)$, allora, detto b tale limite, in un conveniente intorno di O , si potrà porre

$$(2) \quad u(\rho, P) = U(\rho, P) + b \rho^{2-n},$$

essendo $U(O) = a$, U armonica, regolare in O , $a + b r^{2-n}$ il residuo di u in O .

Ed inverso, fissato a piacere un numero positivo $R < \delta(O)$, consideriamo l'ipersfera S di centro in O e di raggio R , e poniamo

$$\rho' = \frac{R^2}{\rho}, \quad \frac{R^{n-2} u\left(\frac{R^2}{\rho'}, P\right)}{\rho'^{n-2}} = v(\rho', P).$$

La $v(\rho', P)$ è armonica regolare nel dominio luogo dei punti non interni a S , su S prende i valori $u(R, P)$ e per $\rho' \rightarrow \infty$ tende a $b R^{2-n}$; si ha pertanto

$$v(\rho', P) = \frac{b}{R^{n-2}} - \frac{b}{\rho'^{n-2}} + \frac{R^{n-2}}{\omega_n} \int_{\omega(O)} u(R, Q) \frac{(\rho'^2 - R^2) d\omega(Q)}{[\rho'^2 + R^2 - 2 R \rho' \cos \gamma(P, Q)]^{\frac{n}{2}}},$$

ove $\gamma(P, Q)$ è l'angolo (fra 0 e π) dei raggi vettori \vec{OP} e \vec{OQ} . Ponendo qui $\frac{R^2}{\rho}$ in luogo di ρ' , si ricava, per ogni punto interno a S , il centro O al più eccettuato,

$$u(\rho, P) = \frac{b}{\rho^{n-2}} - \frac{b}{R^{n-2}} + \frac{R^{n-2}}{\omega_n} \int_{\omega(O)} u(R, Q) \frac{(R^2 - \rho^2) d\omega(Q)}{[\rho^2 + R^2 - 2 R \rho \cos \gamma(P, Q)]^{\frac{n}{2}}}.$$

IV. Se O è un possibile punto singolare isolato per la funzione armonica $u(\rho, P)$ e se, essendo K un determinato qualsiasi numero, riesce definitivamente, per $\rho \rightarrow 0$, $\rho^{n-2} u(\rho, P) \cong K$ oppure $\leq K$, allora, in un certo intorno di O , sussiste ancora la (2).

Considerando la funzione armonica $u(\rho, P) - K \rho^{2-n}$, oppure l'altra $K \rho^{2-n} - u(\rho, P)$, potremo limitarci a supporre che, per ρ infinitesimo, sia definitivamente $u(\rho, P) \cong 0$. Prenderemo due ipersfere s e S , di raggi r e R ($r < R$), entrambi minori di $\delta(O)$, concentriche in O , e, per ogni punto (ρ, P) , non interno a s , porremo:

$$(3) \quad v(r; \rho, P) = \frac{r^{n-2}}{\omega_n} \int_{\omega(O)} r^{n-2} u(r, Q) \frac{(\rho^2 - r^2) d\omega(Q)}{[\rho^2 + r^2 - 2 \rho r \cos \gamma(P, Q)]^{\frac{n}{2}}},$$

Per ogni fissato r , la $v(r; \rho, P)$ è funzione, di ρ e di P , armonica e prende su s i valori $r^{n-2} u(r, P)$. Supponendo che, per $\rho \equiv r_0$, riesca $u \equiv 0$; dalla (3), per $r \equiv r_0$ e per ogni valore di ρ maggiore di r , si deduce

$$(4) \quad (ar^{n-2} + b) \frac{(\rho - r)r^{n-2}}{(\rho + r)^{n-1}} \leq v(r; \rho, P) \leq (ar^{n-2} + b) \frac{(\rho + r)r^{n-2}}{(\rho - r)^{n-1}},$$

donde $\lim v(r; \rho, P) (r \rightarrow 0) = 0$, uniformemente in ogni insieme chiuso che non contenga il punto O . La funzione

$$w(r; \rho, P) = r^{n-2} u(\rho, P) - v(r; \rho, P)$$

è, per ogni r , armonica nel dominio (s, S) che ha per completa frontiera le due ipersfere s e S , è identicamente nulla su s ; è uniformemente infinitesima su S , per $r \rightarrow 0$. Pertanto, comunque si prendano due numeri positivi ε e q , si avrà definitivamente per r infinitesimo, in tutto il dominio (s, S) , $|w| \leq \frac{\varepsilon}{(1+q)^{n-2}}$, cioè

$$(5) \quad -\frac{\varepsilon}{(1+q)^{n-2}} + v(r; \rho, P) \leq r^{n-2} u(\rho, P) \leq \frac{\varepsilon}{(1+q)^{n-2}} + v(r; \rho, P).$$

Se nella (4) poniamo $\rho = (1+q)r$, se ne ricava, per $r \rightarrow 0$,

$$bq(2+q)^{1-n} \leq \lim' v[r; (1+q)r, P] \leq \lim'' v[r; (1+q)r, P] \leq \\ \leq b(2+q)q^{1-n},$$

e quindi dalla (5) segue, postovi $\rho = (1+q)r$,

$$-\varepsilon + b \frac{q(1+q)^{n-2}}{(2+q)^{n-1}} \leq \lim' [r^{n-2} u(r, P)] \leq \lim'' [r^{n-2} u(r, P)] \leq \\ \leq \varepsilon + b \frac{(2+q)(1+q)^{n-2}}{q^{n-1}},$$

donde, data l'arbitrarietà di ε e di q , $\lim [r^{n-2} u(r, P)] = b$. E con ciò il teorema è dimostrato, in virtù del teorema III.

Dopo quanto precede, ragionando come in (N_1) , si deduce:

V. Se O è un punto singolare isolato, effettivamente singolare, per la funzione armonica $u(\rho, P)$ in n variabili ($n \geq 3$), due casi sono possibili,

$$(6) \quad \lim'_{\rho \rightarrow 0} u(\rho, P) = \lim''_{\rho \rightarrow 0} u(\rho, P) = \pm \infty,$$

oppure

$$(7) \quad \lim'_{\rho \rightarrow 0} [\rho^{n-2} u(\rho, P)] = -\infty, \quad \lim''_{\rho \rightarrow 0} [\rho^{n-2} u(\rho, P)] = +\infty.$$

In entrambi i casi si può porre, in un intorno di O ,

$$u(\rho, P) = U(\rho, P) + a + b\rho^{2-n},$$

ove $a + b\rho^{2-n}$ è il residuo della u nel punto O , $U(\rho, P)$ è armonica, di residuo nullo in O , e, nel primo caso, regolare in O , nel secondo, verificante pur essa la (7). Si ha dunque che: se O è un effettivo punto singolare isolato per la funzione armonica u e se essa, per $\rho \rightarrow 0$, non diverge, allora, in qualsiasi intorno di O , prende infinite volte ogni valore comunque prefissato.

*
* *

Si può osservare che il ragionamento tenuto in (N_1) per dimostrarvi il teorema III, serve anche per dimostrare il seguente:

VI. Se il punto O è un effettivo punto singolare isolato per la funzione armonica $u(\rho, P)$ in due variabili e se essa, per $\rho \rightarrow 0$, non diverge, allora,

$$\lim' \frac{u(\rho, P)}{1 + |\log \rho|} = -\infty, \quad \lim'' \frac{u(\rho, P)}{1 + |\log \rho|} = +\infty.$$

*
* *

Utilizzando la trasformazione per raggi vettori reciproci, dai risultati della Nota (N_1) e della presente si deduce il teorema:

VII. Se l'insieme dei punti singolari per la funzione armonica $u(\rho, P)$ in n variabili è limitato, per ρ sufficientemente grande si ha: quando $n = 2$, $u(\rho, P) = U(\rho, P) + a + b \log \rho$, ove $U(\rho, P)$ ha residuo nullo all'infinito e, secondochè u ha all'infinito limite determinato o no, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(\rho, P) = 0$,

oppure

$$\lim'_{\rho \rightarrow \infty} \frac{u(\rho, P)}{1 + |\log \rho|} = \lim'_{\rho \rightarrow \infty} \frac{U(\rho, P)}{1 + |\log \rho|} = -\infty,$$

$$\lim''_{\rho \rightarrow \infty} \frac{u(\rho, P)}{1 + |\log \rho|} = \lim''_{\rho \rightarrow \infty} \frac{U(\rho, P)}{1 + |\log \rho|} = +\infty;$$

quando $n \geq 3$, $u(\rho, P) = U(\rho, P) + a + b\rho^{2-n}$, ove $U(\rho, P)$ ha residuo nullo all'infinito e, secondochè u ha all'infinito limite determinato o no, U , per

$\rho \rightarrow \infty$, è infinitesima d'ordine superiore a $\frac{1}{\rho^{n-2}}$, oppure

$$(8) \quad \begin{cases} \lim'_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, P) = \lim'_{\rho \rightarrow \infty} U(\rho, P) = -\infty, \\ \lim''_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, P) = \lim''_{\rho \rightarrow \infty} U(\rho, P) = +\infty. \end{cases}$$

Per $n \geq 3$ e nel caso particolare che l'insieme dei punti singolari, per la funzione armonica u , manchi, è già noto (Picard) che, se u non è una costante, devono sussistere le (8).

Matematica. — *Sulla rappresentazione conforme dell'area limitata da una lemniscata sopra un cerchio.* Nota di OSCAR ZARISKI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio ENRIQUES.

1. Dato un polinomio $P(x)$ di grado n della variabile complessa x , l'equazione $|P(x)| = \text{cost.}$ definisce nel piano x una o più curve chiuse. Questa curva, o l'insieme di queste curve, chiameremo - seguendo Montel - *lemniscata di grado n* ⁽²⁾. Se $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono le radici del polinomio $P(x)$, e se si indica con r_i la distanza di un punto x dal punto α_i , allora si può scrivere l'equazione della lemniscata sotto la forma seguente:

$$r_1 r_2 \cdots r_n = \text{cost.},$$

da cui si vede che la lemniscata è il luogo geometrico dei punti per cui il prodotto delle distanze da n punti fissi è costante. Le note curve di Cassini corrispondono al caso $n = 2$. La considerazione delle lemniscate riesce assai utile in varie questioni dell'analisi, p. es., nel problema dello sviluppo di una funzione analitica in serie di polinomi ⁽³⁾.

In questa Nota studio il problema della rappresentazione conforme dell'area limitata da un arco chiuso di lemniscata sopra un cerchio. Per poter enunciare con precisione il mio risultato devo premettere alcune osservazioni.

Poniamo $t = P(x)$. Allora alla lemniscata $|P(x)| = k \text{ cost.}$ corrisponde nel piano della variabile complessa t il contorno di un cerchio C di centro nell'origine e di raggio k . Quando la costante k cresce da 0 a ∞ la lemniscata passa per varie fasi, dipendenti dall'andamento della x , funzione algebrica di t , nel cerchio C .

1) Per valori abbastanza piccoli di k accade in generale che il cerchio C non contiene punti critici della funzione $x(t)$, fatta eccezione pel caso in cui il polinomio $P(x)$ possiede radici multiple. La lemniscata è composta allora da n curve chiuse, ciascuna contenente nel suo interno una sola radice del polinomio $P(x)$. In questa prima fase la soluzione del nostro problema si ottiene subito: la funzione $t = P(x)$ fornisce la rappresentazione conforme dell'area limitata da una qualsiasi delle componenti della lemniscata sopra il cerchio C . Infatti, nelle ipotesi fatte gli n rami della x sono in C funzioni uniformi di t .

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

(2) V. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*. Paris, 1910, p. 45.

(3) V. p. es., MONTEL, loc. cit.

2) Supponiamo invece che il cerchio C contenga punti critici della funzione x . In questo caso i rami x_1, x_2, \dots, x_n della x si distribuiscono in diversi sistemi di intransitività (riguardo alle sostituzioni che si producono sopra di essi, quando il punto t descrive in C cicli chiusi), i quali forniscono altrettante componenti della x , irriducibili in C e non tutte uniformi. Noi vedremo che per ciascuna di queste componenti, al contorno del cerchio C corrisponde nel piano x una componente della lemniscata, cioè una curva chiusa, la quale proviene appunto dalla riunione di più componenti della lemniscata della prima fase. Noi consideriamo una delle componenti irriducibili della x , costituita p. es., dei rami

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_m$$

con $m > 1$, e consideriamo la relativa componente L della lemniscata. Si domanda di rappresentare conformemente l'area limitata da L sopra un cerchio. È chiaro che in questo caso la funzione $t = P(x)$ non fornisce più la soluzione del problema.

In particolare, quando il cerchio C racchiude tutti i punti critici al finito della funzione x (il punto all'infinito del piano t è un punto critico d'ordine n), allora la lemniscata si compone di una sola curva chiusa.

2. Ciò premesso io dimostro, che per ottenere la rappresentazione conforme richiesta, si deve procedere come segue.

Si costruisca una funzione algebrica X di t a m rami che soddisfi alle condizioni seguenti:

a) t sia una funzione razionale di X ,

$$t = R(X).$$

b) La funzione X si comporti nel cerchio C come la componente (1) della x che si considera, cioè abbia in C gli stessi punti critici e le stesse sostituzioni dei rami. In seguito indicherò brevemente la componente (1) con $x^{(1)}$.

c) Siano O_1, O_2, \dots, O_s i punti critici della X di cui alla b). Noi imponiamo alla funzione X la condizione di possedere all'esterno di C i soli punti critici $\overline{O}_1, \overline{O}_2, \dots, \overline{O}_s$ coniugati ai punti O_i nell'inversione per raggi reciproci rispetto al cerchio C . Chiediamo inoltre che le sostituzioni dei rami della X in due punti critici coniugati O_i, \overline{O}_i , siano una l'inversa dell'altra in relazione a due cappi coniugati che vadano a questi punti da un punto del cerchio C .

Io dimostrerò che una tale funzione X esiste; essa è definita a meno di una sostituzione lineare.

Ebbene la X , considerata come funzione di x , in virtù della relazione

$$P(x) = R(X),$$

fornisce la rappresentazione conforme sopra un cerchio del piano X dell'area limitata dalla componente L della lemniscata.

3. Per la dimostrazione dell'esistenza di una funzione X di t che soddisfi alle condizioni $a)$, $b)$, $c)$ del numero precedente, cominciamo dall'osservare che le sostituzioni assegnate dei rami della X in relazione ai punti critici all'interno di C generano già da sole un gruppo transitivo di grado m (attesa l'irriducibilità in C della componente $x^{(1)}$), e che un giro intorno a tutti i punti critici della X produce la sostituzione identica. Quindi le condizioni $b)$ e $c)$ valgono effettivamente a definire una classe di funzioni algebriche irriducibili X ed t di grado m . Per dimostrare che si possa anche soddisfare alla condizione $a)$ occorre provare che la funzione X è di genere $p = 0$. Per questo scopo consideriamo il cerchio multiplo mC sopra cui si possono distribuire gli m rami della X , e quindi anche della $x^{(1)}$, in C . Sia inoltre R la superficie di Riemann della funzione x . Il cerchio multiplo mC fa parte di R . Siccome il punto $t = \infty$ è un punto critico, intorno a cui si permutano ciclicamente tutti gli n rami della x , segue che la superficie R resta connessa quando da essa si toglie il cerchio multiplo mC . Essendo R semplicemente connessa, se ne deduce che anche il cerchio multiplo mC è semplicemente connesso.

Osserviamo che dalla semplice connessione di mC segue intanto che i valori di $x^{(1)}$ sul contorno di C coprono nel piano x una sola linea chiusa, cioè una componente L della lemniscata. Si vede anche che la sostituzione degli m rami della $x^{(1)}$ relativa al contorno di C , è necessariamente ciclica.

Data la simmetria con cui la funzione X è stata definita all'interno e all'esterno di C , si deduce che anche il campo multiplo $m\bar{C}$, dove \bar{C} indica la regione esterna a C , è semplicemente connesso. La superficie di Riemann della funzione X risulta dunque spezzata in due parti semplicemente connesse mC e $m\bar{C}$ dal contorno comune di queste, e perciò è semplicemente connessa, c. v. d.

Resta provato che esiste una funzione X soddisfacente alla condizioni $a)$, $b)$, $c)$ del numero precedente. Essa è evidentemente definita a meno di una sostituzione lineare.

Ora io affermo che la X , come funzione di x , alla quale è legata dalla relazione

$$P(x) = R(X),$$

dà la rappresentazione conforme dell'area limitata dalla componente L della lemniscata sopra un cerchio D del piano X .

In altre parole, siccome l'area interna ad L è rappresentata conformemente sopra il cerchio multiplo mC , si tratta di dimostrare che gli m rami della X , anch'essi distribuiti sullo stesso cerchio multiplo mC , coprono nel piano X un campo circolare D (oppure un'area esterna ad un cerchio, o

un semipiano, essendo la X definita a meno di una sostituzione lineare). Ci basta mostrare che si possa operare in modo che il campo D risulti uno dei semipiani limitati dall'asse reale del piano X .

Per questo scopo assegniamo la funzione X di t , fissando che essa assuma tre valori *reali* determinati (distinti) in tre punti dati del contorno di C . Consideriamo accanto alla funzione $X(t)$ la funzione $X_1(t)$ definita come segue:

$$X_1(t) = \overline{X}(t'),$$

dove \overline{X} è il valore coniugato di X e t' è il punto coniugato di t nell'inversione per raggi reciproci rispetto al cerchio C . Dalla teoria generale delle funzioni analitiche è ben noto che dall'analiticità della funzione $X(t)$ in un punto t segue l'analiticità della funzione $X_1(t)$ nel punto t' . Perciò la funzione $X_1(t)$ è una funzione algebrica di t a m valori. I suoi punti critici nel piano t sono i coniugati dei punti critici di $X(t)$ nell'inversione rispetto al cerchio C . Dunque, data la definizione della funzione X , la funzione X_1 possiede gli stessi punti critici della X . In secondo luogo, date le ipotesi fatte sulle sostituzioni dei rami della X in due punti critici coniugati, e tenuto conto del fatto che nell'inversione rispetto al cerchio C il verso positivo di un cappio si muta nel verso negativo del cappio coniugato, si deduce che le sostituzioni dei rami delle funzioni X e X_1 nei singoli punti critici sono le stesse. Infine t è anche una funzione razionale di X_1 . *Se ne deduce che la funzione X_1 è una trasformata lineare della X ,*

$$(2) \quad X_1(t) = \frac{aX(t) + b}{cX(t) + d}.$$

Sul contorno di C si ha $t = t'$ e quindi $X_1(t) = \overline{X}(t)$. Ma, per ipotesi, la funzione X assume almeno tre valori reali distinti sul contorno C , e quindi per tre valori distinti di X si ha $X_1 = X$. Se ne deduce che la (2) è necessariamente la trasformazione identica,

$$X_1(t) = X(t),$$

e quindi *in tutti i punti del contorno di C la funzione X assume soltanto valori reali*, c. v. d.

Matematica. — *Un estensione del teorema di Bernouilli.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Di una classe di varietà caratterizzate per mezzo del parallelismo.* Nota di G. CORBELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *La polidromia dei funzionali analitici lineari.* Nota ⁽¹⁾ di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

1. Analogamente a ciò che si fa per le funzioni, diremo che un funzionale analitico $F[y(t)]$ è *polidromo*, se è possibile far variare con continuità la $y(t)$, in dipendenza da un parametro α , in modo che quando la $y = y(t, \alpha)$ ritorna alla forma primitiva $y_0(t)$ il valore del funzionale, variando pure con continuità, viene a prendere per questa funzione un valore diverso da quello che aveva inizialmente.

A differenza di ciò che accade per le funzioni, già nel campo dei funzionali lineari abbiamo esempi di funzionali polidromi; anzi una classe di questi funzionali polidromi si presenta estremamente interessante, come vedremo in un prossimo lavoro, anche per le applicazioni ad altri rami della Matematica, essendo costituita da funzionali che, pur essendo definiti inizialmente nel campo delle funzioni analitiche, sono prolungabili nel campo delle funzioni continue, e, più generalmente, nel campo delle funzioni integrabili (di variabile reale).

2. Cominciamo perciò a studiare i funzionali lineari dati dalle quadrature

$$(1) \quad F[y(t)] = \int_a^b k(t) y(t) dt = \int_L k(t) y(t) dt$$

(in cui k è una funzione fissa) estese a una linea L aperta del piano complesso t , congiungente i due estremi a e b , e tutta interna al campo D di definizione della funzione analitica $k(t)$. L'indicatrice $v(\alpha)$ del funzionale F sarà data da ⁽²⁾

$$(2) \quad v(\alpha) = F_t \left[\frac{1}{t - \alpha} \right] = \int_a^b \frac{k(t)}{t - \alpha} dt$$

e sarà una funzione di α definita in tutti i punti del piano complesso, tranne al più quelli della linea d'integrazione L , la quale però non costituisce una

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1926.

(2) L. FANTAPPIÈ, *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità.* «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. I, serie VI, 1° sem., 1925.

frontiera naturale per la $v(\alpha)$. Se infatti facciamo compiere ad α un giro intorno all'estremo b , mantenendoci sempre entro il campo D e spostando convenientemente la linea d'integrazione, avremo che questa, nella sua posizione finale L' , sarà equivalente alla linea primitiva L più una curva chiusa C racchiudente nel suo interno il punto $t = \alpha$, e quindi ⁽¹⁾ il nuovo valore $v_1(\alpha)$, che il funzionale F assume per la stessa funzione $y = \frac{1}{t - \alpha}$, sarà dato da

$$(3) \quad v_1(\alpha) = \int_{L'} \frac{k(t)}{t - \alpha} dt = \int_L \frac{k(t)}{t - \alpha} dt + \int_C \frac{k(t)}{t - \alpha} dt$$

$$v_1(\alpha) = v(\alpha) + 2\pi i k(\alpha).$$

Se dunque il punto $\alpha = b$ (estremo dell'integrale) non è un punto di diramazione anche per la funzione $k(\alpha)$, l'indicatrice $v(\alpha)$ del nostro funzionale $F[y(t)]$ presenterà ivi un punto critico logaritmico, aumentando precisamente di $2\pi i k(\alpha)$ ad ogni giro positivo intorno a b , mentre avrà un altro punto critico (logaritmico, se esso non è critico anche per $k(\alpha)$) nell'estremo inferiore a dell'integrale, aumentando di $-2\pi i k(\alpha)$ ad ogni giro positivo intorno ad a .

3. Abbiamo così un primo esempio di funzionali lineari polidromi che diremo *elementari*, dati da integrali estesi a curve aperte; per essi l'indicatrice $v(\alpha)$ risulta una funzione polidroma di α .

Dico che in generale, condizione necessaria e sufficiente perchè un funzionale lineare $F[y(t)]$, applicato a funzioni $y(t)$ monodrome, risulti polidromo è che la sua indicatrice $v(\alpha)$ sia una funzione polidroma di α . Ciò risulta dalla formula fondamentale che dà l'espressione più generale di un funzionale lineare $F[y(t)]$

$$(4) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t) dt = v(t) y(t)^*$$

(1^a Nota citata), in cui $v(t)$ è l'indicatrice del funzionale e C è una curva (separatrice) del piano t , racchiudente nel suo interno tutti i punti singolari della funzione variabile (monodroma) $y(t)$, ma che lascia all'esterno tutti quelli della $v(t)$ (considerando tra i punti singolari anche l' ∞ se la funzione, pure essendo regolare, è ivi $\neq 0$).

Nella (4) infatti potremo pensare la curva C composta di tanti piccoli cerchietti intorno ai punti singolari della $y(t)$, cerchietti che saranno trasportati con sé dai rispettivi punti singolari quando la $y(t)$ varia con continuità. Se quindi la $y(t)$ finisce per riprendere la forma iniziale $y_0(t)$, i

(1) Cfr. anche, per un ragionamento simile, la mia Nota: *Risoluzione di una classe di equazioni integrali di 1^a specie a limiti costanti*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. II, serie VI, 2° sem., 1925.

punti singolari torneranno alla posizione iniziale e anche l'insieme dei rispettivi cerchietti (che dà la C) finirà col riprendere la configurazione primitiva; d'altra parte nella (4) non solo la curva d'integrazione C, ma la funzione integranda $v(t) y(t)$ (se tanto v che y sono monodrome) ritorna cogli stessi valori, quindi anche il valore dell'integrale, cioè $F[y(t)]$ sarà sempre lo stesso per $y = y_0(t)$.

Se invece la $v(\alpha)$ è una funzione polidroma, del resto qualsiasi, già per la funzione semplicissima $y(t) = \frac{1}{t - \alpha}$ il funzionale $F[y(t)] = F_t \left[\frac{1}{t - \alpha} \right] = v(\alpha)$ risulta polidromo, assumendo valori diversi tutte le volte che si faccia variare con continuità la y facendo girare α intorno a un punto critico di $v(\alpha)$.

4. In questo caso la formula (4), che esprime il valore del funzionale, va precisata assegnando il ramo della $v(\alpha)$ su cui va calcolato l'integrale per ognuno dei cerchietti che compongono la curva C. È chiaro però che se la funzione $y(t)$ varia con continuità, ma i suoi punti singolari restano sempre tutti fissi, il funzionale riprenderà per la $y_0(t)$ iniziale lo stesso valore che aveva prima; mentre se invece la $y = y(t, \alpha)$ varia in modo che qualche suo punto singolare giri intorno a qualcuno dei punti critici della $v(t)$, che diremo anche *punti critici o di diramazione del funzionale F*, il valore $F_1[y_0(t)]$, che assume infine il funzionale, sarà in generale diverso da quello iniziale $F[y_0(t)]$.

Supponiamo infatti, per semplicità, che al variare di α nella $y(t, \alpha)$ vari la posizione di un solo punto singolare isolato $t = t_0 = \tau(\alpha)$, contornato dal cerchietto Γ (curva parziale di $C = \Gamma + C'$) e sia

$$(5) \quad \zeta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(\alpha)}{(t - \tau(\alpha))^{n+1}}$$

la parte principale della $y(t, \alpha)$ nell'intorno di $t = \tau(\alpha)$. Quando questo punto singolare gira intorno a un punto critico della $v(t)$ passando dalla determinazione $v(t)$ alla determinazione $v_1(t)$, il funzionale passerà dalla determinazione iniziale

$$F[y_0(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y_0(t) dt$$

a quella finale

$$F_1[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} v(t) y_0(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} v_1(t) \zeta(t) dt$$

da cui, posto $v_1(t) - v(t) = h(t)$ risulta

$$(6) \quad F_1[y_0(t)] = F[y_0(t)] + h(t) \zeta(t)^*.$$

Considerazioni simili varrebbero per ogni altro punto singolare mobile al variare di α . In conclusione possiamo dire che *nel caso di un funzionale*

polidromo $F[y(t)]$, di *indicatrice* (*polidroma*) $v(t)$, applicato a una *funzione monodroma* $y(t)$, la *curva separatrice* C , che compare nella (4), potrà pensarsi tracciata sulla superficie di Riemann della $v(t)$ in modo che essa (o ciascuna delle sue curve componenti) sia riducibile con continuità a un punto, descrivendo l'area (o le aree) ad essa interna senza mai incontrare nessun punto singolare della $v(t)$, e incontrando invece (e una sola volta) tutti i punti singolari della $y(t)$, distribuiti, del resto arbitrariamente, sui vari rami della $v(t)$.

5. Potendo così calcolare il prodotto funzionale $v(t) y(t)^*$ di una funzione *polidroma* $v(t)$ per una *monodroma* $y(t)$, sapremo anche calcolare il valore $y(t) v(t)^* = -v(t) y(t)^*$ di un funzionale, di *indicatrice monodroma* $y(t)$, applicato a una funzione *polidroma* $v(t)$. Pure avendosi varie determinazioni diremo però ancora che il funzionale è *monodromo*, poichè esse dipendono, più che da proprietà intrinseche del funzionale, dal fatto che la $v(t)$ variabile possiede essa stessa più determinazioni.

6. Supponiamo ora che sul piano complesso α si possa eseguire un certo numero q di tagli L_1, L_2, \dots, L_q , non intersecantisi, in modo che sul piano così tagliato un conveniente ramo dell'indicatrice (*polidroma*) $v(\alpha)$ del funzionale *polidromo* $F[y(t)]$ risulti *monodromo*, e siano a_r, b_r gli estremi della linea L_r , $2\pi i k_r(\alpha)$ la differenza (analitica) tra il valore assunto dal ramo sul bordo sinistro del taglio (rispetto al senso di percorso a_r, b_r) e quello assunto sul bordo opposto. In questo caso anche per i q funzionali *polidromi elementari* $P_r[y(t)]$ ($r = 1, 2, \dots, q$), definiti da

$$(7) \quad P_r[y(t)] = \int_{L_r} k_r(t) y(t) dt = \int_{a_r}^{b_r} k_r(t) y(t) dt$$

le linee L_r costituiranno un sistema di tagli che ne rende *monodrome* le *indicatrici*, anzi l'indicatrice $u_r(\alpha)$ di $P_r[y(t)]$ presenterà sui due bordi del taglio L_r la stessa differenza $2\pi i k_r(\alpha)$ come la $v(\alpha)$, mentre non presenterà alcuna differenza sui due bordi degli altri tagli. La funzione $w(\alpha) =$

$= v(\alpha) - \sum_1^q u_r(\alpha)$ sarà allora una *funzione monodroma* di α e l'indicatrice *polidroma* $v(\alpha)$ potrà mettersi sotto la forma

$$(8) \quad v(\alpha) = w(\alpha) + \sum_1^q \int_{a_r}^{b_r} \frac{k_r(t)}{t - \alpha} dt$$

mentre corrispondentemente il funzionale *polidromo* $F[y(t)]$

$$(9) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C w(t) y(t) dt + \sum_1^q \int_{a_r}^{b_r} k_r(t) y(t) dt$$

potrà mettersi sotto forma di una somma di un funzionale *monodromo* $M[y(t)] = w(t) y(t)^*$ e di q funzionali *polidromi elementari*. I punti critici

del funzionale si troveranno fra gli estremi dei q integrali, mentre le funzioni fisse $k_r(\alpha)$ che compaiono sotto gli integrali, non sono altro, moltiplicate per $2\pi i$, che le differenze della $v(\alpha)$ sui due bordi dei vari tagli L_r .

7. Vediamo infine come si possa calcolare il valore di un funzionale polidromo $F[y(t)] = v(t) y(t)$ di indicatrice (polidroma) $v(t)$ applicato a una funzione pure polidroma $y(t)$. Supponiamo dapprima che la $y = y(t, \alpha)$ abbia due soli punti critici, variabili al variare di α , coincidenti ambedue per $\alpha = \alpha_0$ in un punto singolare t_1 della funzione (monodroma) $y(t, \alpha_0) = y_0(t)$.

Per questa noi sappiamo calcolare il valore del funzionale $F[y_0(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y_0(t) dt$, la curva C contenendo nel suo interno tutti i punti singolari della y e quindi anche t_1 . Ma se facciamo variare α in un intorno abbastanza ristretto di α_0 i due punti critici (complementari, essendo gli unici), che nascono da t_1 , resteranno ancora nell'interno di C , e quindi l'espressione

$$(10) \quad F_t[y(t, \alpha)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t, \alpha) dt$$

(funzione analitica α) seguita ad avere significato, per α variabile in questo intorno, e ci darà il valore del funzionale stesso per la funzione polidroma $y(t, \alpha)$. Per α variabile comunque basterebbe modificare con continuità la curva separatrice C , e anche per punti critici in numero qualunque potrebbero ripetersi analoghe considerazioni. Concludendo, abbiamo quindi che per calcolare il valore del funzionale polidromo $F[y(t)]$ di indicatrice (polidroma) $v(\alpha)$, applicato alla funzione $y(t)$, pure polidroma, bisognerà calcolare l'espressione

$$F[y(t)] = v(\alpha) y(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\alpha) y(\alpha) d\alpha$$

in cui la curva separatrice C dovrà considerarsi sotto due forme C_1 e C_2 da precisarsi nel modo seguente. Chiamando corrispondenti due punti $P \equiv (\alpha, y)$, della superficie di Riemann S_y della $y(\alpha)$, e $Q \equiv (\alpha, v)$ della superficie di Riemann S_v della v , quando hanno la stessa α , la curva (chiusa) C_1 dovrà immaginarsi descritta da un punto mobile P sulla S_y in modo che sia riducibile con continuità a un punto e comprenda nel suo interno tutti i punti singolari della y , mentre la curva corrispondente C_2 , descritta su S_v da uno dei punti Q corrispondenti a P , dovrà pure essere chiusa, riducibile con continuità a un punto, e invertita di segno dovrà contenere nel suo interno tutti i punti singolari della v (i punti critici al finito, in cui le funzioni sono finite o ∞ d'ordine abbastanza basso, si considereranno come regolari).

La polidromia del funzionale è originata dal fatto che possono esistere più coppie di curve C_1, C_2 che soddisfano alle condizioni predette, e sia possibile passare con continuità dall'una all'altra di esse, facendo variare con continuità la funzione $y(t)$.

8. Tutto ciò che abbiamo detto vale, naturalmente, anche se il fun-

zionale dipende da un parametro χ , $F[y(t); \chi] = f(\chi)$, e fa quindi corrispondere a una funzione $y(t)$ una (o più) funzione $f(\chi)$. Se l'indicatrice $v(\chi, \alpha)$ è una funzione polidroma di α , e quindi il funzionale è polidromo, si presenta però la questione nuova di vedere se le varie determinazioni corrispondenti a una stessa funzione $y(t)$ (monodroma) si riannodano in una unica funzione analitica $f(\chi)$ (polidroma), oppure restano scisse in più funzioni analitiche distinte $f_1(\chi), f_2(\chi), \dots$ che si trasformano l'una nell'altra solo quando varia la funzione $y(t)$.

Il primo caso di una sola funzionale $f(\chi)$ si presenterà quando la $v(\chi, \alpha)$ avrà i suoi punti critici (come funzione di α) mobili al variare di χ , in modo che sia possibile, facendo variare χ di farli girare intorno ai punti singolari di y , scambiando così i rami dell'indicatrice su cui vanno considerati i cerchietti d'integrazione relativi a quei punti singolari (cfr. n. 3).

Si avranno invece più funzioni $f_i(\chi)$ distinte, quando non sia possibile passare da un ramo all'altro della $v(\chi, \alpha)$, altro che girando intorno a un punto critico (fisso) che non vari al variare di χ , o che comunque non si riesca a far ruotare intorno ai punti singolari di y , facendo variare χ .

Geometria. — Una nuova congruenza rettilinea. Nota del prof. A. M. BEDARIDA, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. GUIDO FUBINI.

1. La totalità delle rette reciproche delle normali ad una superficie S , nella polarità definita dalla quadrica di Lie, costituisce, come le normali, una congruenza rettilinea.

Ci siamo proposti lo studio di tale congruenza, che, come si vedrà, è intimamente legata alla superficie.

In questa Nota viene iniziato questo studio.

2. È necessario premettere alcune considerazioni. Si considerino le due rigate determinate dalle tangenti alle linee asintotiche uscenti da un medesimo punto della superficie: queste due rigate hanno, lungo le due generatrici uscenti dal punto, lo stesso iperboloide osculatore: tale iperboloide è la quadrica di Lie relativa al punto considerato della superficie ⁽²⁾.

La superficie sarà riferita alle sue linee asintotiche e le coordinate di un suo punto saranno le cartesiane ortogonali $x, y, \chi, t = 1$; le coordinate del piano tangente ξ, η, ζ, τ , le coordinate di Lelievre.

Se \bar{x} è un punto della superficie, $\bar{\xi}$ il relativo piano tangente, un punto x' ed un piano ξ' , dello spazio, hanno coordinate (omogenee) che si possono scrivere:

$$x' = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x}_u + \nu \bar{x}_v + \rho \bar{x}_{uv},$$

$$\xi' = \lambda_1 \bar{\xi} + \mu_1 \bar{\xi}_u + \nu_1 \bar{\xi}_v + \rho_1 \bar{\xi}_{uv}.$$

(1) Presentata all'Accademia il 7 luglio 1926.

(2) Per le definizioni e proprietà riportate in questo numero, noi rimandiamo il lettore al trattato di FUBINI e ČECH: *Geometria proiettiva differenziale*, vol. I (Zanichelli, Bologna), e così pure per le notazioni usate nel presente lavoro.

Se in queste formule si pone $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1, \nu = \nu_1$ e $\rho = \rho_1$, nasce una correlazione nello spazio, la quale non è altro che la polarità rispetto alla quadrica di Lie relativa al punto x .

3. Andiamo, intanto, a vedere in quale relazione si trovano, nella polarità di Lie, il piano tangente alla superficie S ed il suo polo, la normale e la sua reciproca.

Sia x un punto di S e ξ il piano tangente: la normale è la retta che unisce il punto x col punto $x + x_{uv} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x_v$ ⁽¹⁾. Ora, i due piani $\xi_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \xi$, $\xi_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \xi$ appartengono al fascio avente per sostegno la normale in x alla superficie, poichè per note relazioni risulta ⁽²⁾:

$$\begin{aligned} S \left(\xi_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \xi \right) \cdot x &= 0, \quad S \left(\xi_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \xi \right) \cdot x = 0 \\ S \left(\xi_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \xi \right) \cdot \left(x + x_{uv} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x_v \right) &= 0 \\ S \left(\xi_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \xi \right) \cdot \left(x + x_{uv} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x_v \right) &= 0. \end{aligned}$$

A tali due piani corrispondono, nella polarità di Lie, i due punti $x_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x$ e $x_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x$ (n. 2), delle tangenti alle linee asintotiche, uscenti dal punto x della superficie e che individuano la retta reciproca della normale.

Si conclude dunque: *Nella polarità di Lie, il polo del piano tangente alla superficie è situato sopra la normale uscente dal punto di contatto; la normale ha come retta reciproca la retta del piano tangente determinata dai due punti di coordinate (cartesiane ortogonali):*

$$(I) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{x_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x}{-\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}, & y_1 &= \frac{y_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} y}{-\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}, & z_1 &= \frac{z_u - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} z}{-\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}; \\ x_2 &= \frac{x_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x}{-\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}, & y_2 &= \frac{y_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} y}{-\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}, & z_2 &= \frac{z_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} z}{-\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}. \end{aligned} \right.$$

(1) I simboli di Christoffel sono relativi all'elemento lineare di Gauss della superficie. Questo punto non è che il punto $x + D'X$, che soddisfa bene all'equazione della normale.

(2) Cfr. FUBINI e ČECH, op. cit., pp. 68 e 93.

4. La retta reciproca della normale ad una superficie, nella polarità di Lie, si dirà *la seconda normale* alla superficie.

La normale e la seconda normale ad una superficie sono dunque rette ortogonali tra di loro.

La totalità delle seconde normali ad una superficie costituisce una congruenza rettilinea, che sarà detta la *congruenza delle seconde normali*.

5. Dalle formule (1) discendono, intanto, le seguenti notevoli proprietà.

Le linee u, v essendo le asintotiche, sarà:

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v},$$

ove $-\frac{1}{\rho^2} = K(u, v)$ rappresenta la curvatura totale di Gauss; e, perciò, risulta il teorema, già segnalato dal prof. Fubini:

Le superficie a curvatura totale di Gauss costante sono quelle e quelle soltanto, in cui la seconda normale è all'infinito, cioè quelle in cui la normale passa per il centro della quadrica di Lie:

Supposto ora $K(u, v) = \text{cost}$, consideriamo le linee di ugual curvatura della superficie. Se ne deduce:

$$x_1 - x_2 = \frac{x_v}{\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}} - \frac{x_u}{\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}}$$

e

$$\frac{d \log \rho}{du} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \rho}{\partial v} \frac{dv}{du} = 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{dv}{du} = 0,$$

onde

$$x_1 - x_2 = - \frac{1}{\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}} \left[x_u + x_v \frac{dv}{du} \right].$$

Quindi risulterà:

$$(2) \quad x_1 - x_2 = - \frac{1}{\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}} \cdot \frac{dx}{du},$$

ed analogamente per $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$. Ora, poichè queste differenze e $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ non sono altro, a meno di due fattori di proporzionalità, che rispettivamente i coseni di direzione della seconda normale e della tangente alle linee di ugual curvatura, la (2) e le sue analoghe, ci offrono il teorema:

Le tangenti ad una linea di ugual curvatura di una superficie, sono parallele alle seconde normali, corrispondenti alle normali i cui piedi si trovano sopra tale linea.

Questo teorema si può considerare vero anche se $K(u, v) = \text{cost}$ (e le linee di ugual curvatura sono perciò indeterminate) perchè in tal caso la seconda normale è all'infinito e si può perciò considerare come parallela ad ogni retta complanare.

6. Alle sviluppabili della congruenza delle seconde normali corrispondano, sopra la superficie, un doppio sistema di linee: tali linee saranno dette le *seconde linee di curvatura della superficie*.

Ora, poichè l'espressione:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} du + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} dv,$$

è un differenziale esatto, un teorema del prof. Fubini⁽¹⁾ ci permette di enunciare il risultato:

Le seconde linee di curvatura di una superficie costituiscono un sistema coniugato; od in altre parole: la congruenza delle seconde normali è una congruenza armonica.

Consideriamo i due punti x_1 ed x_2 della seconda normale (in coordinate omogenee) (n. 3) ed il punto:

$$(3) \quad x_u = \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} x + r \left[x_v - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x \right]$$

sia un fuoco: seguendo uno studio generale del Fubini⁽²⁾ si trova l'equazione differenziale delle seconde linee di curvatura, in linee coordinate asintotiche:

$$(4) \quad \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}^2 - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}{\partial u} \right] du^2 - \\ - \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}^2 - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}{\partial v} \right] dv^2 = 0$$

ed inoltre: $r = -\frac{dv}{du}$.

Ciò basta, nel caso attuale, per scrivere, senza ulteriori calcoli, le coordinate dei fuochi della congruenza delle seconde normali. Per questo basterà sostituire nella (3) ed analoghe ad r i valori $\frac{dv}{du}$ e $-\frac{dv}{du}$ pensati dati dalla (4), ciò che dà:

(1) Cfr. FUBINI e ČECH: op. cit., p. 146.

(2) Cfr. FUBINI e ČECH: op. cit., pp. 144-145.

per un primo fuoco, le coordinate (omogenee):

$$\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{x}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \left[\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{x}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} \right] \frac{dv}{du},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{y}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \left[\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{y}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} \right] \frac{dv}{du}, \dots;$$

e per il secondo fuoco:

$$\frac{dx}{du} - \frac{x}{2} \frac{d \log \rho}{du}, \quad \frac{dy}{du} - \frac{y}{2} \frac{d \log \rho}{du}, \dots$$

Si può osservare che le coordinate di questo secondo fuoco si possono avere sotto forma intrinseca, introducendo l'arco s della relativa seconda linea di curvatura. Risulterà dunque:

$$\frac{dx}{ds} - \frac{x}{2} \frac{d \log \rho}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} - \frac{y}{2} \frac{d \log \rho}{ds}, \dots$$

Meccanica. — *Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica.* Nota di HARRY LEVY⁽¹⁾, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Memoria, la quale sarà pubblicata prossimamente negli « Annali di Matematica », consideriamo i moti einsteiniani di materia disgregata cioè (col linguaggio ordinario) soggetta unicamente all'attrazione mutua delle particelle che la costituiscono. Supponiamo in particolare che il sistema sia dotato di simmetria attorno ad un centro; la densità e la velocità della materia nel posto e nell'istante considerati sono quindi funzioni soltanto del tempo e della distanza dal centro.

Troviamo che le dieci equazioni fondamentali di Einstein si possono ridurre a quattro; per mezzo di una si può definire esplicitamente la densità come funzione delle altre incognite. Resta pertanto da considerare un sistema di tre equazioni in cui figurano tre funzioni incognite (di due variabili) e le loro derivate parziali prime e seconde. Ovviamente l'integrale generale di un tal sistema contiene funzioni arbitrarie, e noi riusciamo a trovarne alcune soluzioni particolari.

Se scriviamo (com'è sempre lecito) il ds^2 quaternario sotto la forma

$$(1) \quad ds^2 = V^2 dx_0^2 - H^2 dx_1^2 - U^2 (dx_2^2 + \text{sen}^2 x_2 dx_3^2)$$

(1) « National Research Fellow in Mathematics » (U. S. A.).

(2) Nella seduta del 20 giugno 1926.

dove le linee $dx_0 = 0$ sono le linee orarie, troviamo che la soluzione più generale per la quale U dipende dalla sola x_0 (tempo) è riducibile alla forma

$$(2) \quad \begin{cases} ds^2 = 4 A^2 \cos^4 (x_0 + c) dx_0^2 - \tan^2 (x_0 + c) dx_1^2 \\ \quad - A^2 \cos^4 (x_0 + c) (dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) \end{cases}$$

dove A e c sono costanti arbitrarie. Otteniamo inoltre che la densità μ si annulla.

Se U è una funzione soltanto della x_1 , ritroviamo naturalmente la forma ben nota di Schwarzschild di spazio vuoto, ma ciò è una soluzione particolare delle equazioni einsteiniane. La soluzione generale è

$$(3) \quad \begin{cases} ds^2 = \left\{ -1 + \sqrt{\frac{x_1 - a}{x_1}} \log \beta(x_0) (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a}) \right\} dx_0^2 \\ \quad - \frac{x_1}{x_1 - a} dx_1^2 - x_1^2 (dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2). \end{cases}$$

essendo β una funzione arbitraria della x_0 . La densità μ è uguale a

$$(4) \quad \mu = \frac{1}{x_1^2 - \sqrt{x_1^3 (x_1 - a)} \log \beta (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a})}.$$

Vediamo che ogni soluzione (1) per la quale U è una funzione di una sola variabile è riducibile ad una delle tre forme (2), (3), o a quella di Schwarzschild.

Nel caso che U dipende da ambedue le variabili, x_0 ed x_1 , noi troviamo una soluzione particolare. Sia H una funzione arbitraria della sola x_1 , F della sola x_0 , ed f una costante; definiamo U implicitamente come funzione delle due variabili x_0 ed x_1 dalla equazione

$$\sqrt{2 U^2 - f U} + \frac{f}{\sqrt{2}} \cosh^{-1} \sqrt{\frac{2 U}{f}} = 2 \int H dx_1 + F(x_0)$$

e V dalla

$$V = \frac{\partial U}{\partial x_0} = \frac{F'(x_0) \sqrt{2 U^2 - f U}}{2 U}.$$

La forma (1) con questi coefficienti è una soluzione; la densità μ si annulla.

Meccanica. — *Sulla ipotesi balistica e l'effetto Doppler.* Nota di G. WATAGHIN presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Rotazione uniforme di una coppia di sottili cilindri rotondi in un liquido perfetto indefinito.* Nota di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Misure interferometriche sui quattro grandi satelliti di Giove.* Nota di M. MAGGINI, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Ancora per le ombre volanti.* Nota di V. RONCHI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Valutazione dello smorzamento nei pendoli sismografici.* Nota di ARNALDO BELLUIGI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente L. PALAZZO.

Nello studio dei pendoli sismografici non si tien conto, in generale, di quelle particolarità costruttive degli apparecchi stessi, che rendono ogni sismografo un pendolo caratteristico per le sue costanti strumentali.

Il problema dello smorzamento acquista un significato molto più complesso di quello che gli si attribuisce nella teoria classica, se si tien conto delle inevitabili particolarità sperimentali a cui i sismografi ordinari vanno soggetti. Una volta risolto, almeno sotto certi punti di vista teorici, il problema dello smorzamento lungo un grado di libertà, si tratta di analizzare

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

il moto pendolare smorzato di grandi masse (ci riferiamo a sismografi a registrazione meccanica inquantochè quelli a registrazione ottica prescindono dalle grandi masse) che hanno più gradi di libertà di movimento: studiamo qui un sistema pendolare a 2 gradi di libertà.

Si presenta subito la difficoltà di poter smorzare separatamente i moti pendolari in ambo i gradi di libertà: gli smorzatori, almeno quelli che si conoscono, sono applicabili al moto vibratorio lungo il grado di libertà delle vibrazioni principali, siano queste libere o forzate. Nè si conoscono teorie e modelli di smorzatori efficaci simultaneamente e per le vibrazioni principali, e per le vibrazioni secondarie. Nè riescono bene i sismografi a grandi masse che registrino lungo una sola direzione, in modo che le oscillazioni secondarie o di nutazione scompaiano del tutto: le sospensioni esclusivamente rigide sono soggette ad una somma di inconvenienti che qui, per brevità, non enumereremo, ma che hanno indotto giustamente il sismologo De-Quervain a costruire il suo grandioso pendolo verticale a massa cubica di 20 tonnellate (sismografo universale De-Quervain-Piccard) con sospensioni a molle confluenti in un'asta rigida incastrata in alto).

Considerato così che non è possibile un simultaneo smorzamento artificiale dei moti lungo i 2 gradi di libertà, necessita valutare lo smorzamento sotto questo nuovo punto di vista.

Le equazioni dell'accoppiamento delle vibrazioni proprie del pendolo nei 2 gradi di libertà: uno traslatorio lungo x , l'altro rotatorio φ intorno ad un asse normale al piano xz (poniamo $\varphi = y$ per comodità simbolica) sono ⁽¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + d_1 x'' &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

dove $a_1, a_2, b_1, b_2, d_1, d_2$, sono costanti caratteristiche strumentali. Se fosse anche possibile addivenire sperimentalmente alla situazione analitica seguente:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + c_1 x' + d_1 x'' &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 y' + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(le equazioni (2) rappresentano il fenomeno dell'accoppiamento di vibrazioni proprie smorzate in ambo i gradi di libertà), il problema dello smorzamento si presenterebbe sempre molto complesso per il fatto dell'accoppiamento.

Comunque le (2) non rispondono alla trascrizione reale del fenomeno pendolare in questione: occorre aggiungere la condizione $c_1 = 0$, o $c_2 = 0$,

(1) Cfr.: H. P. BERLAGE, *Untersuchung des de-Quervain-Piccard'schen Seismographen und einiger allgemeiner seismometrischer Probleme*, « Annalen der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt » (Jahrgang 1923).

e poichè solo le oscillazioni principali sono direttamente smorzabili, occorre che sia $c_2 = 0$.

In tal caso le (2) si semplificano:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + c_1 x' + d_1 x'' &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Così le (3) rappresentano le equazioni generali, valevoli per qualsiasi sismografo a grande massa, senza escludere tuttavia che per un sismografo a grande massa, con sospensioni elastiche non si possa prescindere da y , specie per piccolissime vibrazioni (agitazione microsismica e simili), e allora le (3) si riducono alla nota equazione dei moti pendolari smorzati lungo un grado di libertà.

Dalle (3) e dalle (1) ricaviamo rispettivamente:

$$y'''' + A c_1 y''' + B y'' + c_1 C y' + D y = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$x'''' + A_1 x''' + \left(B_1 + \frac{b_2}{d_2} \right) x'' + \frac{b_2}{d_2} C_1 x' + \left(\frac{b_2}{d_2} D_1 - \frac{a_1}{d_2} E_1 \right) x = 0 \dots\dots (5)$$

$$y'''' + B_2 y'' + D_2 y = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$x'''' + B_3 x'' + D_3 x = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$A, B, C, D, A_1, B_1, \dots$, sono costanti, semplici combinazioni delle costanti delle (3) e delle (1).

Senza discutere particolarmente le caratteristiche:

$$\alpha^4 + A c_1 \alpha^3 + B \alpha^2 + C c_1 \alpha + D = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\alpha_1^4 + A_1 \alpha_1^3 + \left(B_1 + \frac{b_2}{d_2} \right) \alpha_1^2 + \frac{b_2}{d_2} c_1 \alpha_1 + \left(\frac{b_2}{d_2} D_1 - \frac{a_1}{d_2} E_1 \right) = 0 \dots\dots (9)$$

inquanto la discussione è subordinata alla conoscenza dei valori reali delle costanti strumentali, possiamo tuttavia fare i seguenti rilievi:

a) per l'equazione (4): l'energia defluibile dal grado di libertà non smorzato a quello smorzato può essere, a causa dell'accoppiamento, continuamente distrutta: è possibile così un autosmorzamento di accoppiamento per il grado di libertà non smorzato.

Noi abbiamo messo in rilievo il coefficiente di smorzamento c_1 nella (4), e poichè l'integrale generale della (4) è:

$$y = M_1 e^{\alpha_1 t} + M_2 e^{\alpha_2 t} + M_3 e^{\alpha_3 t} + M_4 e^{\alpha_4 t} \dots\dots\dots (10)$$

possiamo sempre prendere c_1 in modo che delle radici reali dell'equazione (8), almeno una sia negativa (escludiamo il caso di radici tutte immaginarie, possibili, com'è noto, quando la risolvente di 3° grado del Ferrari abbia radici tutte reali):

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a} - \frac{Ac_1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{Ac_1}{2} - \sqrt{a} \right)^2 - \left(\mu - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{a} - \frac{Ac_1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{Ac_1}{2} - \sqrt{a} \right)^2 - \left(\mu + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)}$$

dove a, b, μ , hanno il significato desumibile dalla risolvente del Ferrari.

Se $\alpha_1 = \alpha_1(c_1) < 0$, allora:

$$y = M_1 e^{-\alpha_1 t} + M_2 e^{\alpha_2 t} + M_3 e^{\alpha_3 t} + M_4 e^{\alpha_4 t} \dots \dots \dots (11)$$

e l'autosmorzamento di accoppiamento appare manifesto.

b) per l'equazione (5): l'energia defluita nel grado di libertà smorzato dal grado di libertà libero, altera in quello le condizioni dello smorzamento artificiale: un caso interessante dell'alterazione è il desmorzamento. Quest'ultimo è, ovviamente, simultaneo al fenomeno (11) o al fenomeno (10). Tali fatti sono degni di rilievo se la consistenza quantitativa dell'energia attivabile nel grado di libertà non smorzato è piuttosto grande, specie rispetto all'energia relativa al grado di libertà smorzato.

Che sia possibile un dislivello rilevante di energia tra i due gradi di libertà, in modo che prevalga quella delle oscillazioni secondarie, è facile vedere analiticamente.

Consideriamo infatti l'accoppiamento delle due vibrazioni allorquando uno dei due movimenti vibratorii è forzato:

$$\begin{cases} a_1 y + b_1 x + c_1 x' + d_1 x'' = A \sin \omega t \\ a_2 x + b_2 y + c_2 y' + d_2 y'' = 0 \end{cases} \dots \dots \dots (12)$$

Ponendo:

$$x = P \sin(\omega t + \gamma) \quad , \quad y = Q \sin(\omega t + \delta) \quad , \quad c_2 = 0 \dots \dots (13)$$

e determinando P e Q in funzione dei coefficienti delle (12) e di ω (vedi formole (15) e (16)), risulta che se il periodo delle vibrazioni armoniche del suolo è identico al periodo delle vibrazioni proprie del grado di libertà non smorzato, allora:

$$P = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad Q \neq 0 \dots \dots \dots (13-bis)$$

È un caso questo di assoluta eccedenza di energia di nutazione su l'energia relativa al grado di libertà smorzato: caso limite.

Pur essendo soggetto il sistema pendolare smorzato a moti vibratorî forzati che dovrebbero essere registrati, non si ha, almeno teoricamente, nessuna registrazione di oscillazioni principali: $x = 0$. Questo fenomeno si verifica anche nel caso dell'accoppiamento corrispondente alle equazioni (1), o alle equazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} a_1 y + b_1 x + d_1 x'' &= A \sin \omega t \\ a_2 x + b_2 y + d_2 y'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} x &= P \sin(\omega t + \gamma) \quad , \quad y = Q \sin(\omega t + \delta) \\ a_1 Q \sin(\omega t + \delta) + P \sin(\omega t + \gamma) (b_1 - d_1 \omega^2) &= A \sin \omega t \\ a_2 P \sin(\omega t + \gamma) + Q \sin(\omega t + \delta) (b_2 - d_2 \omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\left. \begin{aligned} Q &= A \cdot \frac{d_2 \sin \omega t}{\sin(\omega t + \delta) [a_1 d_2 + (b^2 - \omega^2 d_2) (b_1 - \omega^2 d_1)]} \\ P &= A \cdot \frac{d_2 \sin \omega t (\omega^2 d^2 - b^2)}{a_2 \sin(\omega t + \delta) [a_1 d_2 + (b_2 - \omega^2 d_2) (b_1 - \omega^2 d_1)]} \end{aligned} \right\} \cdot (15)$$

Le P e Q corrispondenti alle (12) sono:

$$\left. \begin{aligned} P &= A \cdot \frac{b_2 - d_2 \omega^2}{\sqrt{\{-a_1 a_2 + (b_1 - d_1 \omega^2) (b_2 - d_2 \omega^2)\}^2 + c_1^2 \omega^2 (b_2 - d_2 \omega^2)^2}} \\ Q &= A \cdot \frac{-a^2}{\sqrt{\{-a_1 a_2 + (b_1 - d_1 \omega^2) (b_2 - d_2 \omega^2)\}^2 + c_1^2 \omega^2 (b_2 - d_2 \omega^2)^2}} \end{aligned} \right\} (16)$$

Per $\delta = 0$ $c_1 = 0$, le (16) = (15). Ebbene se nelle (15) poniamo: $b_2 - d_2 \omega^2 = 0$ si ha: $Q = \frac{A}{a_1}$, analogamente a ciò che si ottiene ponendo $b_2 - d_2 \omega^2 = 0$ nelle (16), e $P = 0$.

Così se il periodo delle vibrazioni armoniche del suolo, smorzate o no artificialmente, è identico a quello del grado di libertà non smorzato, o semplicemente è identico al periodo delle oscillazioni secondarie, si ha: $P = 0$, $Q \neq 0$.

In generale però mentre uno smorzamento abbastanza forte esclude qualsiasi fenomeno di risonanza nelle oscillazioni principali, risonanza che viceversa può attirarsi nelle oscillazioni secondarie, se sopprimiamo lo smorzamento, per $Q = \infty$, si ha $P = \infty$, come appare evidente ponendo nelle (15):

$$\omega^2 = \frac{1}{2 d_2 d_2} \left[d_2 b_1 \pm \sqrt{d_2^2 b_1^2 - 4 d_1 d_2 (a_1 d_2 + b_2 b_1)} \right] \dots (17)$$

Riassumendo: Poichè il sismografo risente dell'influenza reciproca dei due gradi di libertà analizzati (oscillazioni principali e oscillazioni secondarie o di nutazione), e il grado di libertà non smorzato può dar luogo, come si è visto, a forme di energia quantitativamente importanti, da quel che abbiamo detto risulta:

1° il problema dello smorzamento acquista una fisionomia tutta particolare nei pendoli a registrazione meccanica, specie se a grandi masse, sospese a collegamenti elastici o semielastici: lo smorzatore infatti non è applicabile che alle oscillazioni principali;

2° lo smorzamento delle oscillazioni principali importa, sotto date condizioni, quello delle secondarie; viceversa le libere oscillazioni secondarie implicano alterazioni nelle oscillazioni principali, tra cui il desmorzamento di queste;

3° la registrazione delle oscillazioni principali, che è la registrazione sismografica *tout court*, assumerà caratteristiche affatto diverse da una registrazione che potesse prescindere dall'influenza del grado di libertà non smorzato;

4° l'autosmorzamento di accoppiamento per le oscillazioni secondarie si converte, per quel che interessa la Sismometria, o in una riduzione del coefficiente di smorzamento, o in un'alterazione generica della registrazione. Il valore di tale alterazione è funzione della quantità d'energia defluibile dal grado di libertà libero in quello smorzato. Tale quantità di energia è particolarmente rilevante nei fenomeni di risonanza delle oscillazioni secondarie, fenomeni che possono essere concomitanti a stati di quiete delle oscillazioni principali.

Fisica. — *Sulla teoria della polarizzazione dei raggi X indipendenti.* Nota di RITA BRUNETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio ANTONIO GARBASSO ⁽²⁾.

1. C. G. Barkla ⁽³⁾ nelle sue classiche ricerche sullo stato di polarizzazione dei raggi X primari, ha trovato che essi sono parzialmente polarizzati e che la polarizzazione cresce con la loro durezza. Il risultato ha ricevuto conferma da altri autori fra cui in minuziosi lavori da E. Bassler ⁽⁴⁾ e L. Vegard ⁽⁵⁾. P. Kirkpatrick ⁽⁶⁾ ha ripreso l'argomento seguendo metodo e criteri più moderni di ricerca. Egli ha lavorato con tubo Coolidge di vetro a tensione inferiore alla critica per le radiazioni K del tungsteno che era all'anticatodo, in modo da ottenere quasi esclusivamente spettro continuo. Non si ritiene infatti che le radiazioni caratteristiche contribuiscano alla polarizzazione del fascio primario.

Le conclusioni a cui questo autore è giunto sono in breve le seguenti:

1° La polarizzazione della radiazione globale decresce col crescere della tensione applicata al tubo, cioè col crescere della velocità degli elettroni catodici.

2° A tensione costante col diminuire della lunghezza d'onda l'ammontare della polarizzazione cresce, sicchè il massimo di polarizzazione si ha al limite dello spettro continuo.

Ambedue questi risultati dipendono dal meccanismo di emissione dello spettro continuo.

Se si ammette che la sua emissione sia dovuta ad arresto brusco di elettroni dotati di velocità iniziale grande, la direzione di polarizzazione corrisponde a quella sperimentale ⁽⁷⁾ (vettore elettrico parallelo al fascio catodico); ma mentre il suo ammontare sperimentale è in media di pochi decimi, questa teoria impone una polarizzazione totale senza riguardo alla radiazione a cui appartiene.

La differenza fra teoria ed esperienza appare dunque troppo grande per essere giustificata esclusivamente invocando ovvii fenomeni perturbatori delle condizioni teoriche. In effetto è da supporre che appunto i fenomeni perturbatori (diffusione delle particelle catodiche nella materia) abbiano la parte principale nel gioco della polarizzazione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1926.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica in Arcetri.

(3) « Jahrb. d. Rad. u. El. », 5, p. 271, 1908.

(4) « Ann. d. Phys. », 28, p. 208, 1909.

(5) « Proc. Roy. Soc. », 83, p. 379, 1910.

(6) « Phys. Rev. », 22, p. 226, 1923.

(7) A. SOMMERFELD, « Phys. ZS. », 10, p. 979, 1909.

Dalle ricerche sulla diffusione dei raggi β in lamine sottili ⁽¹⁾ sappiamo che anche le particelle catodiche animate di grande velocità penetrano nell'interno dell'anticatodo, e durante questo percorso vengono deviate dalla loro traiettoria iniziale. Il meccanismo della deviazione è il medesimo, trascurando le correzioni relativistiche proprie delle grandi velocità, di quello ideato dal Rutherford ⁽²⁾ a spiegare la diffusione delle particelle α nella materia. Gli elettroni, portatisi in vicinanza dei campi nucleari, descrivono orbite iperboliche intorno a questi. Alle accelerazioni che così entrano in gioco è da attribuire l'energia irraggiata sotto forma elettromagnetica e costituente la radiazione continua o indipendente dalla natura dell'anticatodo.

La considerazione di questo meccanismo di emissione ha già servito ad H. A. Kramers ⁽³⁾ a render conto della distribuzione dell'energia nello spettro continuo dei raggi X e del loro assorbimento continuo. Noi lo riprenderemo allo scopo di esaminare se esso può dare direzione e ordine di grandezza della polarizzazione conforme ai risultati dell'esperienza.

Il procedimento che adotteremo è in sostanza il seguente: la forza elettrica a cui l'elettrone è assoggettato in presenza di un nucleo, può considerarsi come la risultante di forze che determinano oscillazioni armoniche dell'elettrone con frequenze comprese fra zero e infinito. Dal rapporto fra le intensità di queste vibrazioni per le frequenze comprese fra ν e $\nu + d\nu$ in due direzioni ortogonali del piano di osservazione, si deduce lo stato di polarizzazione in tale regione spettrale.

Le particelle catodiche nell'anticatodo supposto sottile, per escludere la diffusione multipla, si diffondono in tutte le direzioni intorno a quella iniziale della loro propagazione. Gli effetti della radiazione elettromagnetica vengono osservati ortogonalmente al fascio dei raggi catodici.

Su due assi (ν, p) perpendicolari fra loro e alla direzione dei raggi X, di cui uno (ν) parallelo alla velocità iniziale degli elettroni, le componenti della forza elettrica parallele ai raggi catodici si proiettano invariate per tutte le orbite, invece le componenti ortogonali vengono ridotte dal coseno dell'angolo formato dal piano dell'orbita con quello di osservazione.

In questo modo dunque si prevede probabile l'esistenza anche in un anticatodo sottile di polarizzazione non completa della radiazione.

2. Per ottenere risultati analitici facilmente calcolabili utilizzeremo approssimazione analoga, se non del tutto identica, a quella già usata dal Kramers, e che nei problemi da lui studiati ha dato risultati soddisfacenti.

Se chiamiamo p la distanza fra il nucleo di numero atomico Z ⁽⁴⁾ e la

(1) F. J. SCHONLAND, «Proc. Roy. Soc.», 101, p. 299, 1922.

(2) «Phil. Mag.», 21, p. 669, 1911.

(3) «Phil. Mag.», 46, p. 836, 1923.

(4) Si trascura così lo schermo che sulla carica nucleare producono gli elettroni atomici interni alla posizione a cui si porta l'elettrone catodico rispetto al nucleo, cosa che per grandi velocità risulta legittima.

traiettoria iniziale dell'elettrone mobile di velocità v e massa m , l'angolo φ che l'asintoto parallelo a v forma con l'asse principale dell'iperbola ⁽¹⁾ è

$$(1) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{mv^2 p}{Ze^2}.$$

La deviazione dell'elettrone è $\pi - 2\varphi$. Ora se la deviazione è grande, φ piccolo, l'eccentricità della conica, $\varepsilon = \frac{1}{\cos \varphi}$, in prima approssimazione è uguale a 1; l'orbita si può considerare come una parabola.

Se la deviazione è piccola le iperbole possono essere sostituite dalle loro tangenti nel vertice. Nel primo caso $\operatorname{tg} \varphi < 1$, nell'altro $\operatorname{tg} \varphi > 1$. Il valore $\operatorname{tg} \varphi = 1$ separa i due campi a cui appartengono le orbite approssimate di cui terremo conto. Qui si trova una regione di maggiore incertezza che verrà eliminata per interpolazione grafica nei calcoli numerici.

1° caso: orbite paraboliche. La forza elettrica a cui è assoggettato l'elettrone è

$$E = -\frac{Ze}{r^2}$$

ove r è il raggio vettore dall'elettrone al nucleo. Le sue componenti sui due assi ortogonali (xy) con origine nel fuoco e asse x parallelo all'asse principale della parabola sono

$$E_x = E \cos \alpha, \quad E_y = E \sin \alpha.$$

Per mezzo dell'equazione della parabola $\frac{1}{r} = \frac{1 + \cos \alpha}{p \operatorname{tg} \varphi}$ e del teorema delle aree $r^2 \frac{d\alpha}{dt} = pv$ ricaviamo, se $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \chi$,

$$t = \frac{p \operatorname{tg}^2 \varphi}{v} \frac{1}{2} \left(\chi + \frac{1}{3} \chi^3 \right),$$

mentre in funzione della stessa variabile χ troviamo

$$r = p \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{2} (1 + \chi^2), \quad \cos \alpha = \frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2}, \quad \sin \alpha = 2 \frac{\chi}{1 + \chi^2}.$$

Quindi

$$E_x = -\frac{4Ze}{p^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{1 - \chi^2}{(1 + \chi^2)^3}, \quad E_y = -\frac{8Ze}{p^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{\chi}{(1 + \chi^2)^3}.$$

(1) RUTHERFORD, loc. cit.

Se sviluppiamo queste due espressioni in serie di integrali di Fourier, le componenti sui due assi xy dell'intensità localizzata nell'onda elettromagnetica di frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$ risultano rispettivamente,

$$\left(\frac{8Ze}{pv}\right)^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \cdot \cos \left[\gamma \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{3} \zeta^3 \right) \right] d\zeta \right]^2 d\nu = \frac{16\pi^2 Z^2 e^2}{p^2 v^2} f^2(\gamma) d\nu,$$

$$\left(\frac{16Ze}{pv}\right)^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \cdot \sin \left[\gamma \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{3} \zeta^3 \right) \right] d\zeta \right]^2 d\nu = \frac{16\pi^2 Z^2 e^2}{p^2 v^2} g^2(\gamma) \cdot d\nu$$

ove

$$\gamma = \frac{2\pi}{m} \frac{Ze^2}{v^3} \nu \operatorname{tg}^3 \varphi.$$

Le funzioni $f(\gamma)$ e $g(\gamma)$ sono le $\psi(\gamma)$ e $\varphi(\gamma)$ che compaiono nel citato lavoro di Kramers.

Nelle direzioni (νp) parallela e ortogonale alla velocità iniziale degli elettroni si avrà invece

$$16\pi^2 \frac{Z^2 e^2}{p^2 v^2} [f(\gamma) \cos \varphi - g(\gamma) \sin \varphi]^2 \cdot d\nu, \quad 16\pi^2 \frac{Z^2 e^2}{p^2 v^2} [f(\gamma) \sin \varphi + g(\gamma) \cos \varphi]^2 \cdot d\nu.$$

Se il piano di osservazione forma angolo β col piano dell'orbita per la componente ortogonale alla direzione della velocità si avrà

$$16\pi^2 \frac{Z^2 e^2}{p^2 v^2} [f(\gamma) \sin \varphi + g(\gamma) \cos \varphi]^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot d\nu.$$

Quindi in media per β che varia fra 0 e 2π

$$8\pi^2 \frac{Z^2 e^2}{p^2 v^2} [f(\gamma) \sin \varphi + g(\gamma) \cos \varphi]^2 \cdot d\nu.$$

Queste sono le intensità dovute agli elettroni, la cui traiettoria iniziale è alla distanza p dal nucleo; le intensità per quelli a distanza iniziale compresa fra p e $p + dp$ si avrà moltiplicando le precedenti per $p \cdot dp$; ossia, esprimendo p in funzione di φ mediante la (1), per $\frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}$. In definitiva le intensità totali per le orbite paraboliche si avranno dai due integrali

$$I_\nu(\nu) d\nu = \frac{16\pi^2 Z^2 e^2}{v^2} \left[\int_0^{45^\circ} [f(\gamma) \cdot \cos \varphi - g(\gamma) \sin \varphi]^2 \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} \right] \cdot d\nu,$$

$$I_p(\nu) d\nu = \frac{8\pi^2 Z^2 e^2}{v^2} \left[\int_0^{45^\circ} [f(\gamma) \cdot \sin \varphi + g(\gamma) \cos \varphi]^2 \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} \right] \cdot d\nu.$$

2° caso: orbite rettilinee. Per rette tangenti al vertice dell'iperbola si trova che la distanza dal nucleo è $d = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ e la velocità nel vertice è $v_t = v \cdot \cot \frac{\varphi}{2}$. Le componenti della forza elettrica a cui è assoggettato l'elettrone nella direzione dei due assi xy , scelti come prima, sono ⁽¹⁾

$$E_x = Ze \frac{d}{(d^2 + v_t^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = -Ze \frac{v_t t}{(d^2 + v_t^2 t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

che sviluppate in serie di integrali di Fourier si presentano equivalenti alle forze elettriche di onde elettromagnetiche la cui intensità nella direzione dei due assi x e y per le frequenze comprese fra ν e $\nu + d\nu$ sono

$$16 \left(\frac{Ze}{pv} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'}{(1 + \chi'^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \gamma' \chi' d\chi' \right]^2 \cdot d\nu = 16 \pi^2 \frac{Z^2 e^2}{p^2 v^2} f'^2(\gamma'),$$

$$16 \left(\frac{Ze}{pv} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \chi'^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma' \chi' \cdot d\chi' \right]^2 \cdot d\nu = 16 \pi^2 \frac{Z^2 e^2}{p^2 v^2} g'^2(\gamma'),$$

ove $\chi' = \frac{v_t}{d} t$ e $\gamma' = 2\pi\nu \frac{Z e^2}{mv^3} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$ e le funzioni $f'(\gamma')$ e $g'(\gamma')$ corrispondono rispettivamente alle $\varphi'(\gamma)$ e $-\psi'(\gamma)$ date da Kramers. Seguendo procedimento analogo a quello del caso precedente per le intensità totali nelle direzioni parallela e ortogonale al fascio dei raggi catodici nel piano di osservazione, si trova per le frequenze comprese fra ν e $\nu + d\nu$

$$I'_\nu(\nu) d\nu = 16 \pi^2 \frac{Z^2 e^2}{v^2} \left[\int_{45^\circ}^{90^\circ} [f'(\gamma') \cos \varphi - g'(\gamma') \sin \varphi]^2 \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} \right] \cdot d\nu,$$

$$I''_\nu(\nu) d\nu = 8 \pi^2 \frac{Z^2 e^2}{v^2} \left[\int_{45^\circ}^{90^\circ} [f'(\gamma') \sin \varphi + g'(\gamma') \cos \varphi]^2 \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} \right] d\nu.$$

Il rapporto fra le componenti dell'intensità sugli assi (νp) del piano di osservazione per la radiazione di frequenza ν è

$$R(\nu) = \frac{I_p(\nu) - I'_p(\nu)}{I_\nu(\nu) + I'_\nu(\nu)},$$

e la polarizzazione

$$P(\nu) = \frac{1 - R(\nu)}{1 + R(\nu)}.$$

(1) N. BOHR, « Phil. Mag. », 25, p. 10, 1913.

3. Sono stati eseguiti calcoli numerici delle funzioni $R(\nu)$ e $P(\nu)$ per diverse frequenze ottenute a 58 KV ($\nu = 1,43 \cdot 10^{10}$ cm./sec., lunghezza d'onda limite dello spettro continuo circa a 0.21 Å) con anticatodo di tungsteno ($Z = 74$).

La approssimazione di cui si è fatto uso, come già è stato detto, cade fortemente in difetto nella regione prossima a 45° ; perciò numeratore e denominatore della $R(\nu)$ si sono ottenuti raccordando graficamente le due serie di valori calcolati per determinare le funzioni $I_p(\nu)$, $I'_p(\nu)$ e $I_\nu(\nu)$, $I'_\nu(\nu)$ negli intervalli in cui l'approssimazione è migliore.

Le rappresentazioni grafiche delle funzioni $R(\nu)$ e $P(\nu)$ ci dicono che la polarizzazione è massima al limite dello spettro continuo e decresce per lunghezze d'onda maggiori. Abbiamo già segnalato che questo è pure il risultato sperimentale.

È da aspettare che l'ammontare teorico della polarizzazione sia superiore a quello sperimentale. Per 0.21 Å si ha dal calcolo $P(\nu) = 0.5$, mentre extrapolando i risultati di Kirkpatrick risulta al massimo $P(\nu) = 0.2$. La minor polarizzazione sperimentale dipende per le radiazioni lontane dal limite dello spettro dalla diffusione multipla che ha luogo in un anticatodo di forte spessore; e per tutte le radiazioni ha origine da incertezze portate dal dispositivo sperimentale.

Il valore di $P(\nu)$ per la radiazione a 0.5 Å ottenuta alla tensione di 25 KV, è superiore a quello ottenuto a 58 KV. Nella nostra teoria lo stato di polarizzazione di una radiazione dipende dunque dalla velocità degli elettroni che la generano. Si può quindi spiegare il risultato ottenuto da Kirkpatrick, che la polarizzazione della radiazione globale dal tubo decresce col crescere della tensione, anche senza tener conto della variazione di distribuzione dell'energia spettrale al variare della tensione.

Chimica. — *Sugli ossidi e idrati del cobalto: struttura cristallina dell'ossido e dell'idrato cobaltosi.* Nota di G. NATTA e A. REINA presentata ⁽¹⁾ dal socio G. BRUNI.

La questione tanto dibattuta dell'esistenza di alcuni ossidi di nichel, collegata d'altro lato al problema dell'esistenza del nichel trivalente o tetravalente, e la particolare posizione del cobalto, tra il ferro e questo elemento, ci indussero ad iniziare lo studio degli ossidi del cobalto, valendoci dei metodi di analisi röntgenografica. Spesso l'analisi chimica solita e la determinazione di proprietà fisiche, come densità, ecc., si dimostrano insufficienti nello stabilire l'esistenza di sottossidi e di ossidi non corrispondenti

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

alla valenza normale del metallo; più di una volta nella miscela di ossidi, tra di loro o col metallo, aventi casualmente composizioni particolari, si credette di scoprire ossidi intermedi. In questo campo i metodi di analisi röntgenografica possono indubbiamente essere di grande aiuto al chimico, come lo attestano recenti lavori.

Se esaminiamo la abbondante ma incerta letteratura degli ossidi di cobalto e di nichel, si osserva come per tutti e due i metalli vari sperimentatori credettero di individuare ossidi del tipo Me_2O , MeO , Me_3O_4 , Me_2O_3 , e per il nichel l'ossido NiO_2 . Ma, specialmente per gli ossidi di nichel, contraddittori sono i pareri dei vari sperimentatori.

Con l'esame röntgenografico il prof. G. R. Levi ⁽¹⁾ dimostrò l'inesistenza del sottossido di nichel Ni_2O , miscela di ossido e di metallo, e recenti lavori ⁽²⁾ coi raggi X pare accertino che esista solo l'ossido NiO cristallino e forse il NiO_2 amorfo. Queste conclusioni sarebbero in accordo con i risultati di Bellucci ⁽³⁾, che, partendo da considerazioni puramente chimiche, dimostrò che esistono solamente l'ossido NiO ed il perossido NiO_2 , mentre i prodotti di composizione intermedia non rappresenterebbero altro che miscele provenienti da una decomposizione più o meno completa del perossido, per sè poco stabile.

La struttura cristallina degli ossidi di cobalto non è stata sinora studiata. Solo recentemente Hedwall ⁽⁴⁾ esaminò, ma in modo del tutto incompleto, gli ossidi CoO e Co_3O_4 con i raggi X e con il metodo di Debye; ma tale autore si arrestò alla semplice lettura della posizione delle linee nei fotogrammi, non solo non indagò sulla disposizione atomica, ma neppure determinò il sistema cristallino a cui tali ossidi appartengono: non mi risulta poi che abbia controllato con analisi i prodotti esaminati.

Se si pensa che un prodotto che abbiamo ricevuto da una delle principali ditte estere di prodotti chimici, e precisamente l'ossido cobaltoso di Kahlbaum, puro per analisi, diede all'esame coi raggi X un complesso di linee non ordinabili, tra le quali non figurava che debole qualcuna del CoO , si comprende come non sia indifferente accertarsi della composizione di un prodotto in esame.

Noi abbiamo preparato, sia con i metodi descritti dalla letteratura, sia con altri metodi, i vari ossidi di cobalto e di ogni prodotto abbiamo controllato la composizione con l'analisi chimica.

Dell'ossido e dell'idrato di cobalto bivalente riferiamo in questa prima Nota, dell'ossido salino e degli ossidi e idrati del cobalto trivalente in altre.

(1) G. R. LEVI e G. TACCHINI, «Gazzetta Chim. Ital.», 55, 1°, 28.

(2) G. L. CLARK, W. C. ASBURY e R. M. WICK, «Journ. Am. Chem. Soc.», 47, (1925), 2661.

(3) I. BELLUCCI ed E. CLAVARI, «Gazzetta Chim. Ital.», 14, 2°, 234.

(4) «Zeitschr. für anorg. Chem.», 120, 327 (1922).

Però sin d'ora facciamo notare come tutt'altro che semplice si presenti la preparazione dell'ossido cobaltico, e come molti prodotti, descritti come tali, ed all'analisi risultanti di composizione vicinissima al Co_2O_3 , non siano che miscele ad alto tenore di Co_3O_4 , le cui linee sole si ritrovano nei fotogrammi.

Ossido cobaltoso. Avendo riscontrato estremamente impuri i prodotti del commercio, abbiamo preparato tale ossido per riscaldamento dell'idrato cobaltoso a 200° in corrente di azoto. L'idrato usato era stato preparato pure da noi ed in precedenza analizzato e fotografato (vedi in seguito). Dall'analisi di tale ossido eseguita determinando il cobalto come cobalto metallico, si ottenne una percentuale di Co del 78.11 (teorica calcolata per il CoO: 78.66).

L'ossido cobaltoso fu fotografato con il solito metodo delle polveri, impiegando la radiazione emessa da un tubo Coolidge ad elettroni ad anticatodo di nichel sotto una tensione di 35 KV.

Le linee del fotogramma, estremamente semplice, si ordinano bene nel sistema monometrico e per una struttura a faccie centrate, tipo cloruro di sodio. Le intensità calcolate per tale ipotesi si accordano bene con quelle osservate come risulta dalla seguente tabella.

TABELLA I. - CoO - *Anticatodo di nichel.*

	λ	$\sin \theta/2$	d	a	I. oss.	I. calcolata
111	α	0.3447	2.402	4.165	f	162
002	α	0.3969	2.087	4.174	ff	467
220	α	0.5592	1.481	4.190	ff	403
113	α	0.6543	1.266	4.200	mf	109
222	α	0.6837	1.212	4.200	f	182
331	α	0.8573	0.967	4.215	mf	108
204	α	0.8810	0.940	4.205	ff	760
224	α	0.9586	0.864	4.235	fff	1195

Come lato della cella elementare contenente 4 molecole risulta a 4,22 Å. È fortissima l'analogia cristallografica tra l'ossido di cobalto e quello di nichel, pure cubico, come risulta dalle dimensioni delle due celle che differiscono per meno di 0.1 Å nella grandezza di a .

Assumendo come diametro atomico dell'ossigeno 1.30, quale risulta dagli altri ossidi, si calcola come diametro dell'ione Co^{++} 2.92 Å, valore

leggermente superiore a quello che si deduce dagli altri sali di cobalto bivalente.

Come densità si ricava, in base alle dimensioni della cella elementare, 6.62. Essendo molto discordi i valori sperimentali pubblicati sinora ⁽¹⁾ abbiamo determinato il peso specifico del prodotto preparato da noi, che, sia all'analisi chimica che a quella röntgenografica, appariva sufficientemente puro, ed abbiamo ottenuto sperimentalmente valori in accordo, entro i limiti di osservazione, col valore precedentemente calcolato.

Idrato cobaltoso. — L'esame mediante i raggi X di questo idrato era già stato annunciato da uno di noi ⁽²⁾ in un precedente lavoro sugli idrati di cadmio e di nichel. Fu fotografato dapprima, col metodo delle polveri, il prodotto ottenuto per precipitazione da una soluzione bollente di cloruro di cobalto con una soluzione calda diluita di idrato sodico, lavato con acqua, alcool ed etere e seccato in stufa a 80° in corrente di azoto. In queste condizioni non si ha ossidazione apprezzabile durante l'essiccamento e si ottengono dall'analisi valori vicini al teorico. Le linee del fotogramma, ottenuto con un tubo Coolidge ad elettroni ad anticatodo di nichel, si ordinano bene nel sistema romboedrico: la migliore concordanza nei valori calcolati del lato a della cella (rappresentata secondo gli assi del sistema esagonale) si ha per un rapporto assiale c/a 1.46.

Nella seguente tabella sono calcolate le distanze reticolari d delle singole faccie di indici h, k, l , il seno dell'angolo di riflessione, il lato a della cella elementare, le intensità osservate e quelle calcolate in base ad una ipotesi di struttura, analoga a quella calcolata per gli idrati di nichel e di cadmio e definita dalle seguenti coordinate degli atomi di cobalto e di ossigeno: Co: (0, 0, 0); O: ($2/3$, $1/3$, u), ($1/3$, $2/3$, $-u$) per i valori di u : $1/3$ ed $1/4$.

Il parametro u che definisce la posizione dell'atomo di ossigeno non si può determinare con esattezza; forse il miglior accordo con le intensità osservate lo si avrebbe per un valore intermedio tra $1/3$ ed $1/4$: mentre, come già si disse per l'idrato di nichel, il valore $1/3$ è quello che permette nella cella elementare l'assestamento più regolare degli atomi, se si ammette che questi abbiano le dimensioni determinate dai diametri atomici, che si calcolano da quei composti che sono noti con sicurezza.

Nella figura è rappresentato il romboedro elementare contenente 3 molecole $\text{Co}(\text{OH})_2$, inscritto nel prisma esagono di lato a ed altezza $3c$. Per il lato della cella elementare troviamo una lunghezza di 3.19 Å, valore abbastanza vicino a quello, determinato da uno di noi, dell'idrato di nichel.

(1) PLAYFAIR e JOULE, «Chem. Soc. Mem.», 2 (1845) 401; 3 (1848) 45, trovarono una densità di 5.68; LACHAND e LEPIERRE, «Compt. Rend.», 115 (1892) 115; «Bull. Soc. Chim.» 3 7 (1892) (600) di 6.7.

(2) G. NATTA, «Rend. R. Acc. Lincei», vol. 2° (1925), 2° sem., fasc. II.

TABELLA II. - $\text{Co}(\text{OH})_2$ - *Anticataldo di nichel.*

hkl	λ	sen $\theta/2$	d	a	I. oss.	I. calcolata per	
						u = 1/3	u = 1/4
0001	α	0.1788	4.632	3.15	f	185	514
10 $\bar{1}$ 0	α	0.2998	2.762	3.18	mf	176	176
0002	α	0.3491	2.371	3.25	fff	1294	1030
10 $\bar{1}$ 1				3.18			
10 $\bar{1}$ 2	α	0.4613	1.784	3.19	ff	668	728
11 $\bar{2}$ 0	α	0.5196	1.596	3.19	f	550	469
0003				3.26			
11 $\bar{2}$ 1	α	0.5490	1.508	3.19	mf	80	232
20 $\bar{2}$ 0	α	0.6030	1.373	3.17	dd	30	34
10 $\bar{1}$ 3	α	0.6129	1.351	3.18	mf	590	262
20 $\bar{2}$ 1	α	0.6276	1.320	3.18	mf	376	265
11 $\bar{2}$ 2				3.20			
20 $\bar{2}$ 2	α	0.6973	1.187	3.20	mf	260	288
11 $\bar{2}$ 3	α	0.7458	1.110	3.18	m	450	140
10 $\bar{1}$ 4	α	0.7793	1.062	3.19	md	260	53
12 $\bar{3}$ 0	α	0.7983	1.037	3.17	mf	100	273
20 $\bar{2}$ 3				3.20			
12 $\bar{3}$ 1	α	0.8180	1.012	3.17	f	540	445
12 $\bar{3}$ 2	α	0.8745	0.948	3.17	ff	1246	716

L'isomorfismo tra questo e l'idrato di cobalto viene anche confermato dal fatto che, precipitando contemporaneamente soluzioni di sali di nichel e di cobalto con alcali, si ottiene un prodotto che, esaminato con i raggi X, non fornisce le due serie di linee vicinissime, corrispondenti ai due idrati, ma una sola serie di linee in posizione intermedia. Anche variando entro larghi limiti la composizione delle miscele, ottenute per precipitazione, non si osserva alcun sdoppiamento nelle linee. Invece nel fotogramma ottenuto da una miscela meccanica di quantità equimolecolari dei due idrati moltissime linee compaiono nettamente sdoppiate.

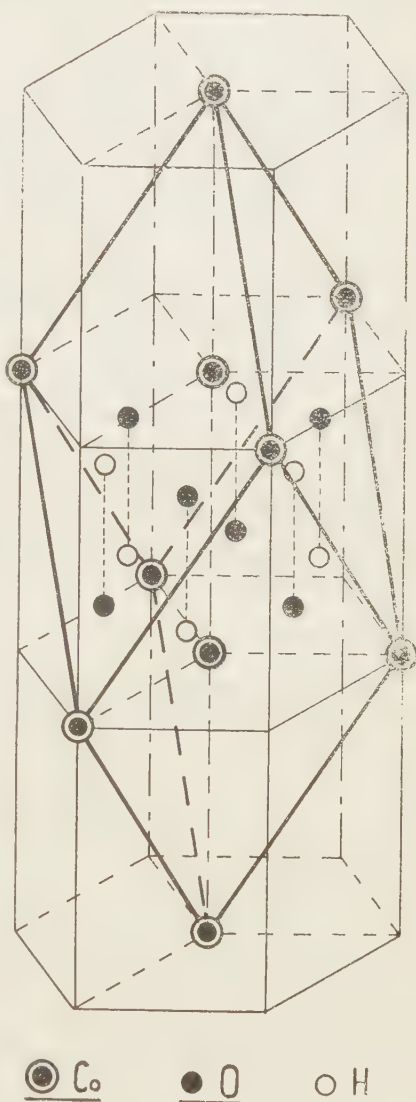
La differenza, tra la posizione delle linee del $\text{Co}(\text{OH})_2$ puro e quella del $\text{Ni}(\text{OH})_2$ puro, come si può anche prevedere dalla minima differenza nelle dimensioni delle due celle, risulta troppo piccola, per poter determinare quantitativamente la deformazione del reticolo col variare della com-

posizione della miscela. Sarebbe utile a questo scopo la lettura dei fotogrammi ottenuti con camere di grande precisione, e ci riserviamo di farlo quando disporremo di tali camere speciali.

Le nostre conclusioni sulla struttura romboedrica dell'idrato di cobalto precipitato non concordano però con i risultati ottenuti da De-Schulten con i metodi ottici cristallografici. Questo autore ⁽¹⁾ disciogliendo del cloruro di cobalto in una soluzione concentratissima calda di potassa caustica in corrente di gas illuminante e lasciando cristallizzare per raffreddamento, disse d'aver ottenuto dell'idrato cobaltoso cristallino, come polvere violetta, che al microscopio si presenta in prismi rosa, policroici, fortemente birifrangenti, biassici, cristallograficamente ortorombici. Il De-Schulten non fece però delle misure angolari e nemmeno delle osservazioni a luce convergente.

Per controllare i risultati di De-Schulten che, se fossero esatti, farebbero supporre di un dimorfismo dell'idrato cobaltoso, abbiamo anche noi preparato tale idrato seguendo dettagliatamente il metodo descritto da De-Schulten. Solo per evitare l'ossidazione durante l'operazione, abbiamo agito in corrente di idrogeno invece che di gas illuminante. Ottenemmo dei cristallini di color rosa-violaceo, che, esaminati con i raggi X, diedero un fotogramma del tutto identico a quello ottenuto con l'idrato di cobalto precipitato. Viene quindi dimostrato che sono inesatte le osservazioni di De-Schulten, e che l'idrato cobaltoso cristallino, ottenuto col metodo da questi descritto, è cristallograficamente identico a quello ottenuto per precipitazione.

Essendo i cristallini ottenuti minutissimi e irregolarmente accresciuti, l'esame ottico si presentava piuttosto difficile. Il prof. E. Artini, del Po-



(1) « Comptes Rendus » (1889) 109, 266.

litechico di Milano, che vivamente ringraziamo, volle gentilmente esaminare tali cristalli e li trovò otticamente uniassici e negativi, vi scorre pure qualche romboedro un po' acuto, talvolta con nitide faccie di base.

Dalle dimensioni della cella e dal peso molecolare, assumendo $1.66 \cdot 10^{-24}$ gr. come peso dell'atomo di idrogeno, si calcola per la densità 3.75. (Sperimentalmente De-Schulten trovò 3.597).

Conclusioni. — Mediante l'analisi röntgenografica si è dimostrato che l'ossido cobaltoso appartiene cristallograficamente al sistema monometrico ed ha una cella elementare di lato a 4.22 Å, del tipo cloruro di sodio, contenente quattro molecole. Da tale ossido si calcola per l'ione Co^{++} un diametro atomico di 2.92 Å.

Per l'idrato cobaltoso vengono dimostrate inesatte le osservazioni di De-Schulten, che lo descrisse cristallograficamente biassico e rombico. Con l'analisi coi raggi X viene dimostrato che, tanto l'idrato cobaltoso precipitato che quello cristallino ottenuto con il metodo descritto da De-Schulten, sono uniassici romboedrici e strutturalmente identici. La cella elementare, tipo brucite, contiene una sola molecola ed è definita dalle coordinate degli atomi di cobalto e di ossigeno: Co: (0, 0, 0) O: ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, u); ($\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-u$); differisce di poco dalla cella dell'idrato di nichelio, col quale l'idrato di cobalto è perfettamente isomorfo come risulta dalla seguente tabella:

Metallo	Ossido		Idrato		
	Diametro Me^{++}	a	a	c	c/a
Ni	2.84-2.90	4.14-4.20	3.07	4.61	1.50
Co	2.92	4.22	3.19	4.66	1.46

Appare nettissima l'analogia tra l'ione Co^{++} e l'ione Ni^{++} .

ERRATA CORRIGE

Nota di G. R. LEVI e G. NATTA, *Sulla struttura cristallina della perowskite* (1925, Vol. II, ser. 6^a, 2^o sem., fasc. 1^o).

A pagina 42 riga 15 si deve leggere:

$$\text{Ca } (0, 0, 0) \quad ; \quad \text{Ti } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

invece di:

$$\text{Ti } (0, 0, 0) \quad ; \quad \text{Ca } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Chimica. — *Sulla distruzione dei filtri con ossidanti alternati applicata all'analisi quantitativa.* Nota di RAOUL POGGI e ANGIOLO POLVERINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. ANGELI ⁽²⁾.

È noto come durante la determinazione ponderale di certi elementi non si possa procedere alla distruzione per incenerimento del filtro sul quale è stato raccolto un determinato precipitato senza incorrere in gravi perdite, dovute alla riduzione che il corpo da calcinare subisce per effetto dei prodotti della combustione della carta. Così nel caso dell'arsenico non si deve calcinare in crogiolo l'arseniato ammonico magnesiaco raccolto su filtro di carta per eseguirne la trasformazione a piroarseniato, in quanto che il carbone che si forma nella combustione della cellulosa del filtro ridurrebbe l'arseniato in prodotti arsenicali volatili. In tali condizioni è necessario di compiere l'essiccamento, ovvero la trasformazione del precipitato con particolari avvedutezze, come ad esempio tenerlo ad una determinata temperatura fino a che esso sia a peso costante, senza che avvenga l'eliminazione del filtro, oppure di evitare l'impiego della carta, usando invece un crogiolo di Gooch, od altri filtri speciali. Queste accortezze richiedono talvolta l'ausilio di apparecchi speciali, una continua vigilanza ed infine un tempo spesso assai rilevante.

Un metodo invece assai semplice, che abbiamo sperimentato con successo nella determinazione dell'arsenico contenuto in sostanze organiche, e del quale diamo presentemente conto, è fondato sopra l'eliminazione del filtro di carta con ossidanti alternati, effettuata prima di procedere alla calcinazione della sostanza in esso raccolta. Mentre impiegando acido nitrico, o solamente acqua ossigenata, i comuni filtri per quantitativa difficilmente possono essere del tutto demoliti, se si agisce alternativamente con alcuni centimetri cubici di acido nitrico concentrato sopra un filtro di comune grandezza, quindi con acqua ossigenata al 15 per cento in volume, e si porta a secchezza su bagno-maria bollente, dopo l'addizione di ciascuna porzione degli ossidanti si giunge alla distruzione del filtro ripetendo una sola volta il trattamento con acido nitrico e con perossido di idrogeno.

La cellulosa che costituisce il filtro, mediante l'azione ossidante ed idrolitica dell'acido nitrico e dell'acqua ossigenata, viene demolita nella sua

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

complessa molecola fino a dare acqua ed anidride carbonica, ultimi prodotti di ossidazione degli idrati di carbonio, attraverso la formazione intermedia di altri prodotti, tra i quali, secondo precedenti sperimentatori ⁽¹⁾, figurebbero l'ossicellulosa, l'acido saccarico, tartarico ed ossalico.

PROCEDIMENTO.

Il processo per la distruzione del filtro con ossidanti alternati è evidentemente di impiego generale; ci siamo però limitati ad applicarlo alla determinazione dell'arsenico costituente di sostanze organiche, che ci era di maggiore interesse per il corso dei nostri lavori.

Dopo aver ossidata ad acido arsenico la sostanza organica con acido solforico concentrato e persolfato potassico, mediante il metodo che abbiamo indicato altrove ⁽²⁾, e trasformato l'acido arsenico ottenuto in arseniato ammonico magnesiaco, questo, raccolto e lavato su filtro del diametro di centimetri nove, avente gr. 0.00098 di ceneri, si asciuga in stufa a 100°, e si porta su di un foglio di carta nera lucida, separandolo dal filtro che viene distrutto nel modo seguente.

Piegato questo alcune volte su sè stesso, si pone in crogiolo di porcellana, si addiziona con cc. 3-4 di acido nitrico (d. 1.5) e si riscalda sopra b. m. bollente fino a completa essiccazione. La polvere bianca che si ha come residuo si riprende con 5-6 cc. di acqua ossigenata al 15 per cento in volume ⁽³⁾ e si porta di nuovo su b. m. bollente fino a totale evaporazione. È bene avvertire che devesi scartare l'impiego del crogiolo di platino, che decomporrebbe troppo rapidamente il perossido d'idrogeno, causando perdite per proiezione di liquido.

Ripetendo, nelle stesse condizioni, il trattamento con acido nitrico e successivamente con acqua ossigenata si perviene alla completa distruzione del filtro.

Aggiunto nel crogiolo l'arseniato ammonico magnesiaco, conservato sopra la carta lucida, nettata accuratamente questa con una barba di penna, si eseguisce la trasformazione a piroarseniato di magnesio per mezzo della usuale calcinazione.

Le determinazioni che abbiamo compiute eliminando il filtro per via umida, e delle quali racchiudiamo i dati analitici nella seguente tabella, confermano l'esattezza del metodo descritto.

(1) BUMCKE e WOLFFENSTEIN, « Ber. », 32, 2495 (1899); FABER e TOLLENS, « Ber. », 32, 2590, 2594 (1899); BEILSTEIN, « Handb. der Org. Chem. », vol. I, p. 1074 (1893); ecc.

(2) Questi « Rendiconti », vol. III, serie 6^a (1926).

(3) Noi abbiamo usato del perhydrol Merck al 30 per cento in volume, diluito per metà con acqua distillata.

Sostanza usata	Gr. impiegati	Mg ₂ As ₂ O ₇ trovato in gr.	As % calcolato	As % trovato
Acido cacodilico.	0.3516	0.3928	54.31	53.93
Acido fenilarsinico.	0.3134	0.2412	37.11	37.10
Acido difenilarsinico.	0.3226	0.1930	28.60	28.89
Acido p-fenilfenilenarsinico. . .	0.3728	0.2004	26.96	26.73

Chimica. — *Esame röntgenografico degli idruri metallici.* -- *Idruri di rame.* Nota di ADOLFO QUILICO ⁽¹⁾ presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Sono descritti nella letteratura due idruri del rame, l'idruro rameoso Cu₂H₂, o CuH, e l'idruro rameico CuH₂, che si ottengono con svariati processi di riduzione dai sali di rame, dall'ossido CuO o dal rame metallico ⁽³⁾.

I seguenti metodi condurrebbero all'idruro rameoso:

a) Azione dell'idrogeno sul Cu arroventato ⁽⁴⁾.

b) Azione dello zinco su di una soluzione di CuSO₄ resa acida per acido solforico ⁽⁵⁾.

c) Riduzione di una soluzione di CuSO₄ con acido ipofosforoso ⁽⁶⁾.

d) Riduzione di una soluzione di CuSO₄ con idrosolfito di sodio ⁽⁷⁾.

Mentre l'idruro rameico si otterrebbe:

e) Azione dell'idrogeno sul CuO a conveniente temperatura fino a a peso costante ⁽⁸⁾.

f) Azione dell'acido ipofosforoso in eccesso sul rame o sull'ossido ⁽⁹⁾.

Nel ripetere queste preparazioni ho potuto rilevare che l'unico metodo che permetta di ottenere un prodotto contenente idrogeno in quantità facilmente percepibile, è quello c) di Würtz.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 20 giugno 1921.

(3) GMELIN KRAUT, « Anorg. Chem. », V, 1, p. 721 e seguenti.

(4) LEDUC, « Compt. Rend. », 113 (1891), p. 71.

(5) SCHOOR, « Arch. néerland. », 12, p. 96; J. B., 1877, p. 273.

(6) AD. WÜRTZ, « Compt. Rend. », 18 (1844) p. 102; M. BERTHELOT, « Compt. Rend. », 89 (1879), p. 1004.

(7) SCHÜTZENBERGER, « Compt. Rend. », 69 (1896), p. 196.

(8) BARTLETT e MERRIL, « Amer. Chem. Journ. », 1895, p. 196.

(9) BARTLETT e MERRIL, loc. cit.

I metodi *a)*, *b)*, *e)* conducono a prodotti contenenti solo tracce d'idrogeno, il *d)* fornisce una sostanza fortemente impura per solfuro rameoso, e l'*f)* dà una miscela di rame e dell'idruro di Würtz.

Le proprietà assegnate dagli autori ai prodotti ottenuti con questi procedimenti sono abbastanza discordanti tra loro, per cui è molto probabile trattarsi di sostanze affatto diverse.

Ho creduto non privo d'interesse il sottoporre all'esame röntgenografico queste sostanze nell'intento di chiarire la loro natura, e cioè per stabilire se si tratti di individui chimici con struttura cristallina propria, o di soluzioni solide di idrogeno nel metallo con conseguente deformazione del reticolo di questo (caso del preteso idruro di palladio, Pd_2H)⁽¹⁾, ecc.

A questo scopo ho fotografato col metodo delle polveri (impiegando un tubo di Hadding ad anticatodo di rame) degli esemplari dei vari prodotti preparati di fresco e con la massima cura per evitare ogni possibile alterazione, confrontando i fotogrammi ottenuti con quelli forniti da sostanze pure (Cu elettrolitico, Cu_2O , ecc.).

I fotogrammi ottenuti si possono, in base a questi confronti, dividere in quattro gruppi:

1°) Fotogrammi mostranti la formazione di rame puro, non distinguibili cioè per il numero, l'ubicazione e l'intensità delle righe da quelli forniti dal rame elettrolitico.

2°) Fotogrammi mostranti la formazione di ossido rameoso Cu_2O , coincidenti nei minimi particolari con quelli forniti dall'ossidulo di rame « Kahlbaum ».

3°) Fotogrammi nei quali compaiono contemporaneamente le righe del Cu e del Cu_2O .

4°) Fotogrammi assolutamente privi di righe o mostranti al più qualche banda sfumata.

Forniscono fotogrammi di Cu puro, l'idruro di Leduc, preparato secondo *a)* facendo passare per 2 o 3 ore al rosso scuro, una lenta corrente d'idrogeno su rame finamente diviso, e l'idruro di Bartlett e Merrill preparato secondo *e)* da CuO arroventato fino a peso costante in corrente d'idrogeno. In questa ultima esperienza, protratta per oltre 36 ore, ho ottenuto un prodotto di colore variabile dal bronzio al rosso giacinto, che, all'esame microscopico, risultò costituito da cristalli di rame di notevoli dimensioni, formatisi nella lunga permanenza del metallo al calor rosso.

Un identico fotogramma ha dato la spugna di rame ottenuta versando l'acido ipofosforoso in una soluzione bollente di CuSO_4 , e l'idruro di Schoor ottenuto secondo *b)* lasciando agire lo Zn su di una soluzione fredda di CuSO_4 acidificata con H_2SO_4 diluito.

(1) YAMADA, « Phil. Mag. », 45, p. 241 (1923); MC. HEEHAN, « Phys. Rev. », 21, p. 334 (1923).

Tutte queste sostanze non forniscono al riscaldamento che tracce minime d'idrogeno e, non presentando il fotogramma nessuna deformazione, debbono essere ritenute rame puro. Il calcolo delle dimensioni della cella fornisce ad es. per l'idruro di Leduc:

$$d = 3.58 \text{ \AA}$$

mentre per il rame si ha, secondo Bragg ⁽¹⁾:

$$d = 3.60 \text{ \AA}.$$

2. *Fornisce fotogrammi della cuprite*, l'idruro rameoso di Würtz preparato secondo le indicazioni dell'autore:

A 20 gr. di una soluzione al 50 % di acido ipofosforoso ho aggiunto 16 gr. di CuSO_4 cristallizzato, in soluzione acquosa concentrata riscaldando cautamente a bagno-maria. Il liquido limpido azzurro assume una colorazione verdastra che passa al bruno, mentre si separa l'idruro sotto forma d'un precipitato rosso bruno. Quando la temperatura si avvicina ai 60° si nota un leggero svolgimento d'idrogeno: ho raffreddato allora bruscamente con acqua ghiacciata, ho filtrato rapidamente in corrente di CO_2 lavando con acqua satura di CO_2 , seccando poi il prodotto per compressione tra carta da filtro, poi in essiccatore su KOH o H_2SO_4 . Il prodotto secco si presenta come una polvere rosso bruna che diviene più scura per lunga permanenza in essiccatore. Per riscaldamento svolge violentemente idrogeno, proprietà che perde col tempo. Si discioglie in HCl concentrato svolgendo idrogeno e dando una soluzione che è incolore in assenza d'aria.

Questo comportamento, insieme all'analisi data da Würtz, bene si accorderebbe con la formula Cu_2H_2 che è stata assegnata a questo prodotto, benchè già nel 1879 Berthelot ne avesse messo in dubbio l'esistenza in base a dati analitici e termochimici ⁽²⁾, ritenendolo una specie di fosfato molto basico di rame. Ho determinato il contenuto in idrogeno di questa sostanza in due modi, e cioè riscaldamento in corrente di CO_2 e trattamento con HCl concentrato, raccogliendo in ogni caso il gas svolto in un azotometro su KOH . Secondo le equazioni:



il 2° metodo dovrebbe fornire il doppio dell'idrogeno che si ottiene col 1°. I risultati ottenuti in numerosissime esperienze (oltre 25) sono stati molto

(1) W. L. BRAGG, « Phil. Mag. », 28, p. 355 (1914).

(2) BERTHELOT, « Compt. Rend. », (1879), p. 1004 e replica di A. WÜRTZ, « Compt. Rend. », (1880), p. 22.

variabili per i diversi esemplari e il contenuto in idrogeno non ha mai raggiunto i valori trovati da Würtz ($1.21 \div 1.22$ %, teorico 1.55 %) variando da un massimo di 0.94 % ad un minimo di 0.32 % d'accordo con i risultati ottenuti da altri autori⁽¹⁾. Il prodotto contiene poi sempre dell'acqua anche dopo prolungata permanenza in essiccatore a potassa; il contenuto in rame varia entro limiti poco ampi ($83.9 \div 84.06$). I fotogrammi forniti da questa sostanza coincidono perfettamente con quello della cuprite, come appare dalla tabella che contiene nella prima colonna le intensità osservate, nella seconda gli Θ osservati e nella terza le intensità fotometrate con un microfotometro di Kipp-Zonen.

Il calcolo delle dimensioni della cella fornisce:

$$a = 4.22 \text{ \AA}$$

mentre per la cuprite si ha, secondo Niggli⁽²⁾:

$$a = 4.26 \text{ \AA}.$$

Riscaldando cautamente nel vuoto (0.05 mm. Hg) l'idruro di Würtz, questo si decompone tra i $100^\circ \div 120^\circ$ svolgendo idrogeno in una serie di piccole esplosioni, lasciando un residuo intensamente colorato in nero contenente l' 87.66 % di Cu (la cuprite contiene l' 88.8 % di Cu), che fornisce ancora l'identico fotogramma della cuprite.

In qualche caso il prodotto del riscaldamento non era omogeneo e mostrava qualche particella rossa di Cu che restava indisciolta per trattamento con HCl concentrato, e il fotogramma mostrava anche deboli righe del Cu.

Trattando l'idruro di Würtz con acqua bollente per qualche tempo, con che si svolge idrogeno, filtrando e seccando, ho ottenuto un prodotto che si discioglie quasi completamente in HCl concentrato e che fornisce fotogrammi mostranti le righe della cuprite.

In alcuni casi il prodotto della decomposizione contiene rame, come è dimostrato dalla parziale solubilità in HCl e dalla comparsa di deboli righe del rame.

3. *Fotogrammi mostranti le righe del Cu_2O e del Cu.* Dà un simile fotogramma l'idruro rameico di Bartlett e Merrill, preparato secondo f) riscaldando a bagno-maria la miscela della soluzione di CuSO_4 , e di un eccesso di acido ipofosforoso fino a comparsa del precipitato e lasciando agire su di esso, fino a cessazione dello sviluppo d'idrogeno, l'eccesso di H_3PO_2 , filtrando, trattando con acqua bollente per mezz'ora, filtrando e seccando a bagno d'aria a 60° .

(1) BERTHELOT, loc. cit.; VAN DER BURG, «Maandbl. Nat.», 7, p. 102 (1877).

(2) P. NIGGLI, «Zeitschr. f. Kryst.», 57, p. .

possa far pensare ad un composto, la variabilità della composizione e il fatto che la sostanza non fornisce righe, rendono più verosimile trattarsi di rame amorfo occludente dell'idrogeno.

Le conclusioni che si possono più logicamente trarre dal complesso dei fatti osservati sono:

a) I prodotti descritti come idruri da Leduc, Schoor, Bartlett e Merrill (riduzione di CuO con idrogeno) debbono essere ritenuti rame metallico puro, od occludente dell'idrogeno in quantità così piccola da non modificare in modo apprezzabile il reticolo del rame.

b) Nella reazione tra acido ipofosforoso e solfato di rame si formano prodotti di composizione e proprietà variabili a seconda delle condizioni in cui si opera e cioè:

1) Operando a bassa temperatura ($t < 40^\circ$) evitando ogni svolgimento di idrogeno, si ottiene una sostanza nera che per riscaldamento o percussione fornisce esclusivamente rame metallico. La variabilità del suo contenuto in idrogeno ed il suo comportamento fanno ritenere trattarsi di una modificazione amorfa del rame occludente idrogeno.

2) Operando nelle condizioni specificate da Würtz ($t < 70^\circ$) si ottiene una sostanza rosso-bruna contenente quantità variabili d'idrogeno che per riscaldamento fornisce Cu_2O mista qualche volta a poco rame, e che si deve interpretare come Cu_2O occludente idrogeno in notevole quantità, mescolato a piccole quantità del prodotto amorfo precedentemente descritto, come è confermato dal suo comportamento al riscaldamento ed al trattamento con acqua bollente.

3) Operando all'ebollizione si ottengono sostanze la cui composizione va dal Cu puro ad una miscela di Cu_2O e Cu, a seconda della rapidità con cui si eseguisce la reazione.

Ho in esame gli idruri solidi dell'As, Sb e Bi.

Chimica. — *Calori di mescolanza dell'acqua con acido acetico e con alcool isopropilico.* Nota di C. SANDONNINI⁽¹⁾, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In un precedente lavoro⁽³⁾ furono determinati i calori di soluzione di alcune sostanze nell'acqua sola ed in miscele di liquidi organici con l'acqua, che si formano con sviluppo di calore, nonchè i calori di mescolanza degli stessi liquidi con soluzioni acquose delle suddette sostanze, e si sono potute trarre notevoli considerazioni sulla possibilità della separazione di due fasi liquide per aggiunta di sali alla mescolanza di due liquidi. A conforto delle considerazioni precedentemente svolte, presentava interesse la determinazione dei calori di soluzione delle stesse sostanze in miscele di liquidi, che si formano con assorbimento di calore.

Mentre sono state studiate sistematicamente le miscele di molti liquidi che si mescolano coll'acqua svolgendo calore, non si hanno che poche misure isolate per miscele che si formano con assorbimento di calore e che per le proprietà solventi dei singoli componenti possano servire a questo genere di ricerche. Si rese così necessaria la ricerca e lo studio di alcune miscele di questo tipo.

Dopo molte esperienze preliminari, guidato dalle determinazioni già fatte, mi sono dovuto limitare alle miscele dell'acqua con l'acido acetico e con l'alcool isopropilico, lasciando per ora da parte le miscele tra liquidi diversi dall'acqua, anche per avere dei dati direttamente confrontabili con quelli delle esperienze precedenti.

La prima coppia di liquidi su citata fu scelta perchè anche dalle ricerche di Bussy e Buignet⁽⁴⁾ si può dedurre che la mescolanza dei due liquidi a temperatura ordinaria avviene con assorbimento di calore per un campo assai vasto di concentrazione, la seconda perchè parve interessante conoscere il comportamento dell'alcool isopropilico in confronto di quello dell'alcool propilico già studiato da E. Bose e da M. Bose⁽⁵⁾.

I calori di mescolanza vennero determinati col solito dispositivo analogo a quello per la determinazione dei calori di neutralizzazione. Il vaso calorimetrico era costituito da un Dewar a foggia di bicchiere ed avente le pareti argentate, espressamente costruito.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 20 giugno 1926.

(3) SANDONNINI e GEROSA, «Gazz. Chim. It.», 55, 916 (1923).

(4) «Compt. Rend.», 59, 672 (1864); 64, 330 (1867).

(5) «Zeit. physik. Chem.», 58, 585 (1907).

Acqua - Acido Acetico — L'acido acetico usato venne purificato per cristallizzazione frazionata sino ad ottenere cristalli con un punto di fusione di 16.6°. Per il calcolo dei calori di mescolanza vennero usati valori dei calori specifici interpolati da quelli determinati da V. Reiss ⁽¹⁾.

TABELLA I.

Calori di mescolanza acqua-acido acetico

(a 16° - 18°)

(Equiv. in acqua del calorimetro 10.00)

Percento acido acetico	Peso della miscela	Variazione di temperatura	Calore specifico	Calorie totali	Calorie per 100 grammi
3.38	75.56	+ 0.172	0.996	+ 14.4	+ 19.3
7.47	103.04	+ 0.338	0.986	+ 37.7	+ 36.6
14.39	82.02	+ 0.451	0.952	+ 39.7	+ 48.4
21.13	63.67	+ 0.506	0.922	+ 34.7	+ 47.5
29.69	103.29	+ 0.180	0.880	+ 18.1	+ 17.5
34.02	99.83	+ 0.050	0.845	+ 4.7	+ 4.7
46.48	92.25	— 0.795	0.795	— 66.2	— 71.7
50.03	58.63	— 0.979	0.777	— 54.3	— 92.7
64.86	117.25	— 1.790	0.708	— 166.7	— 142.1
69.39	77.04	— 2.241	0.687	— 141.0	— 183.0
79.42	79.74	— 2.177	0.633	— 152.4	— 192.4
94.31	67.12	— 2.173	0.532	— 99.3	— 147.9
97.03	79.48	— 1.302	0.520	— 66.8	— 84.1

Dai valori raccolti nella 1^a tabella e dal diagramma 1° risulta che tutte le miscele fatte a temperatura ordinaria (15° - 18°) sino al 32 per cento circa di acido acetico si formano sviluppando calore, mentre a concentrazioni superiori di acido si formano con assorbimento, cosicchè la curva dei calori di mescolanza ha un massimo che giace circa al 20 per cento in peso di acido (5,42 mol. per cento) ed un minimo a circa 80 per cento in peso (54,6 mol. per cento). La posizione di questo minimo e di questo massimo, come lo dimostrano esperienze ancora in corso, variano col variare della temperatura alla quale avviene la mescolanza, come

(1) « Jahresb. », 1880, 91.

pure variano colla temperatura anche gli intervalli di concentrazione per i quali si ha assorbimento o sviluppo di calore, e precisamente, col diminuire

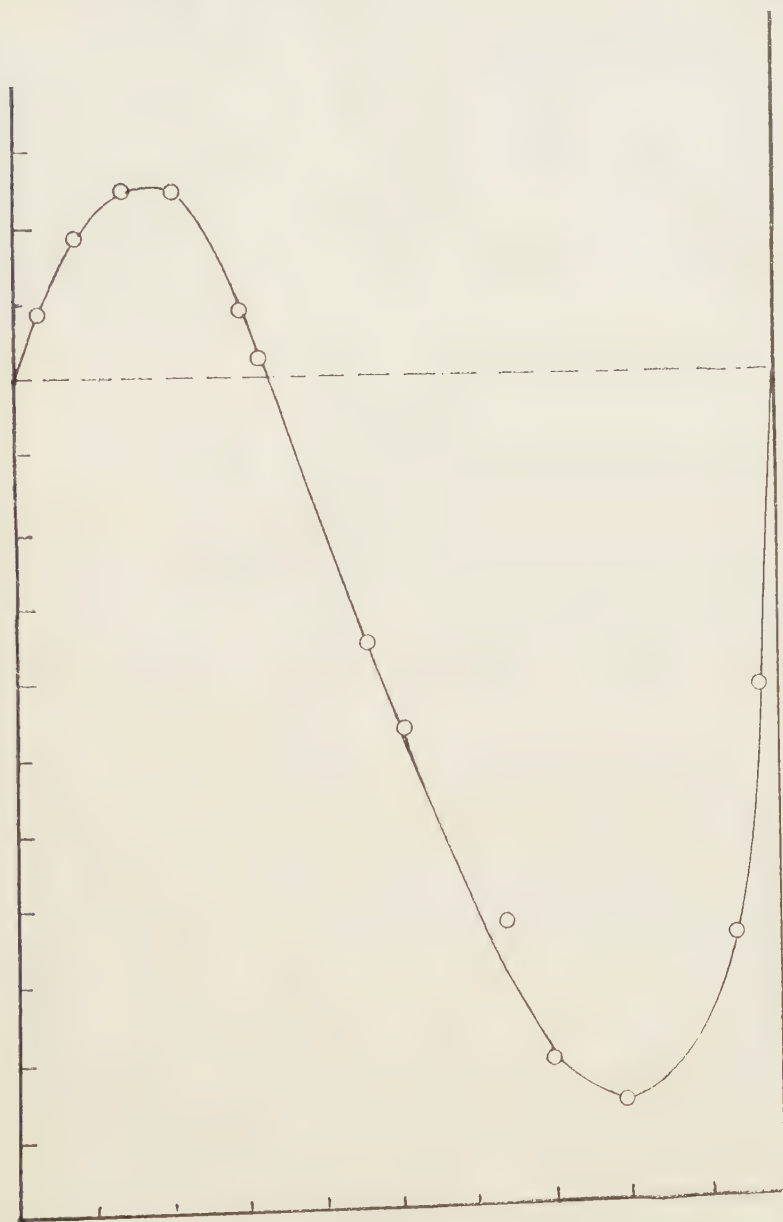


Diagramma I.

della temperatura il massimo si innalza ed il campo delle concentrazioni per le quali si ha sviluppo di calore si allarga, mentre si restringe quello nel quale si ha assorbimento, ed il minimo si innalza. Coll'aumentare della temperatura avvengono i fenomeni opposti.

Acqua - Alcool isopropilico. — L'alcool usato in queste esperienze era stato purificato per distillazione e dissecato su carbonato di potassio. Venne usata la frazione con punto di ebollizione 82° - 83°.

Per il calcolo dei calori di mescolanza si dovette anzitutto procedere alla determinazione dei calori specifici delle varie miscele, che non erano noti. Questi vennero determinati col solito metodo di Marignac. Come per le miscele di acqua con molti altri alcool, i calori specifici trovati sono sempre superiori a quelli calcolati colla regola dei miscugli, ed anzi la curva che si può costruire coi valori ottenuti e raccolti nella tabella 2^a, passa per un massimo, che giace circa al 25 % in peso di alcool, ovverosia ad una concentrazione corrispondente a 10 mol. di acqua per una di alcool.

TABELLA II.

Calori di mescolanza acqua-alcool isopropilico

(a 16° - 18°)

(Equiv. in acqua del calorimetro 14.01)

Percento alcool	Peso della miscela	Variazione di temperatura	Calore specifico	Calorie totali	Calorie per 100 grammi
5.0	199.80	+ 2.751	1.012	600.0	351.0
10.00	185.77	+ 5.040	1.025	1030.5	557.1
15.00	141.60	+ 6.521	1.037	1133.8	735.1
25.00	160.72	+ 7.631	1.048	1391.9	871.2
35.00	185.72	+ 7.480	0.988	1477.4	795.3
50.00	193.00	+ 5.920	0.885	1059.4	534.8
75.00	120.17	+ 2.091	0.765	221.3	184.5
80.00	168.52	+ 1.262	0.731	180.0	111.8
90.00	152.06	— 0.310	0.665	— 35.7	— 23.4
95.00	128.77	— 0.450	0.615	— 42.0	— 32.5

La curva dei calori di mescolanza (vedi diagramma 2°) calcolati in base a questi calori specifici è perfettamente analoga a quella data da Bose (l. c.) per l'alcool propilico. Il massimo sviluppo di calore giace circa a quella concentrazione alla quale spetta pure il massimo calore specifico. Alla temperatura di esperienza il campo delle concentrazioni nel quale si ha assorbimento di calore, è assai ristretto, e per questo nelle mie ricerche

sulle variazioni dei calori di soluzione in miscele di solventi che si formano con assorbimento di calore, ho preso per ora in considerazione soltanto la coppia acqua - acido acetico.

Dai calori di mescolanza ottenuti per le due coppie di liquidi esami-

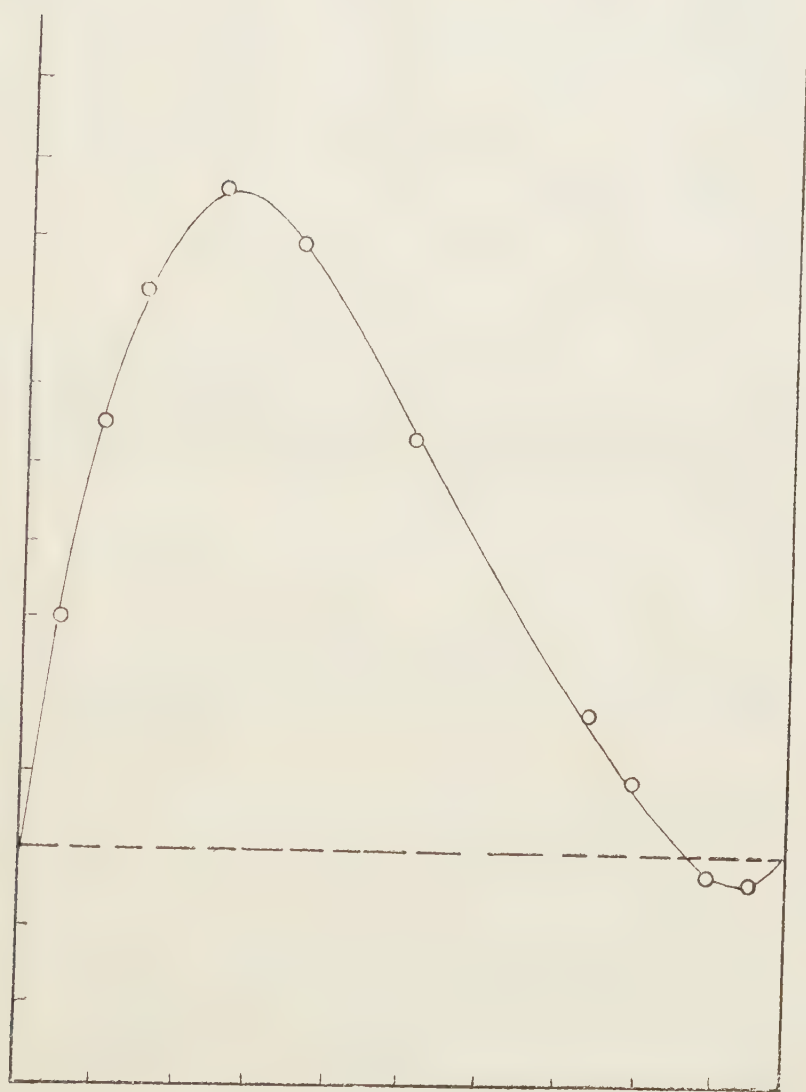


Diagramma II.

nate, risulta tuttavia ancora una volta come il calore di mescolanza di due liquidi debba considerarsi come la somma algebrica di almeno due fenomeni termici di segno contrario.

Per quanto poi è stato detto sopra, le relazioni che corrono tra acqua ed acido acetico e che risultano da queste misure, si possono riassumere

così: i due liquidi, che sono di per sè stessi molto associati, all'atto della loro mescolanza subiscono una dissociazione con assorbimento di calore in molecole più semplici; una parte di queste però si combina per dare molecole complesse costituite dalle due sostanze. La formazione di queste molecole complesse è esotermica ed è collegata ad un'assai piccola affinità di formazione, cosicchè per un piccolo aumento di temperatura esse si scindono nelle molecole semplici dei due liquidi.

Pertanto le variazioni dei calori di soluzione delle varie sostanze nelle miscele che si formano con assorbimento di calore dovranno essere di segno contrario a quelle che si sono ottenute in miscele che si formano con svolgimento di calore.

I risultati di queste ricerche e le conclusioni che da esse si possono trarre, saranno argomento di una prossima nota.

Chimica. — *Composti tra alogenuri di Titanio e sostanze organiche ossigenate.* Nota di G. SCAGLIARINI e G. TARTARINI, presentata dal Corrisp. G. BOERIS.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sulla natura della stibiobismutinite.* Nota ⁽¹⁾ di EMANUELE QUERCIGH, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

La stibiobismutinite fu descritta dal König ⁽³⁾ come una nuova specie minerale a cui attribuì la formula $(\text{Bi}, \text{Sb})_4\text{S}_7$.

Si presenta costituita da cristalli prismatici, allungati, facilmente sfaldbili, con aspetto rassomigliante piuttosto all'antimonite che alla bismutinite, provenienti da Nacozari (Sonora) nel Messico.

L'analisi quantitativa, in base alla quale il König caratterizzò chimicamente il nuovo minerale, si riferì soltanto all'antimonio (8.12 %) ed al bismuto (69.90 %), mentre lo zolfo fu dedotto per differenza (21.98 %).

Noto che, accettando senza discussione il rapporto stabilito dall'autore fra bismuto ed antimonio, le percentuali dei componenti per una corrispondente miscela del tipo $(\text{Bi}, \text{Sb})_4\text{S}_7$ dovrebbero essere quelle indicate nella colonna (I) della seguente tabella, anzichè quelle trovate nell'analisi riprodotta nella colonna (II), mentre invece, ad una semplice miscela isomorfa

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1926.

(3) G. A. KÖNIG, « Journ. Acad. Nat. Sci. », Philadelphia [2] 15 (1912) 424.

fra i due trisolfuri, Sb_2S_3 e Bi_2S_3 , contenente bismuto ed antimonio nel rapporto constatato dal König per la stibiobismutinite, corrisponderebbero le quantità riferite nella colonna (III).

	(I) (Bi, Sb) $_4\text{S}_7$	(II) Stibiobismutinite (König)	(III) (Bi, Sb) $_2\text{S}_3$
Bi	69.53	69.90	71.83
Sb	8.08	8.12	8.34
S	22.39	21.98 (diff.)	19.83
	100 —	100 —	100 —

Una discussione dell'analisi non sarebbe certo favorevole all'ammissione incondizionata di composti del tipo $(\text{Bi, Sb})_4\text{S}_7$, anche per il fatto che l'eccesso di zolfo di questo minerale, oltrechè essere soltanto presunto, non corrisponde nemmeno soddisfacentemente alla formula proposta.

Infatti mantenendo immutate le quantità di antimonio e di bismuto trovate analiticamente, lo zolfo sarebbe dovuto ammontare, per giustificare i rapporti stechiometrici ammessi dal König, a 22.51 invece che a 21.98.

Conseguentemente, quando si consideri che una miscela dei due trisolfuri ne avrebbe richiesto 19.30, si vede come il suo presunto eccesso nella stibiobismutinite di Nacozari in confronto della miscela dei trisolfuri, cioè 2.68, corrisponda solamente ai cinque sesti di quello necessario per concordare con la composizione $(\text{Bi, Sb})_4\text{S}_7$, per la quale l'eccesso deve salire a 3.21.

Nel corso di alcune ricerche rivolte ad altri scopi ho potuto constatare la formazione di prodotti sintetici cristallizzati, apparentemente omogenei e contenenti assieme all'antimonio od al bismuto, od anche ad entrambi questi elementi, lo zolfo in eccesso non solo rispetto alla formula generale M_2S_3 , ma talvolta anche a M_4S_7 .

Le esperienze furono eseguite principalmente modificando in modo opportuno il metodo di Geitner⁽¹⁾, sostituendo cioè alla miscela di zolfo ed antimonio i trisolfuri precipitati nelle condizioni note affinchè contengano quantità variabili di zolfo eccedente, e riscaldando quindi con soluzione acquosa di H_2S in tubo chiuso a temperature regolate secondo i casi, ma comprese generalmente tra 80° e 125°.

I cristallini ottenuti sono per lo più aciculari, raggiungono i 3-4 mm. di lunghezza, hanno il colore e la lucentezza caratteristiche dei trisolfuri, dei quali possiedono tutte le altre proprietà specifiche in rapporto con la composizione, che è variabile secondo le condizioni di formazione.

(1) C. GEITNER, « Ann. Chem. u. Pharm. », 129 (1864), 350, 359.

Nelle prove eseguite con trisolfuro d'antimonio ed eccesso di zolfo e con miscele di trisolfuro e pentasolfuro, si formarono, nei casi più favorevoli, dei cristallini apparentemente omogenei d'aspetto perfettamente identico a quello dell'antimonite aciculare naturale, i quali lavati accuratamente con benzolo prima di eseguirne la polverizzazione, diedero all'analisi quantitativa le seguenti percentuali dei rispettivi elementi:

	I	II
Sb	70.18	69.26
S	29.82 (diff.)	30.74 (diff.)
	100 —	100 —

L'antimonio fu determinato come tetrossido seguendo le indicazioni di Beckett⁽¹⁾ e lo zolfo fu dedotto per differenza, essendo qui esclusa la possibilità di altri elementi presenti.

Il calcolo mostra che nella prima analisi si ha un eccesso in zolfo di 2.09 e nella seconda, invece, di 3.38.

Che non si tratti, in questi casi, di composti nuovi, ma semplicemente di cristallini del trisolfuro di antimonio con minutissime inclusioni di zolfo, si può dedurre dall'osservazione che le misure angolari ottenibili nei migliori cristallini per l'angolo (110):(010) sono comprese nei limiti: $44^{\circ} 36' - 45^{\circ} 55'$, cioè concordano perfettamente con i limiti osservabili nei cristalli di antimonite, e danno un valore medio di $45^{\circ} 7'$, in buon accordo con l'angolo di $45^{\circ} 12'$ calcolabile, per detto angolo, dalle costanti del Dana.

Che lo zolfo eccedente sia incluso allo stato libero si verificò col polverizzare accuratamente sotto benzolo i cristallini, lavati in precedenza, in modo completo, con tale solvente; si estrassero così quantità variabili di zolfo che oscillarono in quattro prove tra il 0.61 ed il 4.24 % di materiale impiegato.

Se si considerano come sufficientemente esatte le varie analisi che si posseggono sulle antimoniti, si deve ammettere che anche nei cristalli naturali si possa verificare il fenomeno delle inclusioni di zolfo minutissime e non percettibili ad un esame ordinario; infatti R. Caspari⁽²⁾ nell'antimonite di Niederstriegeis, presso Rosswein in Sassonia, ed R. Mirolli⁽³⁾ in quella

(1) E. G. BECKETT, *Inaug. Dissert.*, Zurich (1909), 74. W. D. TREADWELL, *Analyt. Chem.* (1923), II, 184.

(2) R. CASPARI, Analisi riferita da H. CREDNER, « Neues Jahrb. f. Min. Geol. u. Pal. » (1874), 741.

(3) R. MIROLI, Analisi riferita da G. DE ANGELIS D'OSSAT, « Rend. R. Acc. Linc. » (5), II (1902), 548.

di Casal di Pari, presso Grosseto, trovarono le percentuali di antimonio e zolfo espresse rispettivamente in (I) e (III) della seguente tabella, mentre in (II) e (IV) sono riportate le quantità di zolfo corrispondenti per il composto Sb_2S_3 puro ⁽¹⁾ in base all'antimonio constatato:

	I	II	III	IV
Sb	70.05	70.05	68.67	68.67
S	29.95	27.67	31.33	27.13

Si ha, cioè, che, per l'antimonite di Niederstriegeis, l'eccesso di zolfo ammonta a 2.28, e per quella di Casal di Pari, a 4.20.

Impiegando il trisolfuro di bismuto precipitato con eccesso di zolfo, ho constatato che si formano, nelle condizioni accennate, i cristallini di bismutinite artificiale, come appare evidente dalle misure dell'angolo del prisma fondamentale col secondo pinacoide. Esse oscillano entro i limiti: $44^\circ 58' - 46^\circ$, con una media di $45^\circ 31'$, i limiti sono larghi in accordo con le osservazioni sui corrispondenti cristalli naturali e la media, ottenuta da numerose misure, risulta concordante con il valore medio osservato ($45^\circ 25'$) per tale angolo sui cristalli artificiali di questo trisolfuro ⁽²⁾.

Anche in questi cristalli, che hanno tutti i caratteri della bismutinite aciculare di Bieber ⁽³⁾ e di S. Agnes ⁽⁴⁾, si può constatare che c'è dello zolfo incluso, infatti, dopo accurato lavaggio dei medesimi con benzolo, la loro polverizzazione fatta con ogni precauzione sotto questo solvente, permette di estrarre altro zolfo.

Da diverse esperienze ho ottenuto percentuali, di zolfo in eccesso, variabili fra 0.85 e 1.93 %.

Anche nelle bismutine naturali l'analisi fa, talora, supporre la presenza di zolfo libero; infatti il minerale di San Baldomero in Bolivia, conterrebbe, secondo l'analisi di Forbes ⁽⁵⁾, su 80.93 di Bi, 19.61 di S, cioè un eccesso di 1.98 di quest'ultimo.

Risultati analoghi, per quanto riguarda la possibilità di ottenere inclusioni di zolfo così minute da sfuggire all'osservazione diretta, si ebbero con i cristalli misti dei trisolfuri di bismuto ed antimonio.

Mi sono limitato a concentrazioni relative, dei due composti, le quali corrispondessero approssimativamente a quelle riscontrate nella stibiobismutinite di Nacozari ed ho ottenuto, così, sinteticamente dei cristalli misti contenenti un eccesso di zolfo di 1.24 % ed altri con eccesso del 2.51 %.

(1) Calcolate in base ai pesi atomici seguenti: Bi=209, Sb=121.67, S=32.07.

(2) E. QUERCIGH, « Rend. R. Accad. Linc. » [6], I (1925), I, 33.

(3) E. QUERCIGH, « Rend. R. Acc. Linc. » [6] I (1925), I, 34.

(4) G. LUGARO, « Rend. Acc. Linc. » [6] 3 (1926), I, 416.

(5) D. FORBES, « Phil. Mag. », 29 (1865), 4.

Che si tratti di semplici soluzioni solide dei trisolfuri, e non di composti nuovi, è dimostrato dalle misure angolari del prisma {110}, eseguite in gran numero, le quali si mantengono costantemente nei limiti di quelle dei trisolfuri puri; ciò, per quanto è noto anche dalle precedenti ricerche di Perrier⁽¹⁾, si verifica appunto nei cristalli misti di Sb_2S_3 e Bi_2S_3 .

Malgrado, quindi, l'eccesso di zolfo, risultante dalle seguenti analisi (I) e (II), dei due prodotti sintetici esaminati, siamo in presenza di semplici cristalli misti dei due trisolfuri analoghi a quelli già ottenuti, per altra via, dal Perrier.

	I	II
Bi	66.84	72.58
Sb	11.78	5.72
S	21.23	21.48
	<hr/> 99.85	<hr/> 99.78

Con queste esperienze non si esclude la possibilità di esistenza di composti $(\text{Bi}, \text{Sb})_4\text{S}_7$, ma si mette in evidenza che nei trisolfuri d'antimonio e di bismuto, e nelle loro soluzioni solide, si possono avere delle inclusioni di zolfo minutamente diffuse nei cristalli in modo da non essere percettibili all'osservazione diretta.

Rimane, invece, completamente svalutata l'importanza dell'eccesso di zolfo presunto dal König nella stibiobismutinite di Nacozari e si mostra che il ricorrere senz'altro, in tale caso, all'ammissione di un composto nuovo, ammissione basata unicamente sui dati presunti da una analisi, è ancora più inopportuno di quanto *a priori* potesse apparire.

Le osservazioni esposte inducono a considerare la stibiobismutinite di Nacozari come costituita da una miscela isomorfa di bismutinite e di antimonite, con eventuali inclusioni di zolfo.

Essa rappresenterebbe quindi il primo caso, osservato in natura, in cui i due trisolfuri si trovino disciolti, in proporzioni rilevanti, allo stato solido.

Mineralogia. — *Analogia di comportamento e isomorfismo fra Cerio e Torio.* Nota di G. SCAGLIARINI, presentata dal Corrisp. G. BOERIS.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) C. PERRIER, *Sull' isomorfismo tra antimonite e bismutinite*, Roma (1925).

Biologia. — Il « virus » della malattia del giallume (*poliedria*) nel baco da seta in rapporto con le moderne teorie sui « virus filtrabili ». Nota del prof. C. ACQUA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. PIROTTA.

È noto che fra le malattie che colpiscono il baco da seta (ed anche altri lepidotteri) ve ne ha una denominata impropriamente *giallume*, perchè nelle razze gialle la larva, enormemente rigonfia, assume un colore giallo sporco, mentre poi invece nelle razze bianche questa colorazione non si verifica. All'esame interno della larva il sangue si rivela di un denso torbido, e molti tessuti mostrano una profonda alterazione. Il microscopio ci mostra l'esistenza di un numero enorme di granuli a forma poliedrica, formati da sostanza organica, prodotti senza dubbio di degenerazione delle cellule di taluni tessuti; e detti granuli, esattamente studiati dal punto di vista cristallografico, rappresentano una delle forme tipiche del sistema monometrico, il *rombododecaedro*. Poichè la presenza di tali poliedri è caratteristica nella malattia, questa può essere designata più propriamente col nome di *poliedria*.

Se in un materiale fissato e incluso in paraffina operiamo delle sottili sezioni e le sottoponiamo a speciali metodi di colorazione, possiamo seguire il processo di degenerazione cellulare e la formazione dei granuli poliedrici. Il fenomeno si verifica soltanto in alcuni tessuti, quali l'ipodermico, il peritracheale, il grasso ed il sangue. Ma per quest'ultimo esiste ancora il dubbio se i granuli che riscontriamo nei corpuscoli siansi in essi veramente formati o non siano stati piuttosto *fagocitati*. Gli altri tessuti, quali l'endotelio intestinale, il tessuto nervoso, il muscolare, sono immuni, e ciò spiega perchè la larva si mantiene in vita fino ad uno stato avanzato della malattia, nel quale infine, rottosi il tegumento con fuoruscita del sangue e dei prodotti di tessuti degenerati, segue la morte ed il rapido sfacimento generale di tutto il corpo.

Per ciò che riguarda l'origine dei granuli poliedrici, noi assistiamo con il microscopio ad un caratteristico processo di alterazione nucleare.

I nuclei cominciano a presentare una specie di ipertrofia, la cromatina si spezzetta, quasi che subisse un processo di divisione diretta, e ciascun frammento diviene il punto di origine di un granulo poliedrico. Questi granuli, opportunamente trattati e colorati, non si mostrano mai omogenei, ma presentano una specie di corteccia cristallina che racchiude nell'interno una sostanza grumosa, residuo della alterata cromatina.

(1) Nella seduta del 20 giugno 1926.

Poichè la malattia del giallume si mostra contagiosa, è sorta la quistione della ricerca dell'agente, e poichè non si sono trovati con certezza dei microorganismi, è stata posta la quistione se il *virus* fosse filtrabile.

Prowazek ammise che il *virus* sia filtrabile, ed ascrisse il parassita capace di attraversare i filtri ai così detti *clamidozoi*, i quali anche nel caso della malattia in parola, penetrando nell'interno della cellula, provocherebbero, come reazione, la formazione dei corpi poliedrici.

Altri autori ammisero del pari la filtrabilità del *virus* del giallume. Ma il giapponese Hajashi negò, con una sperimentazione nella quale otteneva solo piccolissimi attecchimenti, attribuiti a errori di tecnica, che il *virus* fosse filtrabile. In tali discordanze io ripresi lo studio della quistione, servendomi di un filtro Berkefeld di media compattezza, e potei giungere sicuramente alla conclusione che il *virus* è filtrabile, e che i risultati negativi (parzialmente però) dell'Hajashi si spiegano col fatto che questo Autore aveva eccessivamente diluito il materiale da filtrare (sangue - poltiglie di tessuti). Oggi la filtrabilità del *virus* è comunemente ammessa.

Ma lo scopo della presente Nota è quella d'illustrare il comportamento del *virus* del giallume e di questa malattia, in relazione particolarmente alle nuove idee sui *virus filtrabili*.

È noto che in genere si ammette in simili casi, che il microorganismo, invisibile con i mezzi ordinari usati in microscopia, possa passare per la sua estrema piccolezza attraverso filtri porosi. Si tratterebbe quindi di microorganismi piccolissimi, spesso visibili solo con l'ultramicroscopio, e che perciò si chiamarono anche *ultramicroorganismi*. Ma l'ultramicroscopio non è in grado di rivelarci nè la forma, nè altre particolarità di questi corpi; esso segna solo la presenza di sostanze figurate, le quali possono eventualmente essere anche non viventi, ma semplici prodotti di degenerazione di sostanze cellulari. Tuttavia - per altre ragioni sulle quali torna superfluo l'insistere - s'inclinò per l'ipotesi dell'esistenza di microorganismi piccolissimi, ripudiando quindi la teoria che il Beijerinck aveva emesso fin dal 1898 a proposito della malattia del mosaico nelle foglie del tabacco, quella cioè di un fermento *autocatalitico*, capace di aumentare per *autocatalisi*, o di una specie di *contagium vivum fluidum*.

Ma in questi ultimi tempi meritano particolare attenzione le esperienze veramente geniali del Carrel. Questi, dopo d'aver tentato con successo le culture di tessuti animali *in vitro*, estese le ricerche ai *fibroblasti* del così detto sarcoma di Rous (sarcoma che si produce spontaneamente in certi polli, e nel quale la poltiglia ottenuta dai tessuti può essere filtrata senza che sia spenta la virulenza), riuscendoli a coltivare, e sperimentando anche la loro azione in confronto di altri tessuti. Inoltre il Carrel studiò anche la formazione e il comportamento di tumori sotto l'azione di diverse cause chimiche o fisiche.

Le ricerche del Carrel, pubblicate in questi ultimi due anni particolarmente nei *Comptes Rendus de la Société de Biologie*, sono oltremodo interes-

santi per lo studio generale della genesi dei tumori maligni, ma a noi interessa per il nostro oggetto, il concetto che egli si è formato sulla natura del *virus filtrabile* ottenuto dai sarcomi di Rous, come su quelli ottenuti da tumori provocati da diverse cause chimiche o fisiche (iniezioni di composti di catrame, raggi X ecc.) e riportiamo talune sue conclusioni. In una delle sue Note ⁽¹⁾ così si esprime:

«Questi nuovi fatti ci spiegano in una certa misura la natura del principio filtrante di Rous. È evidente che la sostanza estratta da un sarcoma del catrame non è un organismo ultramicroscopico. Si può dedurre che il principio di Rous non lo è maggiormente. D'altra parte non v'è nessuna differenza fondamentale tra la cellula maligna del sarcoma di Rous e quella del sarcoma del catrame. Il sarcoma di Rous non deve essere riguardato come un tumore di natura speciale, come un sarcoma infettivo. Il principio filtrante dei due sarcomi è senza dubbio fabbricato dalle cellule stesse. Si può supporre che nei sarcomi degli altri animali, che non siano polli, questo principio esista ancora ma che esso risieda nel seno delle cellule e non si manifesti all'esterno se non per qualche ragione secondaria. Il significato della sostanza di Rous nella genesi del sarcoma sembrerebbe dunque essere più generale di quello che non sembri.

«La parte esercitata nella formazione dei tumori connettivali del pollo può essere spiegata nella maniera seguente. Quando il catrame, o una sostanza risultante dalla sua azione sui tessuti, si trova in contatto di cellule in via di moltiplicazione, queste cellule fabbricano un principio analogo all'agente filtrante di Rous. Questa sostanza nel corso della malattia si riproduce essa stessa come il principio litico di Twort. La malignità di una cellula può dunque essere considerata come un disordine di metabolismo, che si propaga da per se stesso ed è determinato da fattori non specifici, quali il catrame, l'arsenico e certe sostanze prodotte dai batteri, dagli elminti, bruciature di tessuti per raggi X ecc. ».

E in una nuova Nota pubblicata nel novembre dello scorso anno ⁽²⁾ egli conclude in base a nuove ricerche sull'azione dell'arsenico come appresso:

«Insomma l'acido arsenioso ha prodotto in qualche giorno nei polli la trasformazione di tessuti normali in sarcomi fusocellulari, che contengono un principio filtrante analogo all'agente di Rous. Sembra dunque che in questi casi come in quello del sarcoma assai maligno del catrame noi ci troviamo in presenza di un fenomeno importante: la formazione da parte dei tessuti, sotto l'influenza di una sostanza chimica e non specifica, di un principio che rassomiglia a un *virus*, agisce in modo specifico sulle cellule di un certo tipo e si riproduce indefinitamente in presenza di queste cellule ».

Come si vede è il principio dei così detti *virus autocatalitici* che torna in onore. Si deve notare che anche il Centanni aveva espresse idee consimili da circa un ventennio, come mette in rilievo il Bisceglie in un suo interessante studio pubblicato recentissimamente ⁽³⁾.

(1) CARREL ALEXIS, *La Genèse des sarcomes*. «Comptes Rendus des Seances de la Société de Biologie», t. XCIII, 1925.

(2) CARREL ALEXIS, *Le principe filtrant des sarcomes de la poule produits par l'arsenic*. «Comptes Rendus des Seances de la Société de Biologie», t. XCIII, 1925.

(3) BISCEGLIE VINCENZO, *Sulla questione del virus vivo o del virus chimico quali fattori della trasformazione oncogena della cellula*. «Rivista di Biologia», vol. VIII, 1926.

Se ora noi prendiamo in esame ciò che si verifica nella malattia della poliedria (giallume del baco da seta), troviamo degli argomenti che fortemente appoggiano le nuove idee. Questa malattia non è stata per il passato ritenuta ereditaria, nel senso che l'agente patogeno possa trasmettersi dai progenitori ai discendenti mediante le cellule germinative. Solo in questi ultimissimi tempi è stata affacciata una tale ipotesi e sostenuta, come abbiamo anche avuto occasione di dimostrare recentemente, con scarsa fortuna. Sta invece il fatto che la comparsa di questa malattia è in strettissimo rapporto con le condizioni d'ambiente, più complesse di quanto possa sembrare a prima vista, ma tra le quali ha senza dubbio valore la presenza di un grado elevato di umidità. Infatti in località basse, poco aeree, la malattia esplode spesso improvvisamente, menando strage negli allevamenti, e ciò nonostante che le partite di riproduzioni dalle quali si ottennero le uova fossero state fra le migliori, immuni o totalmente o quasi (perchè qualche individuo malato di giallume si riscònta quasi sempre anche nei migliori allevamenti) dalla malattia in parola. Al contrario allevamenti derivanti da uova emesse da farfalle, che provenivano da partite fortemente attaccate dal giallume, vanno egregiamente, solo che trovino condizioni propizie di ambiente, e in ogni caso non vanno peggio di altre consimili ma provenienti da allevamenti immuni.

Ciò tende a dimostrare che la poliedria, la quale si origina per un disordine metabolico nelle cellule, e precisamente nei nuclei, non è imputabile con tutta probabilità a un parassita, il di cui propagarsi dovrebbe essere ad ogni modo graduale. Si aggiunga a questo proposito che le recentissime osservazioni del Paillot, direttore della Stazione Entomologica francese del Sud-Est, secondo le quali sarebbe stato scoperto all'ultramicroscopio un parassita endonucleale (nominato dall'Autore *Borellina Bombycis*), non sembrano autorizzare le conclusioni alle quali giunge l'A., come abbiamo esposto in altro studio pubblicato sullo stesso argomento.

Oltre poi il fatto che la malattia compare talvolta improvvisamente in numero assai grande di larve, senza che vi sia stato precedentemente nessuno sviluppo graduale, quale si sarebbe dovuto verificare nel caso di una affezione parassitaria, si ha poi l'altro fatto che infettando mediante i pasti od iniezioni larve sane con sangue di bachi malati, opportunamente diluito, non si ha quasi mai un elevato grado di attecchimento, come accade nello stesso baco da seta, infettato in vario modo, con i parassiti di altre malattie, quali il calcino e la pebrina. Da ultimo si noti che anche con continue infezioni, se l'ambiente non è propizio, spesso non si riesce ad avere alcun attecchimento. Qualche anno fa noi passammo una intera estate, in cui la stagione decorreva molto secca, a cercare di provocare replicatamente l'infezione o con i pasti inquinati o con le iniezioni, senza potere ottenere un solo caso di attecchimento; ma come cambiarono le condizioni di ambiente e aumentò l'umidità, la malattia comparve subito, anche senza infe-

zioni artificiali, pure essendo da queste in certo grado favorita. Ciò dimostra che, pure esistendo un agente che favorisce l'infezione e proviene dai tessuti di larve malate, esso è però sempre fortemente e in alcuni casi decisamente dominato dalle condizioni ambientali.

In questo stato di cose le idee sostenute recentemente dal Carrel acquistano una particolare importanza.

Probabilmente la malattia della poliedria si origina anche spontaneamente per disordini metabolici, derivanti da condizioni ambientali sfavorevoli, tra le quali principalmente un eccesso di umidità provocante una deficienza di traspirazione. In conseguenza di ciò, in periodi speciali larvali — che noi abbiamo dimostrato corrispondere al periodo delle mute e particolarmente della terza e quarta muta — si inizia un'alterazione cellulare che porta al disfacimento di tessuti con la formazione di innumerevoli corpi poliedrici, veri prodotti di reazione, i quali finiscono poi per passare in grande quantità nel sangue. Ma in tali processi si producono anche delle sostanze capaci di esercitare un'azione analoga a quella di un *virus*, cioè a dire di favorire — in speciali condizioni d'ambiente — il riprodursi della malattia in altri individui. Non si tratta di corpi viventi, di *parassiti*, ma di sostanze che agiscono *cataliticamente*. E poichè in seguito all'azione da esse esercitata può derivare la formazione di nuove analoghe sostanze, possiamo anche parlare di processi di *autocatalisi*.

Potremo dunque, analogamente a quanto scrive il Carrel per i *virus* da lui studiati, esprimerci anche per la malattia della poliedria nel modo seguente: *sembra che in questi casi noi ci troviamo in presenza di un fenomeno importante: la formazione da parte dei tessuti, sotto l'influenza di speciali condizioni, di un principio che rassomiglia ad un virus, agisce in modo specifico sulle cellule di un certo tipo e si riproduce indefinitamente in presenza di queste cellule.*

Con questa ipotesi, che appare assai probabile, noi ci spieghiamo come la malattia in quistione possa esplodere improvvisamente o quasi, in determinate condizioni che ne favoriscono lo sviluppo, anche in allevamenti fatti in locali mai usati precedentemente a tale scopo, con materiale nuovo, o in ogni caso diligentemente disinfettato.

Essa può sorgere improvvisamente e spontaneamente senza l'intervento di un *virus* specifico. Questo, di natura non vivente, si forma in seguito, fabbricato dalle stesse cellule degenerate, e può favorire l'ulteriore propagarsi della malattia, ma *non può ritenersi l'agente specifico, necessario.*

Se lo studio della malattia del giallume può portare un efficace sostegno alle idee, di recente risostenute dal Carrel, non crediamo che si possa però generalizzare nel senso di sostenere che tutti i *virus filtrabili* debbano giudicarsi alla stessa stregua; ciò sarebbe invero un grave errore. Ma nel caso della malattia del giallume (poliedria) le idee del Carrel ci spiegano molto bene dei fatti che altrimenti resterebbero avvolti nel buio. Anche l'azione

positiva ma sempre limitata del *virus* raccolto da larve ammalate, nel mentre spiega i fatti innegabili di un contagio diretto trasmesso da larve ammalate a quelle sane, rende poi assai difficile l'ammettere come per la presenza di minuscole quantità di *virus* trasportate dall'aria od eventualmente esistenti nelle bigattiere, non ostante la pulizia e le disinfezioni che di regola sono eseguite prima d'intraprendere un nuovo allevamento, si possano originare all'improvviso fenomeni patologici così estesi come quelli dei quali ora abbiamo detto.

In fine — secondo le nuove idee — noi ci rafforziamo ancora di più nell'opinione che, per combattere la malattia, anzichè ricorrere all'intervento di ipotetici parassiti, i quali non acquistano maggior valore per il fatto che ad essi si è creduto di dovere dare un nome, o di sforzarsi vanamente nel voler fare la selezione al microscopio per distinguere progenitori sani ed infetti, come si fa per la pebrina, convenga invece concentrare ogni nostro sforzo nello studio delle condizioni di ambiente, di quell'*ambiente* che è veramente sovrano, e che manifesta un'azione decisiva nel favorire o nell'ostacolare la comparsa e lo sviluppo della malattia.

Ed in questo studio, più complesso e meno facile di quanto possa apparire a prima vista, si trova con tutta probabilità la chiave di volta per la risoluzione del nostro problema.

Biologia. — *Influenza dello stimolo radio-ormonico, diretto verso i testicoli e le ovaie, sui caratteri dei discendenti.* Nota di A. PAIS, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse l'annunzio telegrafico della morte del Socio prof. OLINTO MARINELLI, avvenuta in Firenze il 14 giugno 1926. Era Corrispondente dal 25 luglio 1921 e Socio Nazionale dal 15 agosto 1924.

Nell'adunanza generale del 4 giugno 1926 si procedette alla elezione delle due cariche di Presidente e Vicepresidente dell'Accademia, essendo scaduti da Presidente il sen. Volterra e da Vicepresidente il sen. Scialoja.

Il risultato della votazione per il Presidente fu il seguente:

Votanti . . .	59
V. SCIALOJA	voti 56
Voti bianchi o nulli	3

Il risultato della votazione per il Vicepresidente fu:

Votanti . . .	60
A. GARBASSO	voti 51
O. M. CORBINO	» 3
T. LEVI-CIVITA	» 3
R. NASINI	» 1
Voti bianchi o nulli	2

Furono eletti a Presidente il sen. SCIALOJA e a Vicepresidente il sen. GARBASSO.

Si procedette poscia all'elezione dell'Amministratore e dell'Amministratore aggiunto, essendo scaduti il prof. MILLOSEVICH e il prof. BENINI per triennio compiuto.

Risultarono eletti a Socio Amministratore il prof. F. MILLOSEVICH con voti 55 su 59 votanti e ad Amministratore aggiunto il prof. R. PARIBENI con voti 55 su 60 votanti

Nella seduta della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali del 4 giugno 1926 si procedette alla elezione del Segretario aggiunto della detta Classe; risultò eletto per acclamazione il Socio prof. N. PARRAVANO.

Il sen. V. VOLTERRA fu confermato all'unanimità a rappresentante dell'Accademia nel Consiglio Internazionale di Ricerche.

Con le norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, l'Accademia procedette alla elezione di Soci Nazionali, di Soci Corrispondenti e di Soci Stranieri. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Furono eletti Soci Nazionali:

Nella Categoria I, per la *Matematica, Meccanica e applicazioni*: SEVERI FRANCESCO (Sez. Matematica).

Nella Categoria IV, per la *Geologia, Paleontologia, Mineralogia e applicazioni*: GINORI-CONTI PIETRO (Sez. Mineralogia).

Nella Categoria V, per le *Scienze biologiche e applicazioni*: LEVI GIUSEPPE, RUFFINI ANGELO, GIACOMINI ERCOLE (Sez. Zoologia) e ADUCCO VITTORIO (Sez. Fisiologia).

Furono eletti Soci Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Matematica, Meccanica e applicazioni*: SCORZA GAETANO (Sez. Matematica).

Nella Categoria II, per l'*Astronomia, Geodesia, e Geofisica e applicazioni*: ABETTI GIORGIO (Sez. Astronomia).

Nella Categoria III, per la *Fisica, Chimica e applicazioni*: BLANC ALBERTO, ROLLA LUIGI (Sez. Chimica).

Nella Categoria IV, per la *Geologia, Paleontologia, Mineralogia e applicazioni*: SEGRÈ CLAUDIO (Sez. Geologia) e STELLA AUGUSTO (Sez. Mineralogia).

Nella Categoria V, per le *Scienze biologiche e applicazioni*: PETRI LIONELLO (Sez. Botanica) e DIONISI ANTONIO (Sez. Patologia).

Furono inoltre eletti Soci Stranieri:

Nella Categoria I, per la *Matematica, Meccanica e applicazioni*: CARTAN ELIA.

Nella Categoria II, per l'*Astronomia, Geodesia e Geofisica e applicazioni*: CAMPBELL WILLIAM W.

Nella Categoria III, per la *Fisica, Chimica e applicazioni*: COMPTON A. e ASTON F. W.

Nella Categoria V, per le *Scienze biologiche e applicazioni*: HENNEGUY LUIGI, MATHEWS P. ALBERT e ROBERTSON T. B.

L'esito delle votazioni venne annunziato dal Presidente, con circolare del 14 luglio 1926. Le nomine dei Soci Nazionali e Stranieri saranno sottoposte all'approvazione Sovrana.

G. C.

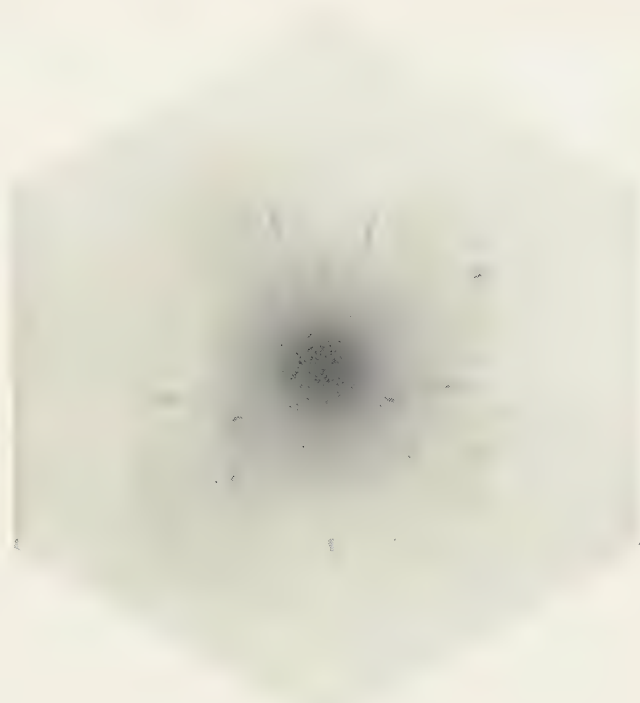


Fig. 1 - MgCl_2

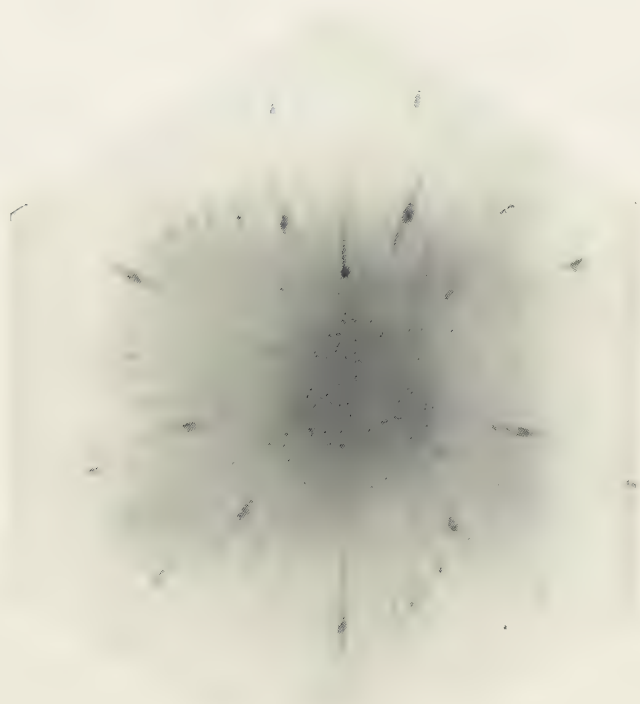


Fig. 2 - MnCl_2

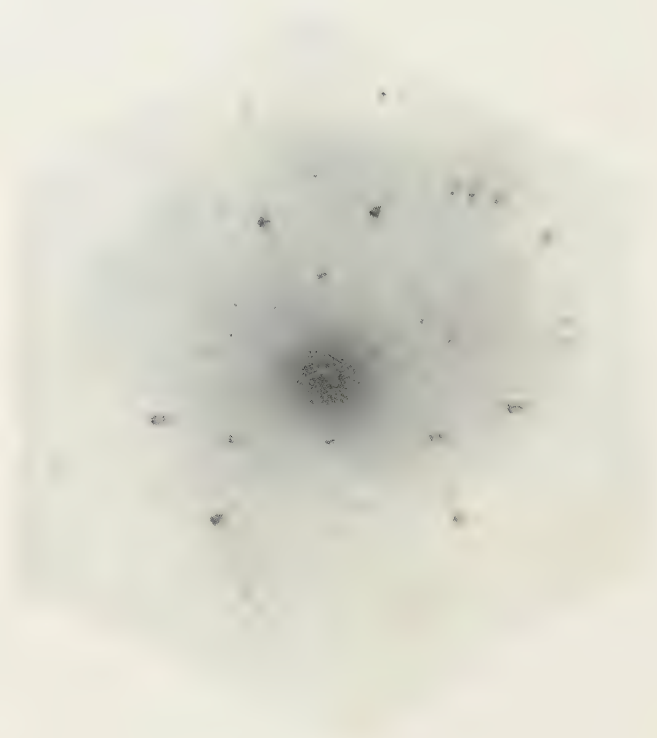


Fig. 3 - Cd Cl_2

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1926.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Geometria. — *Sulla teoria delle superficie R e delle loro trasformazioni.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. FUBINI.

1. Di specialissima importanza sono in Geometria differenziale le superficie R; nella geometria *metrica* perchè le superficie a curvatura costante e quelle applicabili su quadriche sono di tale tipo; nella geometria *proiettiva* per molte ragioni, specialmente per l'ufficio singolare che esse hanno nel problema fondamentale delle *deformazioni proiettive* delle superficie ⁽²⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1926.

(2) Userò qui le notazioni e locuzioni abituali (cfr. la *Geometria proiettiva-differenziale* di G. FUBINI ed E. ČECH; Bologna, Zanichelli). Le riassumo qui brevemente. Siano x, y, z, t e ξ, η, ζ, τ coordinate omogenee di punto e di piano tangente d'una superficie S. Indicheremo un punto od un piano con la sua prima coordinata; così un determinante o matrice, di cui una riga sia formata dalla x (o ξ) e certe sue derivate, mentre le altre righe si ottengono sostituendo alla x (od alla ξ) le y, z, t (le η, ζ, τ) sarà indicato scrivendone una sola riga. Con u, v indicherò le asintotiche di S, e supporrò le coordinate di punto e piano moltiplicate per tali fattori che i determinanti $(x x_u x_v x_{uv})$ e $(\xi \xi_u \xi_v \xi_{uv})$ siano uguali. Dettone $e^{2\theta}$ il valore, varranno equazioni del tipo:

$$(I) \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x & \xi_{uu} = \theta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11} \xi & \pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta \theta_v \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x & \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi & \pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \gamma \theta_u \end{cases}$$

e analoghe in $y, z, t, \eta, \zeta, \tau$. Le condizioni d'integrabilità di queste si dicono senz'altro le *condizioni d'integrabilità*. Se da ogni punto x di S esce una retta r , la congruenza K di queste rette si dice *coniugata* ad S, se le sue sviluppabili tagliano S in un sistema coniugato. *Dualmente* una congruenza K' formata da rette ρ , posta ciascuna in un piano

In questa Nota troveremo alcune loro proprietà che sembrano nuove, e nuove trasformazioni di tali superficie. Cominceremo da un problema preliminare, cercando le conseguenze K coniugate ad una data superficie S , che sono anche congruenze W . Il problema duale è quello di cercare le congruenze K' armoniche ad S , che sono anche W . Essendo K coniugata ad S , potrò scegliere il fattore di proporzionalità delle x, ξ in guisa che K sia il luogo delle rette r congiungenti i punti x, x_{uv} . Il modo più rapido di esprimere che K è W è quello di cercare quando le coordinate di r (che indicheremo ancora con la lettera r) soddisfano ad una stessa equazione di Laplace. Posto

$$(1) \quad r = e^{-\theta} (x x_{uv}),$$

[cioè le re^{θ} uguali ai minori della matrice $(x x_{uv})$] troviamo:

$$(2) \quad \begin{cases} r_u = e^{-\theta} \{ (x_u x_{uv}) + \pi_{11} (x x_v) + (\theta_{uv} + \beta \gamma) (x x_u) \} \\ r_{uv} - (\theta_{uv} + \beta \gamma) r = e^{-\theta} \{ \pi_{11v} (x x_v) + \pi_{22u} (x x_u) \} \\ r_{uu} - \theta_u r_u - \beta r_v - (p_{11} + \pi_{11}) r = e^{-\theta} \{ 2 \pi_{11} (x_u x_v) + (\pi_{11v} - 2 \beta \pi_{22}) (x x_u) + (\pi_{11u} - 2 \theta_u \pi_{11}) (x x_v) \} \end{cases}$$

e analoghe per r_v, r_{vv} .

Se avessimo assunto a coordinate della r le

$$(1) \text{ bis} \quad \bar{r} = e^{-\theta} (\xi_u \xi_v)$$

avremmo trovato:

$$(2) \text{ bis} \quad \begin{cases} \bar{r}_u = e^{-\theta} \{ \pi_{11} (\xi \xi_v) + (\xi_u \xi_{uv}) \} \quad ; \quad \bar{r}_v = e^{-\theta} \{ \pi_{22} (\xi_u \xi) + (\xi_{uv} \xi_v) \} \\ \bar{r}_{uv} - (\theta_{uv} + \beta \gamma) \bar{r} = e^{-\theta} \{ \pi_{11v} (\xi \xi_v) - \pi_{22u} (\xi \xi_u) \} \\ \bar{r}_{uu} - \theta_u \bar{r}_u - \beta \bar{r}_v - (p_{11} + \pi_{11}) \bar{r} = e^{-\theta} \{ (\pi_{11u} - 2 \theta_u \pi_{11}) (\xi \xi_v) + (\pi_{11v} - 2 \beta \pi_{22}) (\xi_u \xi) + 2 \pi_u (\xi \xi_{uv}) \}. \end{cases}$$

La verifica della equivalenza delle (2) e (2) bis si compie osservando che il piano ξ_{uv} passa per il punto $x_{uv} - (\theta_{uv} + \beta \gamma)x$ (cfr. la (9) bis di loc. cit., § 16 C).

tangente di S , si dice *armonica* ad S , se le sue sviluppabili corrispondono a un sistema coniugato di S . Se r è una retta congiungente un punto x di S al punto $x_{uv} + lx_u + mx_v$ (cioè intersez. dei piani $\xi_u + mx, \xi_v + l\xi$), la retta *duale* ρ è l'intersezione dei piani $\xi, \xi_{uv} + l\xi_u + m\xi_v$ (cioè è la congiungente dei punti $x_u + mx, x_v + lx$). Se l, m sono funzioni delle u, v , tali rette descrivono due congruenze *duali* K, K' . Se K è *coniugata* ad S , allora K' è *armonica*, e in tal caso possiamo scegliere il fattore di proporzionalità delle x, ξ in guisa che una retta r di K congiunga i punti x ed x_{uv} (sia intersezione dei piani ξ_u, ξ_v), che ρ congiunga i punti ξ_u, ξ_v , cioè sia intersezione dei piani ξ, ξ_{uv} , in altre parole che sia $l = m = 0$.

Scrivendo che K è W nel modo su accennato si trova:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \pi_{11} v & \pi_{22} u & 0 \\ \pi_{11} u - 2\theta_u \pi_{11} & \pi_{11} v - 2\beta \pi_{22} & 2\pi_{11} \\ \pi_{22} u - 2\gamma \pi_{11} & \pi_{22} v - 2\theta_v \pi_{22} & -2\pi_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Se noi poniamo $x = e^\varphi \bar{x}$ (ove e^φ è un fattore di proporzionalità), la più generale congruenza coniugata ad S è quella delle rette (\bar{x}, \bar{x}_{uv}) .

Essa sarà W soltanto se è soddisfatta l'equazione dedotta da (3) sostituendovi alle θ, π_{ii} le $\theta = \theta - 2\varphi, \pi_{11} = \pi_{11} - \beta\varphi_v - \varphi_u^2 + \theta_u \varphi_u - \varphi_v v$ ecc. corrispondenti alle nuove coordinate omogenee \bar{x} . Si trova così per la φ una equazione del 3° ordine. Un'equazione analoga si trova per esprimere che anche la congruenza duale K' è W ; può forse essere interessante lo studio del sistema formato da entrambe queste equazioni.

2. Ma noi ci limiteremo al caso particolare che la congruenza K coniugata ad S sia *completamente* coniugata, intendendo con ciò che i sistemi coniugati di ciascuna delle falde focali di K corrispondano a sistemi coniugati di S (col che K è necessariamente W); e una definizione simile sarà data per le congruenze K' *completamente* armoniche ad S .

Poichè le asintotiche delle falde focali sono le caratteristiche della equazione di Laplace per le coordinate r di una retta r di K , esse dovranno coincidere nel caso di congruenze K *completamente* coniugate con le u, v ; ciò che per le (2) avviene soltanto se

$$(4) \quad \pi_{11} v = \pi_{22} u = 0.$$

E l'equazione di Laplace diventa:

$$(5) \quad r_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma) r$$

che è *ad invarianti uguali*. Quindi: *una congruenza K completamente coniugata ad una superficie S è una congruenza R ; e perciò le sue falde focali sono superficie R* . Noi dimostreremo in più che (escluso il caso banale delle congruenze K ridotte a una stella di rette) anche *ogni superficie S , che possiede una congruenza completamente coniugata K è una superficie R oppure R_0* ⁽¹⁾. Infatti essendo la forma $\pi_{11} du^2 + \pi_{22} dv^2$ di significato intrinseco, potremo per le (4) scegliere i parametri delle u, v in guisa che $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$, oppure $\pi_{11} = 1, \pi_{22} = 0$ (caso equivalente all'altro $\pi_{11} = 0, \pi_{22} = 1$, come si vede scambiando i parametri u, v), oppure $\pi_{11} = \pi_{22} = 1$. Nel primo caso potremo cambiare coordinate omogenee in guisa che la 4ª coordinata τ

(1) Se i parametri delle u, v si possono scegliere in guisa che $\beta_v : \gamma_u = \text{cost.}$ la superficie si dice R (se tale cost. non è nè zero, nè ∞), R_0 (se la costante vale zero oppure ∞ : casi questi equivalenti, come si vede scambiando u con v). Nel caso di superficie R i parametri delle u, v si possono scegliere in modo che $\beta_v = \gamma_u$.

di piano tangente sia costante. Poichè r è intersezione dei piani ξ_u, ξ_v , la K è tutta formata di rette r passanti per l'origine $x = y = z = 0$ ⁽¹⁾. Nel caso $\pi_{11} = \pi_{22} = 1$ le condizioni d'integrabilità (cfr. la duale della terza delle (12) loc. cit., p. 94) danno $\beta_v = \gamma_v$, e perciò la S è R ; nel caso $\pi_{11} = 1$, $\pi_{22} = 0$ si ha $\gamma_u = 0$, cioè la S è R_0 , c. d. d.

3. Senza occuparci qui delle superficie R_0 , sorgono i problemi: *Data una superficie S di tipo R , trovare le falde focali Σ di una congruenza K completamente coniugata ad S ; e, viceversa, data una Σ di tipo R , trovare le corrispondenti superficie S .* La risoluzione di entrambi questi problemi porta a nuove trasformazioni delle superficie R . Il primo problema si potrebbe, come al n. 1 in caso analogo, ridurre alla ricerca di un conveniente fattore di proporzionalità e^Φ , per cui si troverebbe un sistema di equazioni tutt'altro che semplice. Possiamo evitare tale difficile studio riconducendolo al problema della deformazione proiettiva di S . Supposta data la S , e scelti i parametri delle u, v e il fattore di proporzionalità delle x, y, z, t in guisa che $\pi_{11} = \pi_{22} = 1$ ⁽²⁾, le condizioni d'integrabilità saranno soddisfatte anche se, tenuti fermi i valori delle θ, β, γ , si suppone $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$ (anzichè $\pi_{ii} = 1$). La superficie S è così sostituita da una superficie S_0 proiettivamente applicabile; e, se S si deforma in S_0 in modo che ogni elemento di S trascini con sè il raggio r corrispondente di K , la K viene mutata in una congruenza K_0 che per le $\pi_{ii} = 0$ si riduce ad una stella di rette.

Le congruenze K completamente coniugate ad una superficie S di tipo R sono dunque quelle che, con una deformazione proiettiva di S , si riducono a una stella di rette.

4. Studiamo ora il problema reciproco: data una superficie Σ di tipo R , su cui le u, v sono asintotiche e le $u \pm v = \text{cost.}$ sono un sistema coniugato R , si cerchino le superficie S a cui la congruenza K delle tangenti alle linee $u - v = \text{cost.}$ di Σ è completamente coniugata.

Contrassegnando con apici le quantità relative a Σ , noi potremo moltiplicare le coordinate x', y', \dots di un suo punto per un tale fattore che le coordinate di un punto di S sieno

$$x = x'_u + x'_v \quad \text{e analoghe.}$$

Escludiamo naturalmente il caso che S sia la seconda falda focale di K (cioè sia trasformata di Laplace di Σ). Per il teorema di Lévy sulla tra-

(1) Per la formola duale della (1) § 19, loc. cit., alla (5) soddisfano anche le prime tre coordinate x, y, z di un punto di S ; se ne deduce una nuova dimostrazione che la retta $(x x_u v)$ passa per l'origine.

(2) Posto $\pi_{ii} = 1$ nelle condizioni d'integrabilità, queste diventano (data S , cioè date β, γ, L, M) equazioni nella θ , che si riconoscono facilmente integrabili se $\beta_v = \gamma_u$, cioè se la superficie è R .

formazione delle equazioni di Laplace, l'equazione per il sistema coniugato della $u \pm v$ su Σ

$$x'_{uu} - x'_{vv} = (\theta' - \gamma') x' + (\beta' - \theta') x'_v + (p'_{11} - p'_{22}) x'$$

dovrà ammettere una soluzione ρ funzione di $u - v$; e, moltiplicando le x' per un opportuno fattore, potremo supporre $\rho = 1$; cosicchè $p'_{11} = p'_{22}$. È facile verificare che in tal caso le $u \pm v$ formano ancora un sistema coniugato sulla superficie S luogo del punto $x = x'_u + x'_v$. Le asintotiche di S , Σ si corrisponderanno se x_{uu} è combinazione lineare di x_u, x_v, x : ciò che un facile calcolo prova avvenire soltanto se $p'_{11u} + p'_{22v} = 0$. Dovrà dunque essere in conclusione

$$(6) \quad p'_{11} = p'_{22} = \varphi(u - v) \quad (\varphi \text{ funzione di } u - v).$$

Indichiamo con \bar{x} coordinate omogenee qualsiasi dei punti di Σ e con un soprassegno distingueremo i valori corrispondenti delle p, θ , ecc. Si dovrà cercare un fattore di proporzionalità ε tale che, posto $\bar{x} = \varepsilon x'$, le quantità \bar{p}'_{ii} corrispondenti alle x' soddisfino a (6). Si trova che dovrà essere (ricordo che $\bar{\beta} = \beta', \bar{\gamma} = \gamma'$):

$$\varepsilon_{uu} = \theta_u \varepsilon_u + \bar{\beta} \varepsilon_v + (\bar{p}_{11} - \varphi) \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon_{vv} = \bar{\theta}_v \varepsilon_v + \bar{\gamma} \varepsilon_u + (\bar{p}_{22} - \varphi) \varepsilon.$$

Tenuto conto delle condizioni d'integrabilità della teoria delle superficie, troviamo uguagliando i valori di $\varepsilon_{uu} \varepsilon_{vv}$

$$\varphi'(2\varepsilon_u + 2\varepsilon_v + [\bar{\beta} + \bar{\gamma} - \theta_u - \bar{\theta}_v] \varepsilon) = 0.$$

Se è nulla la quantità tra ($\cdot \cdot$), il punto $x = \left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)_u + \left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)_v$ descrive un trasformato di Laplace del sistema delle $u \pm v$ di Σ . Questo caso essendo escluso, sarà $\varphi' = 0$, cioè $p'_{11} = p'_{22} = \text{cost.}$ Ciò che si poteva anche dedurre dalle (6), tenuto conto delle condizioni d'integrabilità per la superficie Σ .

Come sopra, con una deformazione proiettiva di Σ , potremo ridurci al caso $p'_{11} = p'_{22} = 0$, cioè supporre p. es. $t' = \text{cost.}$, cosicchè il punto x descriverà il piano $t = 0$. Dunque le superficie S corrispondenti ad una Σ sono quelle che si riducono con una deformazione proiettiva di Σ ad un piano. Sono così risolti completamente i problemi proposti. Sembra ben notevole che le nuove trasformazioni qui studiate delle superficie R , così come avviene (loc. cit. § 54) per le trasformazioni ottenute mediante congruenze W , abbiano così intimi legami col problema delle deformazioni proiettive di tali superficie.

Matematica. — *La varietà delle forme binarie del 7° ordine a sesta spinta identicamente nulla.* Nota del Corrisp. G. FANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sopra l'elemento di numero atomico 61.* Nota del Corrisp. L. ROLLA e di LORENZO FERNANDES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla presenza del fluosilicato sodico e di quello di potassio tra i prodotti della attuale attività del Vesuvio.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e di G. CAROBBI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Solfati di cerio cerioso e tallio talloso.* Nota di F. ZAMBONINI e di S. RESTAINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *A proposito della scoperta di un presunto filone di roccia vulcanica postglaciale nei dintorni di Bressanone nell'Alto Adige.* Nota del Socio GIORGIO DAL PIAZ ⁽¹⁾.

Nel 1863 il prof. A. Pichler segnalava, nelle vicinanze del villaggio di Köfels sulla sinistra della Valle di Oetz, la presenza di una roccia finalmente bollosa, molto simile ad una lava scoriacea, che i valligiani conoscevano da lungo tempo ed indicavano col nome di pietra pomice (Bimsstein) ⁽²⁾.

(1) Comunicazione fatta all'Accademia nella seduta del 3 giugno 1926. Il manoscritto fu presentato per le stampe il 6 luglio 1926.

(2) PICHLER A., Comunicazione nelle « Verhandlungen d. k. k. geolog. Reichsanstalt ». Wien, 1863, p. 77.

Per il fatto che tutte le rocce costituenti i fianchi ed il fondo valle sono intensamente corrose e levigate dal ghiacciaio, mentre la massa scoriacea, molto fragile, di facile distruzione, sporgeva e ricopriva come una crosta il sottostante e ripulito gneiss, il Pichler fu condotto a ritenere che il fenomeno eruttivo fosse da riferire al periodo postglaciale.

La scoperta non poteva a meno di attirare l'attenzione di geologi e geografi, i quali però non furono tutti concordi nel giudicare il materiale pomiceo di natura vulcanica, non mancando chi lo ritenesse dovuto a cause fortuite (folgoriti) od a residui di antichi forni. Il sospetto assumeva per qualcuno consistenza di verità, per il fatto che morto il Pichler e smarrita la cognizione del punto dove erano stati fatti i primi scavi e messi in evidenza i rapporti fra roccia filoniana e roccia incassante, del materiale eruttivo non si conoscevano più che dei ciottoli e dei blocchi erratici sparsi sulla superficie del terreno, senza che si potesse stabilire la loro provenienza e tanto meno i rapporti di giacitura originaria. Ciò induceva a credere che il Pichler, per quanto buon osservatore, fosse stato tratto in inganno quando affermò che la pomice vetrosa, nerastra, si trovasse in posto strettamente connessa al gneiss del massiccio di Oetz ⁽¹⁾ e convalidava la tesi di quelli che nella scoria di Köfels vedevano invece un prodotto di vetrificazione superficiale e non una roccia vulcanica.

Passarono alcuni anni di silenzio senza che alla soluzione dell'originale problema venisse portato alcun altro elemento di fatto, quando per l'interessamento preso da alcuni scienziati, allo scopo di dirimere la questione, l'Accademia delle Scienze di Vienna diede incarico al dott. Hammer, attuale Direttore dell'Istituto Geologico austriaco, di recarsi sul sito e di assodare con sistematiche ricerche ed opportuni scavi la vera natura e l'età del materiale che aveva sollevato tanto contrasto di opinioni.

Le indagini e gli scavi eseguiti dal dott. Hammer nell'estate del 1923 dimostrarono nella forma più precisa ed assoluta che si tratta di un effettivo filone di roccia pomicea, di tipo liparitico, che s'intercala nella massa gneissica seguendo l'andamento dei banchi e che, per il legame genetico da esso presentato con un sistema di fratture postglaciali, è da riferirsi ad un'età molto recente ⁽²⁾.

Questi felici risultati, riconfermando la scoperta del Pichler, vengono a provare adunque come il vulcanismo alpino ebbe anche delle manifestazioni di assai recente data, forse di età appena appena preistorica.

(1) PICHLER A., *Zur Geognosie Tirols - II. Die Vulkanischen Reste von Köfels*. « Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt », Bd. XIII, p. 591. Wien, 1863.

(2) HAMMER W., *Ueber das Vorkommen jungvulkanischer Gesteine im Oetztal (Tirol) und ihr Alter*. « Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. Mathem. Naturhist. Klasse », Bd. 132. Abt. I, p. 329. Wien, 1924.

HAMMER W., *Ein Vorkommen jungvulkanischen Gesteins in den Tiroler Zentralalpen*. « Zeitschrift für Vulkanologie », Bd. VIII, p. 238. Berlin, 1925.

Non era ancora spenta si può dire l'eco della sensazionale scoperta della scoria eruttiva postglaciale di Köfels, quando nel fascicolo ultimamente uscito dei « Monatsberichte » della Società Geologica tedesca comparve un articolo del dott. v. Klebelsberg, professore di Geologia nell'Università di Innsbruck, col quale nel territorio compreso fra la Rienza e l'Isarco, non lungi da Bressanone, viene pure segnalata la presenza di rocce vulcaniche, scoriacee, di età indubbiamente assai recente, perchè inglobanti ciottoli morenici ⁽¹⁾.

Le favorevoli constatazioni dell'esistenza della lava postglaciale di Köfels facevano logicamente ritenere che il fenomeno non fosse localizzato esclusivamente al massiccio di Oetz, ma che di esso potessero esistere tracce più o meno manifeste anche in altre località, specialmente nella zona dei contatti tettonici od in quella delle radici, dove le intercalazioni magmatiche hanno di solito la loro più vasta e più frequente sede.

Nessuna sorpresa poteva venire quindi dalla nuova scoperta di Bressanone, ma sibbene un vivo desiderio di visitare le località e di esaminare il problema sul terreno, tanto più che la Nota pubblicata dal professore v. Klebelsberg, anzichè sviscerare la questione dando le prove dell'autentica natura filoniana della breccia scoriacea, si limitava a notizie sommarie e per le quali ulteriori e più estese indagini si rendevano a nostro avviso doppiamente opportune.

La Presidenza della Reale Accademia dei Lincei, riconosciuto il particolare interesse scientifico del problema che ora si presentava per l'Alto Adige, provvide ai mezzi necessari per ulteriori e più esaurienti indagini e volle affidare a me l'incarico di studiare la questione sul terreno in modo che dalle nuove ricerche ne uscissero meglio documentate la qualità e la giacitura della segnalata scoria vulcanica.

La località di affioramento della presunta roccia eruttiva, si trova a nord-est di Bressanone, a circa un'ora di cammino dalla città e precisamente sul dorso della seconda delle colline, procedendo da sud, che si allineano ad oriente del villaggio di Elvas (Elvaser Köpfe).

Io mi recai sul sito negli ultimi giorni dello scorso maggio e confesso che già da una prima visita all'indicata località delle colline di Elvas, compiuta assieme al dott. Vardabasso, ebbi l'impressione che la roccia vulcanica scoperta o descritta dal prof. v. Klebelsberg non abbia nulla a che fare con un prodotto eruttivo, ma che essa rappresenti il residuo di materiali detritici di superficie parzialmente cementati per fusione più o meno completa determinata da incendio provocato dall'uomo o da qualche altra causa fortuita. Come già osservò il v. Klebelsberg, la roccia di Elvas, che forma un irregolare e discontinuo banco poco o nulla sporgente dal terreno, largo al

(1) v. KLEBELSBERG R., *Ein Vorkommen jungvulkanischen Gesteins bei Brixen. (Südtirol)*. « Zeitschr. d. D. geol. Gesell. B. Monatsberichte », Bd. 77, p. 269. Berlin, 1926.

massimo un metro e lungo poco più di quattro, risponde ad una breccia costituita in grande maggioranza da pezzi di fillade in prevalenza angolosi, qualcuno arrotondato e da non rari ciottoli morenici di granito e di gneiss. Dall'esame in posto di questa breccia si nota chiaramente che essa non è dovuta ad una scoria vulcanica penetrata e risalita dalle profondità, ma sibbene che i singoli pezzi si sono cementati per vetrificazione del materiale interposto o più spesso per incipiente fusione delle parti superficiali dei singoli ciottoli che finirono col saldarsi fra loro.

Rompendo qualche pezzo di fillade si osserva infatti come il nucleo sia non di rado ancor fresco, mentre l'alterazione per riscaldamento va aumentando verso la periferia fino ad arrivare alla fusione delle parti superficiali ed alla quale è da attribuire, come si è detto, l'agglutinamento della massa.

È vero che in qualche punto, specialmente nelle parti più elevate del banco brecciato, si verifica la presenza di sostanza scoriacea, bollosa, vitrea, che ingloba abbondantemente il detrito filladico, granitico o sabbioso. Sono casi in cui per un più intenso riscaldamento alcuni ciottoli subirono una fusione completa o quasi completa, per modo che il prodotto liquido penetrando dall'alto al basso fra i detriti, concorse a determinare la cementazione degli elementi dando luogo alla breccia. Questo si verifica però, come si è detto, con particolare frequenza nelle parti superficiali e va attenuandosi verso il basso, mentre se si trattasse di un'autentica scoria di origine profonda, il fenomeno dovrebbe avere un andamento inverso.

Oltre a ciò osserveremo che non di rado nel materiale scoriaceo, che dovrebbe costituire il presunto magma eruttivo, si riscontrano le tracce degli originari ciottoli, con chiari ed indiscutibili indizi della primitiva struttura scistosa, per modo che è evidente come la ritenuta lava lungi dall'essere un prodotto vulcanico, non sia altro che della fillade più o meno perfettamente fusa.

Aggiungeremo in fine che il vasto arrossamento del terreno che si verifica in superficie tutto all'ingiro anche a qualche distanza, è fenomeno che non può essere attribuito all'influenza esercitata da un filone brecciato in cui la sostanza lavica si riduce ad una quantità veramente esigua. A Köpfel, come osservò l'Hammer, le azioni di metamorfismo di contatto esercitate dalla lava pomicea liparitica sulle superfici della roccia incassante (gneiss) sono letteralmente nulle anche dove il filone, costituente una massa unica e non una breccia, raggiunge una potenza di quaranta centimetri.

Supposto per ipotesi che la scoria cementante la breccia di Elvas fosse come a Köpfel di origine eruttiva, come poteva essa, così suddivisa, salutaria e poco potente come è, esercitare un'azione tanto energica da scorificare grossi ciottoli filladici e granitici e determinare inoltre in un certo spessore di detrito un'incipiente fusione per cui si ebbe l'agglutinamento in forma di breccia?

Il tipo di arrossamento dei ciottoli della breccia e del terreno circostante, dimostra chiaramente che l'avvenuto fenomeno di cottura ebbe luogo per un processo fortemente ossidante che non si può spiegare se non ammettendo uno svolgimento in superficie con largo intervento di correnti d'aria.

Quantunque il sospetto che non si trattasse di un fenomeno eruttivo avesse ormai acquistato in me valore di piena convinzione, per l'autorità del nome del prof. v. Klebelsberg, deciso sostenitore della natura vulcanica della breccia di Elvas, e per il fatto che effettivamente a non grande distanza, nella valle di Oetz, vennero riscontrate delle autentiche manifestazioni eruttive postglaciali, credetti prudente ed opportuno completare le mie ricerche ricorrendo anche a lavori di scavo allo scopo di constatare se effettivamente la massa scoriacea brecciata avesse presentato quella continuazione in profondità che è condizione necessariamente legata ad una origine endogena.

Per meglio mettere in evidenza i rapporti di giacitura della ritenuta roccia eruttiva furono aperte due larghe trincee fra loro pressochè normali, l'una parallelamente all'andamento del filone e l'altra in direzione trasversale.

Nell'eseguire gli scavi fu nettamente e ripetutamente constatato come la cementazione della breccia filladica per opera della ganga scoriacea interposta o per saldatura delle superfici di contatto dei singoli pezzi vada rapidamente attenuandosi verso il basso. Ad un certo punto la breccia diventa più o meno completamente incoerente ed i ciottoli filladici, per quanto ancora arrossati in superficie e coi granati in parte fusi, non presentano più alcuna traccia di scorificazione superficiale, mentre all'interno la roccia si è mantenuta fresca o venne assai poco alterata.

Alla profondità di ottanta centimetri cessa ogni traccia di breccia anche incoerente e per uno spessore variabile da dieci a trenta centimetri, secondo i punti, succede un irregolare letto di argilla rossa con qualche ciottolo appena appena arrossato in superficie.

Al di sotto fa immediato seguito l'argilla glaciale fresca, cioè inalterata, di colore giallastro, contenente pure dei ciottoli morenici.

Giunto con lo scavo a questo punto e constatata l'uniforme continuità dell'argilla fresca, inalterata, anche a livelli più bassi, per non lasciare intatta alcuna prova di controllo, stimai opportuno estendere maggiormente lo scavo in senso orizzontale al di sotto del banco brecciato, in modo da mettere a nudo l'intera base e constatare se la scoria presentasse qualche interna propaggine od insospettato legame con parti profonde.

Ebbene, come era da aspettarsi, dal nuovo scavo risultò che il banco di breccia filladica non presenta traccia alcuna di continuazione in profondità, ma poggia uniformemente sulle argille ciottolose, prima arrossate e poi gradualmente passanti a materiali freschi ed inalterati. È poi degno di men-

zione il fatto che i ciottoli più elevati contenuti in questo letto argilloso, cioè quelli che si trovano al passaggio fra l'argilla rossa e quella fresca sottostante, mostrano la faccia superiore leggermente arrossata, mentre la faccia inferiore non presenta la più lontana traccia di alterazione. La prova che l'azione termica si propagò dall'alto al basso e non dall'interno all'esterno non potrebbe essere adunque più chiara e manifesta.

Viene dimostrato con ciò, oltre che per le constatazioni esposte in precedenza, che la breccia di Elvas non continua in profondità come dovrebbe essere se si trattasse di un filone vero e proprio, ma costituisce un semplice letto superficiale poco esteso e di piccolo spessore.

Se la breccia sia stata prodotta da incendio di grosse cataste di legna, che di consueto si accumulano in determinati punti sui monti, oppure da tentativi di fusione o da altre cause fortuite, non ha qui importanza particolare, perchè non viene mutata per questo la natura del problema che vogliamo indagare.

Ciò che importa di mettere chiaramente in evidenza si è che tale scoria, nella quale non è raro il caso di riscontrare perfino delle impronte della superficie del legno spaccato, è di origine puramente superficiale, e non ha nulla a che fare con un prodotto vulcanico del quale non presenta nè le caratteristiche strutturali e tanto meno poi il tipo di giacitura.

La presenza di un filone eruttivo o di un Necks di età postglaciale nei dintorni di Bressanone, quale venne segnalato dal prof. v. Klebelsberg, avrebbe assunto certamente una grande importanza scientifica, ma purtroppo per ora nessun fatto ci autorizza a ritenere che la breccia di Elvas rappresenti un prodotto vulcanico.

Paleontologia. — *L'Elephas antiquus di Pignataro Interamna in Valle del Liri.* Nota del Socio G. DE LORENZO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Primi risultati della semina del melo « senza fiori ».* Nota del Socio B. LONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Di una classe di varietà caratterizzate per mezzo del parallelismo.* Nota di GIUSEPPE CORBELLINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le varietà riemanniane di cui si occupa la presente ricerca sono quelle dove è possibile di determinare sistemi di n congruenze di curve riferiti in modo che le direzioni di una qualsiasi di queste congruenze, uscenti dai punti di una medesima curva di ognuna delle congruenze rimanenti, siano parallele nel senso di Levi-Civita rispetto alla metrica della varietà.

Un esempio noto di varietà dove esistono siffatti sistemi di congruenze curvilinee è offerto dalle superficie ordinarie, sulle quali, come ha mostrato il Bianchi ⁽²⁾, ogni rete di Tchebychef soddisfa alla proprietà che le linee di un sistema tagliano secondo direzioni parallele le linee dell'altro.

Col crescere del numero n delle dimensioni della varietà, le condizioni analitiche traducenti la detta proprietà geometrica, aumentano molto rapidamente e già per $n = 3$ il loro verificarsi costituisce un carattere restrittivo. Tuttavia questa classe di varietà V_n gode di proprietà tanto semplici ed espressive, che ci è parsa non vana fatica l'espore.

Dopo qualche considerazione introduttiva (§§ 1-2), dimostro che date n congruenze riferite nel modo che si è detto rispetto al parallelismo, esistono n famiglie di ipersuperficie ognuna delle quali contiene le linee di $n - 1$ di tali congruenze (§ 3); tutte le ipersuperficie di una di queste famiglie sono applicabili fra di loro, anzi, l'esistenza delle n congruenze fruenti della proprietà supposta è caratteristica per le varietà che contengono n famiglie di ipersuperficie applicabili, con la condizione che ogni gruppo di $n - 1$ di queste famiglie passi per la congruenza congiungente i punti corrispondenti nell'applicabilità relativa all'ennesima famiglia (§§ 5-7); per ciascuna di queste famiglie le traiettorie congiungenti i punti corrispondenti nell'applicabilità appartengono ad una delle date congruenze e sulle curve di essa due ipersuperficie della famiglia intercettano archi di lunghezza costante (§ 4); talchè la varietà si può pensare generata in n modi diversi da una specie di traslazione parallela di una ipersuperficie contenuta in essa; assumendo come ipersuperficie coordinate queste ipersuperficie applicabili si rileva che ogni V_2 coordinata è una superficie di traslazione nel

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1926.

(2) Cfr. p. es. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1924, vol. II, parte II, p. 809.

senso di Bompiani (§§ 5-6), e che i simboli di Riemann calcolati per la forma quadratica corrispondente sono tutti nulli ad eccezione di quelli del tipo (rs, rs) (§§ 8-9).

1. - In una varietà riemanniana il quadrato dell'elemento lineare sia:

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^{(i)} dx^{(j)}.$$

Consideriamo in V_n n congruenze qualsiasi (ortogonali o no) indipendenti fra loro, che denoteremo con λ_i ed esse siano caratterizzate per mezzo dei parametri $\lambda_{ij}^{(r)} \equiv \frac{dx^{(r)}}{ds_i}$ delle loro direzioni. Per la supposta indipendenza il determinante $\|\lambda_{ij}^{(r)}\|$ non è nullo, perciò sarà lecito di considerare il sistema covariante le cui componenti $\lambda_{ij/r}$ sono gli elementi reciproci degli elementi $\lambda_{ij}^{(r)}$ rispetto al detto determinante. Sussisteranno le identità quadratiche:

$$(2) \quad \sum_i \lambda_{ij}^{(r)} \lambda_{h/r} = \delta_i^{(h)}$$

il noto simbolo $\delta_i^{(h)}$ indicando lo zero o l'unità secondo che è $i \neq h$ ovvero $i = h$. Giova far notare che solo nel caso di congruenze ortogonali, le $\lambda_{ij/r}$ coincidono con gli elementi del sistema reciproco del sistema $\lambda_{ij}^{(r)}$ rispetto alla metrica definita dalla (1).

Se indichiamo con $\lambda_{i/,s}^{(r)}$ le derivate prime covarianti delle $\lambda_{ij}^{(r)}$ rispetto alla variabile $x^{(s)}$, e deriviamo ambo i membri delle (2) nella direzione λ_k , si ottengono le nuove identità:

$$(3) \quad \sum_{rs} \lambda_{i/,s}^{(r)} \lambda_{h/r} \lambda_k^{(s)} + \sum_{rs} \lambda_{h/rs} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} = 0.$$

2. - Altrove ⁽¹⁾ ho determinato le condizioni affinché le n congruenze di curve λ_i possano riguardarsi come risultanti dall'intersezione di n famiglie di ∞^1 ipersuperficie, o, ciò che fa lo stesso, affinché le n congruenze siano atte a definire un sistema di coordinate della V_n . Sulla base dei risultati colà conseguiti, e facendo intervenire la metrica (1), l'espressione analitica di queste condizioni, che risultano necessarie e sufficienti, è fornita dal sistema di equazioni (non tutte indipendenti fra loro):

$$(4) \quad \lambda_{h/j} \{ \lambda_{h/ik} - \lambda_{h/ki} \} + \lambda_{h/i} \{ \lambda_{h/kj} - \lambda_{h/jk} \} + \lambda_{h/k} \{ \lambda_{h/ji} - \lambda_{h/ij} \} = 0$$

$$(h, j, k, i = 1, 2, \dots, n).$$

(1) Cfr. *Sopra i sistemi di coordinate di una varietà qualunque*, nei «Rend.» di questa R. Accademia, Classe di Scienze, vol. XXXII, serie 5^a, 1^o sem., fasc. 3, 1923, p. 112 e segg.

Siano ora i' e k' due nuovi indici diversi da h ; moltiplicando per il prodotto $\lambda_{i'j'}^{(i)} \lambda_{k'j'}^{(k)}$, sommando rispetto a i e k con ovvie trasformazioni si ricava

$$\sum_i^n \lambda_{h/rs} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} - \sum_{rs} \lambda_{h/rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_i^{(s)} = 0 \quad \begin{matrix} (h, i, k = 1, 2, \dots, n) \\ (i \neq h, \quad h \neq k). \end{matrix}$$

Tenendo presenti le (3), a queste equazioni si può attribuire la forma:

$$(4') \quad \sum_r \lambda_{h,r} \left\{ \sum_i^n \lambda_{i,r}^{(r)} \lambda_k^{(s)} - \sum_i^n \lambda_{k,r}^{(r)} \lambda_i^{(s)} \right\} = 0 \quad \begin{matrix} (h, i, k = 1, 2, \dots, n) \\ (i \neq h), \quad (h \neq k). \end{matrix}$$

Il carattere puramente algebrico delle trasformazioni indicate ci assicura *a priori* che dalle (4') si può risalire alle (4).

3. — Premesse queste considerazioni di carattere generale conviene specializzare la natura metrica della varietà e delle n congruenze λ_i supponendo che entro la V_n sia possibile di sceglierle in modo che per due qualsivogliano indici i, k diversi fra loro, una generica linea della congruenza λ_i sia incontrata dalle linee della congruenza λ_k secondo direzioni parallele nel senso di Levi-Civita.

Ora le condizioni di parallelismo si possono scrivere:

$$(5) \quad \sum_i^n \lambda_{k/s}^{(r)} \lambda_i^{(s)} = 0 \quad (i, k, r = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq k)$$

Verificandosi queste equazioni, le condizioni (4') sono tutte soddisfatte: invero, per $i = k$ esse si riducono ad identità, mentre per $i \neq k$ esse sono soddisfatte in virtù delle (5).

Perciò le n congruenze λ_i possono riguardarsi come le intersezioni di n famiglie di ipersuperficie.

4. — Queste famiglie di ipersuperficie godono di una proprietà notevole che passeremo a porre in rilievo.

Se si fissa una congruenza λ_k e si scelgono due ipersuperficie generiche appartenenti al sistema di ipersuperficie determinato dalle $n - 1$ congruenze rimanenti, la lunghezza dell'arco delle curve della congruenza λ_k intercettato fra queste due ipersuperficie è costante; in altri termini le ipersuperficie di ciascun sistema si possono pensare come ottenute da una qualunque di esse (ipersuperficie di partenza), distaccando archi eguali sulle curve di una delle date congruenze a partire dall'intersezione con l'ipersuperficie di partenza.

Basterà naturalmente dimostrare che questa proprietà sussiste per due ipersuperficie infinitamente vicine.

Se la funzione:

$$f_k(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}),$$

assume valori costanti per ogni ipersuperficie determinata dalle congruenze λ_b ($b = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$) la f_k verificherà il sistema completo:

$$f_{k,r} = \rho_k \lambda_{k,r}$$

essendo ρ_k un coefficiente di proporzionalità che, *a priori*, apparisce funzione del posto; e si vede subito che esso esprime la derivata della f_k nella direzione delle linee della congruenza λ_k ; inverò si ha:

$$\frac{df_k}{ds_k} \equiv \sum_1^n f_{k/r} \lambda_k^{(r)} = \rho_k \sum_1^n \lambda_{k/r} \lambda_k^{(r)} = \rho_k.$$

Per provare che tale derivata dipende soltanto dall'ampiezza dello spostamento nella direzione della congruenza λ_k , basterà far vedere che il fattore ρ_k è costante rispetto agli spostamenti tangenti alla ipersuperficie considerata. All'uopo calcoliamo la sua derivata nella direzione delle $n-1$ congruenze λ_b ($b = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$):

$$\frac{d\rho_k}{ds_b} \equiv \sum_1^n \rho_{k/s} \lambda_b^{(s)} = \sum_1^n f_{k/rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_b^{(s)} + \sum_1^n f_{k/r} \sum_1^n \lambda_{k/s}^{(r)} \lambda_b^{(s)}.$$

L'ultimo termine a secondo membro è nullo per il supposto parallelismo (5); ma tale è anche il primo termine del secondo membro perchè, potendosi permutare l'ordine delle derivazioni covarianti della funzione f_k , con l'aggiunta di un termine che è nullo per il supposto parallelismo, esso dà luogo all'identità:

$$\sum_1^n f_{k/rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_b^{(s)} + \sum_1^n f_{k/s} \sum_1^n \lambda_{b/r}^{(s)} \lambda_k^{(r)} \equiv \frac{d}{ds_k} \sum_1^n f_{k/s} \lambda_b^{(s)}.$$

Ora poichè f_k è costante per spostamenti tangenti alle direzioni λ_b ($b = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$) il sommatorio a secondo membro è nullo in tutti i punti di V_n e perciò è tale anche la sua derivata. Resta dunque provato l'asserto.

5. - Il risultato del § 3 ci consente di eseguire in V_n la trasformazione di coordinate:

$$\bar{x}^{(i)} = f_i(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$$

che muta le linee parametriche x_i in quelle delle n congruenze soddisfacenti alle ipotesi (5), e sia:

$$(I') \quad ds^2 = \sum_{ib}^n \bar{g}_{ib} d\bar{x}^{(i)} d\bar{x}^{(b)}$$

il quadrato dell'elemento lineare nelle nuove coordinate.

Proponiamoci la ricerca delle condizioni che saranno verificate dai nuovi coefficienti \bar{g}_{ib} .

A tale scopo ricordiamo che in un punto generico P l'angolo θ_{ik} fra le direzioni delle congruenze λ_i e λ_k è fornito, nelle nuove coordinate, dalla relazione :

$$(6) \quad \cos \theta_{ik} = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

Ora il teorema del paragrafo precedente mostra che il rapporto $\frac{d\bar{x}^{(i)}}{ds_i}$ è funzione della sola variabile $\bar{x}^{(i)}$ e perciò tale sarà anche \bar{g}_{ii} , che, come è noto, può rendersi eguale ad 1 in virtù di una ulteriore trasformazione che supporremo effettuata.

Ricordiamo inoltre che il parallelismo conserva gli angoli, cioè che, se si prende h diverso da i e da k e si considera la linea della congruenza λ_h uscente da P, nei punti di essa le direzioni delle congruenze λ_i e λ_k formano fra loro l'angolo costante θ_{ik} ; cioè la derivata di θ_{ik} rispetto ad $\bar{x}^{(h)}$ è nulla. Perciò, mediante una semplice derivazione, la formula (6) dà :

$$(7) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial \bar{x}^{(h)}} = 0 \quad (i \neq h; h \neq k).$$

Si conclude che i coefficienti \bar{g}_{ik} della nuova forma fondamentale sono funzioni delle sole variabili $\bar{x}^{(i)}$ ed $\bar{x}^{(k)}$.

Reciprocamente, se ciò si verifica, sussiste fra le linee parametriche la relazione di parallelismo (5): invero dalla definizione formale dei simboli di Christoffel segue per la (7) che essi sono nulli quando hanno gli indici superiori diversi fra loro. In forza di questa circostanza e delle (7) si trova facilmente che gli effettivi valori dei parametri delle linee coordinate verificano identicamente le equazioni (5).

6. — A questo punto è facile convincersi che ogni superficie V_2 determinata da tutte le linee della congruenza λ_i che si appoggiano ad una medesima linea della congruenza λ_k è una superficie di traslazione nel senso di Bompiani⁽¹⁾; infatti le equazioni di ciascuna di queste V_2 si ottengono eguagliando a costanti $n - 2$ nuove coordinate $\bar{x}^{(i)}$; ma una siffatta posizione riduce il quadrato dell'elemento lineare $(1')$ alla forma di Tchebychef, e ciò è sufficiente per provare l'asserto.

Si badi che questa osservazione non è invertibile, perchè, più in generale, si può dire che le V_2 coordinate sono riferite ad una rete di Tchebychef tutte le volte che i coefficienti dei termini quadratici della forma fondamentale di V_n sono eguali ad 1, senza nessuna limitazione sulla natura dei termini rettangoli.

(1) E. BOMPIANI, *Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes*, Paris, « Comptes rendus », to. 169, p. 840 e segg.

7. - Più notevole è la circostanza che la forma quadratica (1') soddisfacente alle (7), è caratteristica per le varietà V_n che possiedono n famiglie di ipersuperficie tali che le ipersuperficie di una medesima famiglia sono fra loro applicabili, con la condizione che ogni gruppo di $n - 1$ di queste famiglie passi per la congruenza congiungente i punti corrispondenti nell'applicabilità relativa all'ennesima famiglia; invero per $\bar{x}^{(h)} = \text{cost.}$ la (1') si riduce ad una forma quadratica fra $n - 1$ differenziali nella quale per le (7) non figura il valore particolare della costante introdotta. Inversamente, se la varietà V_n contiene una serie di ipersuperficie fra loro applicabili, assumendo le linee congiungenti i punti corrispondenti in questa applicabilità come linee $\bar{x}^{(h)}$ e queste ipersuperficie come $\bar{x}^{(h)} = \text{cost.}$, il quadrato del loro elemento lineare deve risultare indipendente da $\bar{x}^{(h)}$ e poichè la stessa osservazione si può fare successivamente per tutte le altre serie di ipersuperficie, seguono le condizioni (7).

8. - Rileviamo infine una proprietà differenziale del secondo ordine espressa dall'annullarsi di alcuni simboli di Riemann covarianti (rs, tu) formati con i coefficienti della forma quadratica (1'). Giova all'uopo di richiamare la formula di Pérès sulla traslazione infinitesima di un vettore secondo la legge del parallelismo.

Sia dato in V_n un punto P e si considerino due vettori distinti v e w formanti fra loro l'angolo α e due direzioni ξ ed η uscenti da P e formanti fra loro l'angolo θ ($\theta \neq 0$). Sulla superficie geodetica individuata dalle direzioni ξ ed η si tracci un ciclo infinitesimo passante per P e racchiudente su questa superficie geodetica l'area $D\Gamma$, indi si trasporti per parallelismo il vettore v lungo questo ciclo fino a ritornare in P.

Il divario $D\alpha$ fra gli angoli formati dal vettore w con le due diverse determinazioni del vettore v è fornito dalla nota formula (1)

$$D\alpha = \frac{-D\Gamma}{\sin \alpha \sin \theta} \sum_i^n (ij, hl) v^{(i)} w^{(l)} \xi^{(h)} \eta^{(l)}.$$

Facciamo coincidere i quattro vettori v, w, ξ, η , ordinatamente con le direzioni delle congruenze $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t, \lambda_u$, con le condizioni $r \neq s, t \neq u$; si avrà (con ovvio significato del simbolo $D\alpha_{rs, tu}$):

$$(8) \quad D\alpha_{rs, tu} = \frac{-D\Gamma}{\sin \alpha_{rs} \sin \theta_{tu}} \sum_i^n (ij, hl) \lambda_r^{(i)} \lambda_s^{(j)} \lambda_t^{(h)} \lambda_u^{(l)}.$$

Ora, alla superficie geodetica di polo P individuata dalle direzioni λ_t e λ_u , per il carattere infinitesimale della questione, possiamo sostituire la superficie coordinata V_2 , alla quale appartengono le linee coordinate λ_t e λ_u

(1) Cfr. p. es. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925, p. 220.

uscenti da P; possiamo inoltre supporre che il ciclo infinitesimo in questione sia una maglia del reticolo formato su tale V_2 dalle linee coordinate λ_t e λ_u ; se si aggiungono le ulteriori limitazioni $r \neq t$, $r \neq u$, per la nostra ipotesi (5) le direzioni della congruenza λ_r uscenti dai vertici di questa maglia sono tutte parallele fra loro (rispetto al contorno), talchè l'incremento $D\alpha_{rs, tu}$ deve essere manifestamente nullo. Si ricava quindi l'equazione:

$$\sum_i^n (ij, hl) \lambda_r^{(i)} \lambda_s^{(j)} \lambda_t^{(h)} \lambda_u^{(l)} = 0 \quad (r \neq t \ ; \ r \neq u).$$

Siccome poi per le coordinate $(1')$ sussistono le eguaglianze:

$$\lambda_k^{(r)} = \frac{\delta x^{(r)}}{\delta x^{(k)}}$$

le formule che esprimono la relazione di covarianza fra i simboli di Riemann calcolati per le coordinate (1) e per le coordinate $(1')$ si possono scrivere:

$$(\overline{rs, tu}) = \sum_i^n (ij, hl) \lambda_r^{(i)} \lambda_s^{(j)} \lambda_t^{(h)} \lambda_u^{(l)}.$$

Dal confronto di questa formula con l'equazione precedente si ricava:

$$(9) \quad (\overline{rs, tu}) = 0 \quad (r \neq t \ , \ r \neq u).$$

È questa la relazione differenziale del secondo ordine che avevamo annunciata.

Tenendo conto della emisimmetria dei simboli di Riemann, saranno dunque diversi da zero soltanto quelli nei quali ciascun indice della prima coppia è eguale ad un indice della seconda coppia, cioè quelli del tipo $(\overline{rs, rs})$ per $r \neq s$.

9. - Inversamente se esiste in V_n un sistema di coordinate per il quale siano verificate le (9), si conchiude che $D\alpha_{rs, tu} = 0$. Invero la formula di Pérès (8) scritta per tali coordinate, cioè ponendo:

$$\lambda_r^{(i)} = \frac{\delta_r^{(i)}}{\sqrt{g_{rr}}}$$

diviene:

$$D\alpha_{rs, tu} = (\overline{rs, tu}) \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \frac{1}{\sqrt{g_{ss}}} \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \frac{1}{\sqrt{g_{uu}}}.$$

Ora appunto se si prende $r \neq t$, $r \neq u$, si ottiene in corrispondenza per le (9) $D\alpha_{rs}, tu = 0$.

Tuttavia non apparisce che in forza delle (9) le direzioni della congruenza λ_r uscenti dai punti della V_2 su cui giacciono le linee coordinate λ_t e λ_u , siano parallele fra loro secondo qualche famiglia di linee appartenenti alla V_2 . Ciò dipende essenzialmente dalla circostanza che le equazioni differenziali (9) sono di ordine superiore rispetto alle equazioni (5), sulle quali è basata la nostra ricerca.

Matematica. — *Les paramètres locaux dans une variété de Riemann.* Nota di V. HLAVATÝ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Imaginons une variété de Riemann V_n à n dimensions. Désignons par x^ν ses paramètres, par $g_{\lambda\mu}$ son tenseur métrique et par $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ les symboles de Christoffel $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\lambda\mu} \right)$. Pendant la transformation $'x = 'x(x)$, $\left[\left\| \frac{\partial 'x}{\partial x} \right\| \neq 0 \right]$ des paramètres, les $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ se transforment d'après

$$(1) \quad 'T_{\omega\pi}^\alpha Q'_\alpha = Q_\omega^\lambda Q_\pi^\mu \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + Q_{\omega\pi}^\nu, \quad \left(Q'_\alpha = \frac{\partial x^\nu}{\partial 'x^\alpha}, \quad Q'_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial 'x^\alpha \partial 'x^\beta} \right).$$

De là résultent les formules telles que

$$(2) \quad 'T_{\omega\pi, \rho}^\alpha Q'_\alpha + 'T_{\omega\pi}^\alpha Q'_{\alpha\rho} = 2 Q_\omega^\lambda Q_\pi^\mu \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + Q_\omega^\lambda Q_\pi^\mu Q'_\rho \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + Q_{\omega\pi\rho}^\nu$$

avec $'T_{\omega\pi, \rho}^\alpha = \frac{\partial}{\partial 'x^\rho} 'T_{\omega\pi}^\alpha$, et analogiquement pour $'T_{\omega\pi, \rho\sigma}^\alpha$, $'T_{\alpha\pi, \rho\sigma\varphi}^\alpha$, ... etc.

Supposons que l'on puisse développer la transformation inverse $x = x('x)$ au point examiné P de V_n

$$(3) \quad x^\nu = ('x^\nu)_0 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \left(Q_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^\nu \right)_0 'x^{\alpha_1} \dots 'x^{\alpha_j}.$$

Nous introduirons les « paramètres locaux », en fixant les coefficients $(Q_{\lambda\alpha_1 \dots \alpha_s}^\nu)_0$ ($s = 1, \dots$) de telle manière que les relations

(1) Nella seduta del 20 giugno 1926.

$$(4) \quad a) \frac{\partial}{\partial x^\omega} g_{\lambda\mu} = 0 \quad , \quad b) \Gamma_{(\lambda\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s)}^{(1)} = 0$$

soient satisfaites en P. C'est toujours possible d'après les formules (1), (2), ... etc. Dans ce qui suit nous ferons usage de ces paramètres, pour : I. développer le tenseur métrique de V_n et II. pour développer les coordonnées d'une courbe quelconque de V_n au voisinage de P qui est un point régulier et pour V_n et pour la courbe examinée.

Quant au développement de $g_{\lambda\mu}$, il est évident a priori que les coefficients de la série cherchée se réduisent aux combinaisons de $g_{\lambda\mu}$, de l'afineur de Riemann-Christoffel (voir plus bas) et de ses dérivations covariantes successives. C'est la conséquence du théorème⁽²⁾ « de réduction » (« Reduktionssatz »)⁽³⁾ d'après lequel les invariants différentiels intrinsèques de V_n ne se composent que de $g_{\lambda\mu}$, de l'afineur de Riemann-Christoffel et de ses dérivations covariantes successives.

I.

a) Supposons que l'on puisse développer le tenseur métrique $g_{\lambda\mu}$ au voisinage infiniment petit du point P

$$(5) \quad g_{\lambda\mu} = (g_{\lambda\mu})_0 + \sum p! (g_{\lambda\mu, \alpha_1 \dots \alpha_p})_0 x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_p} \quad , \quad \left(g_{\lambda\mu, \alpha_1 \dots \alpha_p} = \frac{\partial^p g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_p}} \right)$$

et trouvons les valeurs des coefficients $(g_{\lambda\mu, \alpha_1 \dots \alpha_p})_0$. En supprimant l'accent, on trouve au point examiné d'après 4 a) pour φ^ν arbitraire (vecteur, ou non)

$$(6) \quad \begin{cases} g_{\mu\lambda, \alpha} = 0 & , & g_{\mu\lambda, \alpha\beta} = g_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\alpha, \beta}^\nu + g_{\nu\mu} \Gamma_{\lambda\alpha, \beta}^\nu \\ g_{\mu\lambda, \alpha\beta\gamma} = g_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\alpha, \beta\gamma}^\nu + g_{\nu\mu} \Gamma_{\lambda\alpha, \beta\gamma}^\nu \\ \varphi^\alpha \varphi^\beta \varphi^\gamma \varphi^\delta g_{\mu\lambda, \alpha\beta\gamma\delta} = \varphi^\alpha \varphi^\beta \varphi^\gamma \varphi^\delta \left[g_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\alpha, \beta\gamma\delta}^\nu + g_{\nu\mu} \Gamma_{\mu\alpha, \beta\gamma\delta}^\nu + \right. \\ \left. + 3 g_{\nu\lambda, \alpha\beta} \Gamma_{\mu\gamma, \delta}^\nu + 3 g_{\nu\mu, \alpha\beta} \Gamma_{\lambda\gamma, \delta}^\nu \right] , \end{cases}$$

(1) Si $N_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ est une expression quelconque, $N(\lambda_1 \dots \lambda_p)^\nu$ désigne la somme de $p!$ permutations différentes, divisée par $\frac{1}{p!}$.

(2) G. RICCI, T. LEVI-CIVITA, *Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications*, « Math. Ann. », Bd. 54, p. 162.

(3) Voir par exemple WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, 1923, Noordhoff, p. 350, et SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, 1924, Springer, p. 101. (Pour la décomposition de l'afineur de Riemann-Christoffel en « affineurs irréductibles » voir CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine* ..., « Ann. Éc. Norm. », 3^e série, t. 42, 1925, et CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann*, « Mémoires des sc. Math. », F. IX).

tandis que 4 b) nous mènent aux formules

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = 0 \quad , \quad \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} (2 \Gamma_{\mu\alpha, \beta}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\beta, \mu}^{\nu}) = 0 \\ \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} (\Gamma_{\mu\alpha, \beta\gamma}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\mu}^{\nu}) = 0 \quad , \quad \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \varphi^{\delta} (2 \Gamma_{\mu\alpha, \beta\gamma\delta}^{\nu} + 3 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta\mu}^{\nu}) = 0 \end{array} \right.$$

valables en P.

ab) Désignons par $K_{\omega}^{\dots\nu}$ l'affineur de Riemann-Christoffel

$$(8) \quad K_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} = \Gamma_{\lambda\omega, \mu}^{\nu} - \Gamma_{\lambda\mu, \omega}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\omega}^{\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} \Gamma_{\lambda\omega}^{\alpha}$$

et par ∇_{μ} le symbole de la dérivée covariante par rapport à $g_{\lambda\mu}$. Les paramètres locaux nous donnent d'après (7) et (8)

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} K_{\alpha\mu\beta}^{\dots\nu} = -3 \Gamma_{\mu\alpha, \beta}^{\nu} \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \quad , \quad \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \nabla_{\alpha} K_{\beta\mu\gamma}^{\dots\nu} = -2 \Gamma_{\mu\alpha, \beta\gamma}^{\nu} \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \\ \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \varphi^{\delta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} K_{\gamma\mu\delta}^{\dots\nu} = -\varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \varphi^{\delta} \left(\frac{5}{3} \Gamma_{\mu\alpha, \beta\gamma\delta}^{\nu} + \frac{2}{9} K_{\alpha\beta\gamma}^{\dots\nu} K_{\gamma\mu\delta}^{\dots\nu} \right) \end{array} \right.$$

Or en tenant compte de (6) et (9), on obtient en P

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} g_{\mu\lambda, \alpha\beta} = -\frac{2}{3} \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} K_{\alpha\mu\beta\lambda} \quad , \quad \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} g_{\mu\lambda, \alpha\beta\gamma} = -\varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \nabla_{\alpha} K_{\beta\mu\gamma\lambda} \\ \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \varphi^{\delta} g_{\mu\lambda, \alpha\beta\gamma\delta} = \varphi^{\alpha} \varphi^{\beta} \varphi^{\gamma} \varphi^{\delta} \left[-\frac{6}{5} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} K_{\gamma\mu\delta\lambda} + \frac{16}{15} K_{\alpha\mu\beta\gamma}^{\dots\nu} K_{\gamma\lambda\delta\rho}^{\dots\nu} \right] \end{array} \right.$$

Il nous reste à choisir les coefficients $(Q_{\alpha}^{\nu})_0$. Nous en fixons $\binom{n+1}{2}$ de telle manière qu'il soit en P

$$g_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu} (= \text{tenseur métrique eucl.}).$$

Si l'on supprime l'accent, on peut écrire $e_{\lambda\mu}$ au lieu de $(g_{\lambda\mu})_0$ dans (5). En substituant les valeurs trouvées dans cette équation, on obtient

$$\boxed{g_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} x^{\alpha} x^{\beta} K_{\alpha\mu\beta\lambda} - \frac{1}{3!} x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} \nabla_{\alpha} K_{\beta\mu\gamma\lambda} + \frac{1}{5!} x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} x^{\delta} \left(-6 \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} K_{\gamma\mu\delta\lambda} + \frac{16}{3} K_{\alpha\mu\beta\gamma}^{\dots\nu} K_{\gamma\lambda\delta\rho}^{\dots\nu} \right) + \dots}$$

Cette formule met en évidence le développement du carré de la longueur d'un vecteur de V_n . Remarquons encore que dans ce cas le dernier des membres à droite donne naissance à l'invariant I de M. Bompiani⁽¹⁾.

(1) E. BOMPIANI, *Studi sugli spazi curvi*, Venezia, 1921, I, p. 377.

La formule moins précise

$$g_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} x^\alpha x^\beta K_{\alpha\mu\beta\lambda}$$

est due à Riemann. Depuis la publication de son « Habilitationsschrift » (soutenu le 10 juin 1854, Göttingen) elle est souvent citée. Nous croyons avoir suffisamment démontré, comment les paramètres locaux nous peuvent être utiles pour le développement de $g_{\lambda\mu}$.

II.

Désignons par i^v le vecteur d'unité tangent d'une courbe $x^v(s)$ (s = l'arc) dans V_n , par j_{k+1}^v son k -ième vecteur d'unité normal et par k_p sa p -ième courbure. Les formules de Frenet

$$i^\alpha \nabla_\alpha j_l^v = j_{l+1}^v k_l - j_{l-1}^v k_{l-1}^{(1)}, \quad (l = 1, \dots, n; \quad j_1^v = i^v; \quad k_0 = k_n = 0)$$

nous permettent de trouver les coefficients de la série

$$x^v(s) = (x^v)_0 + \sum \frac{s^p}{p!} \left(\frac{d^p x^v}{ds^p} \right)_0.$$

On a d'abord

$$\begin{aligned} x^{v'} &= i^v, & i^\alpha \nabla_\alpha i^v &= x^{v''} + \Gamma_{\lambda\mu}^v x^{\lambda'} x^{\mu'} = k_1 j_2^v \\ (i^\alpha \nabla_\alpha)^2 i^v &= x^{v'''} + \Gamma_{\lambda\mu, \omega}^v x^{\lambda'} x^{\mu'} x^{\omega'} + 2 \Gamma_{\lambda\mu}^v x^{\lambda'} x^{\mu'} x^{\omega'} + \Gamma_{\lambda\mu}^v k_1 j_2^{\lambda} x^{\mu'} = \\ &= k_1 k_2 j_3^v + k_1' j_2^v - k_1^2 j_1^v, & \left(\frac{d}{ds} (\dots) \right) &= (\dots)' \end{aligned}$$

d'où il suit en paramètres locaux en P

$$x^{v'} = i^v, \quad x^{v''} = i^\alpha \nabla_\alpha i^v = k_1 j_2^v, \quad x^{v'''} = (i^\alpha \nabla_\alpha)^2 i^v = k_1 k_2 j_3^v + k_1' j_2^v - k_1^2 j_1^v.$$

En poursuivant la dérivation on parvient aux équations

$$\begin{aligned} x^{v''''} &= (i^\alpha \nabla_\alpha)^3 i^v + K_{121}^{\dots v} k_1, & x^{v'''''} &= (i^\alpha \nabla_\alpha)^4 i^v + 2 k_1 \nabla_1 K_{121}^{\dots v} - \\ &- 3 k_1^2 K_{121}^{\dots v} + \frac{7}{3} K_{1\mu 1}^{\dots v} (i^\alpha \nabla_\alpha)^2 i^\mu. \end{aligned}$$

(1) STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* ..., Berlin, 1922, p. 76.

valables en P. (On a posé pour les composantes orthogonales d'un affineur $V_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ en général $V_{a_1 \dots a_r} = j_{a_1}^{\lambda_1} \dots j_{a_r}^{\lambda_r} V_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$). Elles nous mènent à la formule

$$x^v(s) = s i^v + \frac{s^2}{2!} i^\alpha \nabla_\alpha i^v + \frac{s^3}{3!} (i^\alpha \nabla_\alpha)^2 i^v + \frac{s^4}{4!} \left[(i^\alpha \nabla_\alpha)^3 i^v + k_1 K_{121}^{\dots v} \right] + \\ + \frac{s^5}{5!} \left[(i^\alpha \nabla_\alpha)^4 i^v + 2 k_1 \nabla_1 K_{121}^{\dots v} - 3 k_1^2 K_{212}^{\dots v} + \frac{7}{3} K_{1\mu 1}^{\dots v} (i^\alpha \nabla_\alpha)^2 i^\mu \right] + \dots$$

valable au voisinage infiniment petit du point P ($x^v = 0$, $s = 0$). De là résulte la formule pour la distance S du point infiniment voisin de P sur $x^v(s)$

$$S^2 = s^2 - \frac{s^4}{4!} 2 k_1 - \frac{s^5}{5!} 5 (k_1^2)' + \frac{s^6}{6!} 2 \left[k_1^2 (k_1^2 + k_2^2) - 8 k_1'^2 - 9 k_1 k_1'' - 3 k_1^2 K_{1212} \right] + \dots$$

qui laisse clairement voir le rôle de $K_{\omega\mu\lambda}^{\dots v}$ dans le développement pour S^2 d'une courbe dans V_n , ou dans R_n (c'est-à-dire V_n avec $K_{\omega\mu\lambda}^{\dots v} = 0$).

Matematica. — *Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet.* Nota di J. SOULA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio VOLTERRA.

Soit une série de Dirichlet

$$(1) \quad f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

où les exposants positifs croissent et croissent indéfiniment avec n . Si l'on se donne les exposants λ_n , peut-on faire choix des coefficients a_n de telle façon que la série possède une abscisse de convergence finie et que la fonction analytique $f(s)$ soit prolongeable au delà de la droite de convergence?

On sait que, si les exposants λ_n croissent très vite, si $\frac{\lambda_n}{n}$ croît indéfiniment par exemple, la droite de convergence est toujours coupure essentielle pour $f(s)$: c'est là le théorème des lacunes qui a été étendu récemment aux séries de Dirichlet. D'autre part, pour les séries de Dirichlet proprement dites ($\lambda_n = \log n$), pour les séries de Taylor ($\lambda_n = n$), la droite de convergence n'est pas toujours coupure; il arrive même que la fonction $f(s)$ est régulière en tout point à distance finie de la droite de convergence (exemple: la fonction $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$).

(1) Nella seduta del 20 giugno 1926.

Je voudrais démontrer ici que ces particularités ne tiennent pas à la nature arithmétique de ces deux suites ($\lambda_n = \log n$ et $\lambda_n = n$), mais à la régularité de leurs croissances.

I. — Plus exactement, voici le théorème que je vais démontrer: si $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ est borné, il existe une fonction de la forme (1) qui est holomorphe au point où sa droite de convergence coupe l'axe réel.

Je traite d'abord la question en supposant qu'il existe un nombre λ tel que les λ_n vérifient

$$n\lambda \leq \lambda_n < (n+1)\lambda, \quad \lambda_n - \lambda_{n-1} > a > 0,$$

et je considère la fonction

$$\Phi(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Les propriétés de cette fonction s'établissent par comparaison avec celles de $\sin \pi u$; des calculs de ce genre ont été souvent donnés⁽¹⁾ et, dans un mémoire qui paraîtra bientôt, je démontre les propriétés suivantes:

1. Soit x la partie réelle de u , si elle est positive et si l'on désigne par m le nombre entier tel que $\lambda_m < x < \lambda_{m+1}$, le quotient

$$\left| \frac{(x - \lambda_{m-1})(x - \lambda_m)(x - \lambda_{m+1})(x - \lambda_{m+2})}{\Phi(u)} \right|$$

est borné.

2. On déduit de là que $\left| \frac{1}{\Phi'(\lambda_m)} \right|$ est borné.

3. Sur le rayon issu de l'origine et d'argument θ , le quotient

$$\left| \frac{e^{\frac{\pi \sin \theta r}{\lambda}}}{\Phi(re^{i\theta})} \right|$$
 admet une borne indépendante de r .

A ces propriétés je joindrai la suivante:

4. $|\Phi'(u)e^{-\varepsilon|u|}|$ est borné pour u réel et positif. (La démonstration résulte immédiatement des méthodes indiquées dans le mémoire signalé plus haut).

Je considère l'intégrale

$$F(s) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-\frac{s}{u}}}{u^2 \Phi\left(\frac{1}{u}\right)} du$$

où $s = x + iy$ est un nombre quelconque et où σ est le contour situé dans le plan de la variable $u = re^{i\theta}$ qui limite le secteur

$$(S) \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad r \leq r_0.$$

(1) Par exemples: CARLSON, «Math. Annalen», 1919, Bd. 79.

Si le point u est sur le côté rectiligne du secteur qui fait l'angle α avec l'axe réel, on a

$$\left| \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^2 \Phi\left(\frac{1}{u}\right)} \right| < A \frac{e^{-\frac{1}{r}(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}}{r^2 e^{\frac{\pi \sin \alpha}{\lambda r}}}, \quad (A \text{ constante positive}),$$

de sorte que cette expression est bornée si

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha + \frac{\pi}{\lambda} \sin \alpha > 0.$$

On trouverait de même que la quantité sous le signe somme est de module borné quand l'argument de u est égal à $-\alpha$ si

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha + \frac{\pi}{\lambda} \sin \alpha > 0.$$

L'intégrale existe donc dans la région du plan de la variable $s = x + iy$ où ces deux inégalités sont vérifiées; cette région est l'intérieur d'un angle dont le sommet est le point $x = -\frac{\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \alpha$ de l'axe réel, qui admet cet axe pour bissectrice et dont les côtés passent par les points d'affixe $\frac{\pi}{\lambda} i$ et $-\frac{\pi}{\lambda} i$. Nous désignerons par Δ un domaine intérieur à cette région et qui en diffère très peu. Quand s est dans Δ la quantité intégrée admet une borne indépendante de s et de u , l'intégrale représente, dans ces conditions, une fonction holomorphe de $s^{(1)}$.

Il est possible de développer $F(s)$ en série de Dirichlet. Dans ce but, nous considérerons la courbe σ_n définie comme formant le contour du domaine

$$(S_n) \text{ partie réelle de } \frac{1}{u} < \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2}, \quad -\alpha < \theta < \alpha, \quad r < r_0.$$

Ce domaine est la partie du secteur S qui est extérieure au cercle qui a pour diamètre le segment de l'axe réel qui va du point O au point $\frac{2}{\lambda_{n+1} + \lambda_n}$; il contient à son intérieur les pôles $\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_n}$ de la fonction $\frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{u}\right)}$. Les formules de Cauchy donnent

(1) Par exemple, voir MONTEL, *Leçons sur les séries de polynômes*, pp. 27-29.

$$F_n(s) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma_n} \frac{e^{-\frac{s}{u}}}{u^2 \Phi\left(\frac{1}{u}\right)} du = \sum_{p=1}^n \frac{e^{-\lambda_p s}}{\Phi'(\lambda_p)}.$$

La différence entre $F_n(s)$ et $F(s)$ est l'intégrale prise sur un petit contour dont le périmètre tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$. Evaluons la quantité intégrée en supposant u sur le petit contour. On a vu que cette quantité a son module borné si s est dans Δ et u sur les côtés rectilignes. Supposons u sur l'arc de cercle; on a

$$\text{partie réelle } \frac{1}{u} = \frac{\cos \theta}{r} = \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2},$$

$$\left| \frac{e^{-\frac{s}{u}}}{u^2 \Phi\left(\frac{1}{u}\right)} \right| < \frac{e^{-\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{r}}}{r^2 \Phi\left(\frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2} + it\right)}, \quad (t \text{ réel}).$$

La propriété 1. de $\Phi(u)$ montre que $\left| \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2} + it\right)} \right|$ est borné

dans le cas actuel.

Pour toute position de u sur l'arc de cercle, on a

$$x \cos \theta + y \sin \theta > x \cos \alpha - |y| \sin \alpha$$

et, si le point $s = x + iy$ est dans une région Δ' qu'il est facile de définir et qui fait partie de Δ , on a

$$x \cos \alpha - |y| \sin \alpha > a, \quad (a \text{ constante positive}).$$

On voit donc que $\left| \frac{e^{-\frac{s}{u}}}{u^2 \Phi\left(\frac{1}{u}\right)} \right|$ est borné pour u sur le petit contour

et pour s dans Δ' ; la borne est valable pour toutes valeurs de n .

L'intégrale le long du petit contour tend vers zéro et $F_n(s)$ tend vers $F(s)$ si s est dans Δ' . Pour s dans Δ' , $F(s)$ est donc la somme de la série

$$\frac{e^{-\lambda_1 s}}{\Phi'(\lambda_1)} + \dots + \frac{e^{-\lambda_n s}}{\Phi'(\lambda_n)} + \dots$$

Cette série peut être étudiée a priori; son abscisse de convergence, dans le cas actuel, est la plus grande limite de $-\frac{\log |\Phi'(\lambda_n)|}{\lambda_n}$, elle est donc au plus égale à zéro, d'après la propriété 2.; elle est au moins égale à zéro d'après la propriété 4.; cette abscisse est donc zéro.

La série représente $F(s)$ dans Δ' ; elle représente $F(s)$ dans toute la région de convergence $R(s) = x > 0$; d'autre part, $F(s)$ est une fonction régulière à l'origine et sur le segment de la droite de convergence qui joint les points $\frac{\pi}{\lambda}i$ et $-\frac{\pi}{\lambda}i$.

Comme α est un angle aigu arbitraire, $F(s)$ est holomorphe dans la région où la partie imaginaire de s est comprise entre $\frac{\pi}{\lambda}i$ et $-\frac{\pi}{\lambda}i$. On pourrait poursuivre l'étude de cette fonction et donner d'autres développements en série; je n'insiste pas sur ce point.

II. — Je suppose maintenant que les λ_n ne vérifient que la condition suivante: $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ est inférieur à un nombre positif b . Il existe des nombres λ_n entre $(n+1)b$ et nb ; je choisis l'un des nombres λ_n compris entre $(n+1)2b$ et $n2b$ d'une manière arbitraire et je le désigne par λ'_n . On a

$$n2b \leq \lambda'_n < (n+1)2b,$$

et, d'autre part, $\lambda'_{n+1} - \lambda'_n$ est supérieur à une quantité fixe b ; la suite λ'_n possède donc les propriétés de la suite que j'ai appelée λ_n au n. 1. Je désigne par λ''_n ceux des λ_n qui ne font pas partie de la suite des λ'_n . Je forme

la fonction $F_1(s) = \sum \frac{e^{-\lambda'_n s}}{\Phi'(\lambda'_n)}$ dont il vient d'être question; elle admet

l'axe des imaginaires comme droite de convergence et elle est holomorphe à l'origine. Je forme ensuite la fonction $F_2(s) = \sum c_n e^{-\lambda''_n s}$ qui admet une abscisse de convergence négative, ce qui est toujours possible. La série $F_1(s) + F_2(s)$ admet l'axe des imaginaires comme droite de convergence et elle est holomorphe à l'origine: cette droite n'est pas coupure. Notre affirmation est donc complètement justifiée.

Ayant une telle fonction, il est possible d'en construire une infinité d'autres en utilisant un théorème que j'ai démontré récemment⁽¹⁾: si la série (1) est régulière au point O de sa droite de convergence, il en est de même de la série $\sum a_n H(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}$ lorsque $H(u)$ est une fonction holomorphe de u dans un angle $-\alpha < \arg u < \alpha$ et lorsque $|H(u) e^{-\varepsilon(u)}|$ reste borné dans cet angle pour si petit que soit ε .

(1) « Journal de math. pures et appliquées », 1923.

On peut former des séries de Dirichlet ayant leur droite de convergence comme coupure et cela pour une suite d'exposants λ_n donnée et quelconque: il suffit de détacher de cette suite une suite partielle μ_n telle que $\frac{\mu_n}{n}$ croisse indéfiniment, de former une série de Dirichlet qui ait une abscisse de convergence A , puis une série dont l'abscisse de convergence soit inférieure à A . La série somme de ces deux séries-là admet sa droite de convergence comme coupure ⁽¹⁾.

On voit donc que, lorsque $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ est borné, la droite de convergence peut être coupure ou peut ne pas l'être. On sait que, dans le cas des séries de Taylor, le cas de la coupure est le plus probable, les coefficients étant pris au hasard ⁽²⁾. Il ne me paraît nullement évident qu'il en soit de même dans tous les cas.

III. — Une question voisine de celle que je viens d'étudier se pose naturellement: on donne les exposants λ_n et certaines suites détachées de la suite des coefficients a_n ; peut-on déterminer les autres coefficients de telle manière que la droite de convergence ne soit pas coupure? J'ai consacré à cette question une partie d'un mémoire qui paraîtra bientôt, en me bornant aux séries de Taylor. J'ai démontré, en particulier, que, si les coefficients donnés sont distribués d'une manière assez régulière et s'ils sont assez nombreux, les coefficients non donnés ont une croissance comparable à celle des coefficients donnés.

Je me bornerai à affirmer ici que quelques uns des résultats de ce mémoire peuvent s'étendre aux séries de Dirichlet pour lesquelles $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ est borné.

(1) OTTO SZAZS, « Math. Annalen », 1922, Bd. 85; CARLSON et LANDAU, « Nachrichten zu Göttingen », 1921.

(2) BOREL, « CR », 14 déc. 1896; FABRY, « Acta Mat. », t. 22, 1899; POLYA, « Acta Math. », t. 41.

Matematica. — *Sullo sviluppo di una funzione algebrica in un cerchio contenente più punti critici.* Nota di OSCAR ZARISKI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

Nella mia Memoria *Sugli sviluppi in serie delle funzioni algebroidi in campi contenenti più punti critici* (Memorie di questa Accademia, serie sesta, vol. I, fasc. V, 1926) ho mostrato come si possa estendere il noto teorema di PUISEUX sullo sviluppo delle funzioni analitiche nell'intorno di un punto critico algebrico al caso di funzioni y di x algebriche o algebroidi entro un campo contenente più punti critici. Ho dimostrato che se esiste una funzione algebrica di x di genere $p = 0$ avente nel campo che si considera gli stessi punti critici e le stesse sostituzioni dei rami della y , allora per mezzo di una tale funzione χ si può uniformizzare nel detto campo la relazione $y = f(x)$, in maniera che x risulti una funzione razionale di χ , e che y si sviluppi in una somma di più serie di Laurent per mezzo di un'altra funzione razionale di χ . La condizione precedente io esprimo brevemente dicendo che il campo è di genere 0.

In questa Nota voglio precisare gli sviluppi che si ottengono, nel caso in cui il campo che si considera sia un cerchio. Si arriva allora al risultato seguente.

Sia C il detto cerchio. Esso conterrà nel suo interno più punti critici O_1, O_2, \dots, O_m della funzione y di x a n rami. Possiamo supporre che questi rami si permutino transitivamente in C , altrimenti limiteremmo le nostre considerazioni ad una componente irriducibile della y . Noi facciamo le seguenti ipotesi:

1. Il campo C è di genere 0.
2. Quando la variabile x percorre il contorno di C gli n rami della y si permutano ciclicamente.
3. Sul contorno di C cadono punti critici della y , v. a d., noi prendiamo per C il più ampio intorno circolare dei punti critici O_i .

In queste ipotesi, introducendo in maniera conveniente una irrazionalità algebrica χ di genere $p = 0$ a n rami, tutti gli n rami della y vengono rappresentati per mezzo di una unica serie di Taylor,

$$y = a_0 + a_1 \chi + a_2 \chi^2 + \dots,$$

CONVERGENTE ALL'INTERNO DI C E DIVERGENTE ALL'ESTERNO.

Se nel cerchio C cadono poli della y , bisognerà aggiungere allo sviluppo precedente le parti principali relative ai singoli poli.

(1) Nella seduta del 20 giugno 1926.

Può accadere che non si possa racchiudere i punti critici O_i che si considerano, in un cerchio non contenente altri punti critici della funzione. Per questa ragione io considero brevemente in fine di questa Nota campi limitati da altre curve (lemniscate) per le quali questo inconveniente si elimina e delle quali è facile fornire la rappresentazione conforme sopra un cerchio.

2. Per la dimostrazione del teorema sopra enunciato cominciamo col definire l'irrazionalità χ come segue.

Procuriamoci nel cerchio C un sistema di cappi l_1, l_2, \dots, l_m che vadano da un punto del cerchio ai punti critici O_1, O_2, \dots, O_m .

Siano S_1, S_2, \dots, S_m le sostituzioni dei rami della y relative a questi cappi. Segniamo all'esterno di C i punti $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \dots, \bar{O}_m$ coniugati ai punti O_1, O_2, \dots, O_m nell'inversione per raggi reciproci rispetto al cerchio C . Tracciamo egualmente i cappi $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m$ coniugati ai cappi l_i .

Ebbene noi imponiamo alla funzione χ di x di possedere all'interno di C i punti critici O_1, O_2, \dots, O_m con le sostituzioni S_1, S_2, \dots, S_m relative ai cappi l_i (cioè di comportarsi in C come la funzione y), e all'esterno di C i punti critici $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \dots, \bar{O}_m$ con le sostituzioni inverse S_i^{-1} in relazione ai cappi coniugati \bar{l}_i . Si vede facilmente che le sostituzioni assegnate della χ generano un gruppo transitivo di grado n e che il loro prodotto è la sostituzione identica, in guisa che le nostre condizioni valgono effettivamente a definire una classe di funzioni algebriche irriducibili χ di grado n .

Si dimostra facilmente che la funzione χ è di genere $p = 0$. Infatti il campo circolare C è, per ipotesi, di genere 0. Ciò significa che il cerchio $n - plo\ nC$ sopra cui si possono distribuire gli n rami della χ in C , fa parte di una superficie di Riemann semplicemente connessa. Siccome, per l'ipotesi fatta, gli n rami della y e quindi della χ si permutano ciclicamente lungo il contorno di C , segue che il cerchio $n - plo\ nC$ è limitato da una sola linea chiusa e quindi è semplicemente connesso.

Data la simmetria con cui la funzione χ è stata definita all'interno e all'esterno di C si deduce che anche il campo $n - plo\ n\bar{C}$, dove \bar{C} indica la regione esterna a C , è semplicemente connesso. La superficie di Riemann della funzione χ risulta dunque spezzata in due parti semplicemente connesse $nC, n\bar{C}$ dal contorno comune di queste, e perciò è semplicemente connessa, c. v. d.

La funzione χ essendo di genere 0, si può supporre di averla scelta in maniera che x risulti una funzione razionale di χ ,

$$x = R(\chi).$$

Con questa condizione la nostra funzione χ è definita a meno di una sostituzione lineare sopra di essa.

Ora si può dimostrare che la funzione χ così definita gode della seguente proprietà: essa trasforma (conformemente) il cerchio $n - plo\ nC$ in

un cerchio D del piano \mathcal{Z} (oppure in un campo esterno ad un cerchio o in un semipiano, essendo la \mathcal{Z} definita a meno di una sostituzione lineare).

La dimostrazione di questa proprietà si trova nella mia Nota di questi « Rendiconti » (vol. IV, serie 6^a, fasc. 1-2, p. 22) *Sulla rappresentazione conforme dell'area limitata da una lemniscata sopra un cerchio*, nella quale la considerazione di una funzione come la \mathcal{Z} mi ha servito per risolvere il problema indicato nel titolo.

La funzione y è una funzione uniforme sul cerchio n — p lo nC . Di conseguenza essa è una funzione uniforme di \mathcal{Z} nel cerchio D , di cui sopra.

Supposto che il centro di D cada nell'origine, si potrà dunque sviluppare la funzione y in una serie di Taylor:

$$(1) \quad y = a_0 + a_1 \mathcal{Z} + a_2 \mathcal{Z}^2 + \dots,$$

che convergerà certamente nel cerchio D . Se inoltre, come noi abbiamo supposto, sul contorno di C (nel piano x) cadono punti critici della funzione y , questa, come funzione di \mathcal{Z} , avrà punti critici sul contorno di D . Il cerchio D è dunque il cerchio di convergenza della serie (1). Perciò *lo sviluppo della y , in quanto \mathcal{Z} è funzione di x , converge all'interno del cerchio C del piano x e diverge all'esterno*, c. v. d.

3. Per poter applicare i risultati stabiliti nei numeri precedenti è necessario che si possano racchiudere i punti critici O_1, O_2, \dots, O_m che si considerano, in un cerchio non contenente altri punti critici della funzione. Ora può accadere che ciò sia impossibile, data la posizione dei punti critici della y nel piano. In questo caso è lecito tuttavia di sostituire al cerchio *una lemniscata*, cioè una curva definita da un'equazione del tipo $|P(x)| = \text{cost.}$, dove $P(x)$ è un polinomio della variabile complessa x ⁽¹⁾. Si sa infatti che con lemniscate di grado abbastanza alto (per il *grado* di una lemniscata $|P(x)| = \text{cost}$ si intende il grado del polinomio $P(x)$), si può avvicinare indefinitamente una curva chiusa qualsiasi⁽²⁾. Perciò, se esiste un campo semplicemente connesso di genere O che contenga i soli punti critici O_i esisterà anche un campo che soddisfi alle stesse condizioni e che sia limitato da una lemniscata.

Consideriamo dunque un intorno C dei punti critici O_1, O_2, \dots, O_m limitato da una lemniscata

$$(1) \quad |P(x)| = \text{cost.}$$

Come già nel caso del cerchio noi facciamo le seguenti ipotesi:

1. Il campo C è di genere O .

(1) Una lemniscata $|P(x)| = k$ può essere costituita di più linee chiuse, *ma per valori abbastanza alti della costante k essa si riduce ad una sola linea chiusa.*

(2) V. per es., MONTEL, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, Paris, 1910, p. 45.

2. La sostituzione dei rami della y relativa al contorno di C è ciclica d'ordine n .

3. Sul contorno di C cadono punti critici della y distinti dai punti O_i .

In queste ipotesi vogliamo dimostrare che tutti gli n rami della funzione y si sviluppano in una unica serie di Taylor,

$$y = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n + \dots,$$

per mezzo di una irrazionalità ζ di genere 0 soddisfacente a una equazione del tipo

$$P(x) = R(\zeta),$$

dove $R(\zeta)$ è una funzione razionale di ζ .

LA DETTA SERIE CONVERGE ALL'INTERNO DELLA LEMNISCATA (1) E DIVERGE ALL'ESTERNO.

Per la dimostrazione rappresentiamo conformemente l'interno della lemniscata sopra un cerchio C' del piano di una variabile complessa X . Questa rappresentazione conforme è studiata nella mia Nota sopra citata. Ho mostrato ivi che la funzione $X(x)$ che fornisce la rappresentazione conforme è una funzione *algebraica* definita da un'equazione del tipo

$$(2) \quad P(x) = Q(X),$$

dove $Q(X)$ è una funzione *razionale* di X .

La y come funzione di X soddisfa evidentemente nel cerchio C' alle stesse tre condizioni a cui essa, per ipotesi, soddisfa all'interno della lemniscata C . Quindi, per il n. 2, si potrà sviluppare la funzione y in una serie di Taylor

$$(3) \quad y = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_n \zeta^n + \dots$$

dove ζ è definita dall'equazione

$$(4) \quad X = S(\zeta),$$

$S(\zeta)$ essendo una funzione razionale di ζ .

Sostituendo la (4) nella (2) si avrà

$$P(x) = R(\zeta),$$

dove $R(\zeta)$ è una funzione razionale di ζ .

Siccome lo sviluppo (3) converge nell'interno del cerchio C' del piano X e diverge all'esterno, si deduce che, in quanto ζ è funzione di x , il detto sviluppo converge nell'interno della lemniscata C del piano x e diverge all'esterno, c. v. d.

Matematica. — *Sulla deformazione infinitesima del campo di integrazione nell'equazione di Fredholm.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Ancora sugli sviluppi tayloriani di $\sum a_n z^n$ dove $a_n = g(n)$ con $g(n)$ trascendente intera.* Nota di S. MINETTI presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Ordine di grandezza delle quantità relative al 2° problema balistico. — Una formola per la nutazione balistica.* Nota dell'ing. FILIPPO BURZIO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Poichè le quantità che interessano il problema della rotazione dei proietti non sono ancora entrate nella pratica dei calcoli di progetto, o di verifica, di artiglieria, crediamo opportuno dare un'idea del loro ordine di grandezza. Ciò contribuirà, d'altronde, a far valutare con maggiore esattezza i criteri per cui si trascurano, talvolta, talune di coteste grandezze, o loro potenze, nei confronti di altre: come vedremo in un'applicazione nella seconda parte di questa Nota stessa.

Richiamandoci alle due Note⁽²⁾: *Alcune nuove proprietà della precessione balistica*; e *Sulla legge di Mayevski per la precessione balistica* — di cui conserviamo tutte le notazioni — ricordiamo come le formule principali relative al 2° problema siano le seguenti⁽³⁾:

(1) Nella seduta del 20 giugno 1926.

(2) « Atti della R. Accad. dei Lincei », vol. III, serie 6ª, 1° sem.

(3) (a) dà la velocità di precessione; (b) quella di nutazione; AF è la velocità media di precessione della trottola equivalente al proietto; — θ' la velocità di abbassamento della tangente alla traiettoria del baricentro G del proietto; Q appare un parametro caratteristico del 2° problema. Ricordiamo inoltre che: m è la massa del proietto; p il suo peso; a il calibro; i il coefficiente di forma; C il momento d'inerzia assiale; r la velocità di rotazione propria; F la « funzione resistente » di Siacci; Δ la « densità balistica »

$$(a) \quad \psi' = \frac{\mathfrak{M}}{Cr \sin \delta} + \theta' \frac{\sin \psi}{\tan \delta} = AF(v) + \theta' \frac{\sin \psi}{\tan \delta}$$

$$(b) \quad \delta' = -\theta' \cos \psi$$

$$(c) \quad \delta_{\max} \leq \frac{2}{Q_{\min}};$$

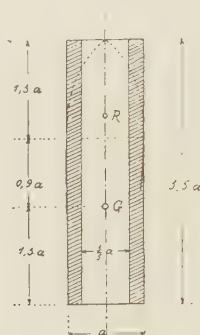
dove

$$AF(v) = i\Delta \frac{mlk}{Cr} \frac{1000 a^2}{p} F(v) = \sim 102 \frac{lka^2}{Cr} F(v) \quad (1)$$

$$\theta' = -\frac{g \cos \theta}{v}$$

$$Q = -\frac{AF}{\theta'}.$$

Dei fattori costituenti A, notiamo che l è dell'ordine di grandezza di a : infatti nel fenomeno della resistenza obliqua dell'aria, per la piccolezza di δ , la parte di superficie che prepondera nel determinare componenti della re-



sistenza normali all'asse è l'ogiva: quindi R è in generale compreso fra la base dell'ogiva e il vertice. Dato il proporzionamento medio indicato in figura, e, in base anche ai risultati di esperimenti ⁽²⁾, riterremo: $l = \sim 1.2 a$. Circa il momento d'inerzia assiale C , per averne una espressione semplice, e nel contempo sufficientemente approssimata agli scopi che ci proponiamo

dell'aria; l la distanza di G dal «centro di spinta» R ; k il rapporto dei due angoli δ_1 e δ che con l'asse di figura formano rispettivamente la resistenza dell'aria e la tangente; v e V rispettivamente le velocità attuale e iniziale di G ; θ l'inclinazione della tangente sull'orizzonte; ψ l'angolo di precessione.

(1) Trattandosi di determinare solo ordini di grandezza, il prodotto $i\Delta$ può ritenersi $\div 1$, per i proietti usuali e per tiro non troppo curvo. Risulta p. es. dalle tabelle del Bianchi che i varia, per i proietti italiani, fra 0.88 e 1.112; mentre circa le densità balistiche medie si ha il seguente prospetto. Per altezza di tiro $Y = 1000$ m.; $\Delta_m = 0.975$. Per $Y = 2000$: $\Delta_m = 0.930$. Per $Y = 3000$: $\Delta_m = 0.890$. Per $Y = 4000$: $\Delta = 820$.

(2) Cfr. La mia Nota: «*Ricerche sperimentali sul regime aero-dinamico dei proietti*», «Bollettino Tecnico», N. 21 della Direzione. Sperim. Aviazione.

in questa sede, equipariamo il proietto a un cilindro cavo, di diametro esterno a , interno $3/5 a$ (cioè con pareti di spessore $1/5 a$) e altezza $3.5 a$. Si ha pertanto in unità pratiche:

$$C = \frac{7800}{9.81} 0.0982 \left[a^4 - \left(\frac{3}{5} a \right)^4 \right] 3.5 a = 238 a^5.$$

Sostituire all'ogiva un tronco cilindrico cavo implica calcolare C per eccesso: e ciò va a compenso dei momenti d'inerzia del fondello e della carica interna (di densità circa $1/8$ di quella dell'acciaio), che si trascurano. Si osservi ancora che variazioni nello spessore delle pareti, rispetto a quello ammesso, influiscono abbastanza poco: supponendo p. es. tale spessore $1/10 a$, si ha: $C = 162 a^5$; supponendolo $0.15 a$, si ha: $C = 189 a^5$.

Per la velocità di rotazione r è notoriamente: $r = 2\pi \frac{V}{h}$, essendo h il passo finale della rigatura. Assumendo mediante: $h = 25 a$, e adottando per $F(v)$ la nota espressione: $F(v) = Kv^2$, risulta:

$$(d) \quad AF = 2 \frac{kKv^2}{aV};$$

e inizialmente:

$$(d') \quad AF_0 = 2 \frac{kK_0V}{a}.$$

Ricordando ora nostre ricerche sul valore di $k^{(1)}$, abbiamo che la diminuzione di k al crescere di v (da $k = 3.5$ per $v = 200 \div 250$ m/sec, fino a $k = 1.4$ per $v = 400 \div 600$ m/sec) è compensata dall'aumento corrispondente di K (da $K = 0.00012$ per $v = 200 \div 240$ m/sec, fino a $K = 0.00033$ per $v = 400 \div 600$ m/sec; v. tabelle Bianchi). Cosicchè possiamo concludere:

(I) AF_0 cresce approssimativamente in ragione diretta della velocità ed inversa del calibro, cioè è massima per grandi velocità e piccoli calibri, minima per piccole velocità e grossi calibri.

Quanto all'ordine di grandezza, poichè a è dell'ordine del decimo, V del centinaio, $2k$ circa della decima, K del decimillesimo, e poichè:

$$AF = AF_0 \frac{K}{K_0} \left(\frac{v}{V} \right)^2,$$

dove v/V può scendere fino a circa $1/3$, le (d) e (d') danno:

(II) AF_0 è dell'ordine dell'unità; AF può scendere al decimo.

Risulta ora facilmente, dalle espressioni di θ' , Q , e dalle (a), (b), (c):

(III) θ' è dell'ordine del centesimo, e può salire al decimo.

(IV) Q è dell'ordine del centinaio, e può scendere alla decina.

(1) Cfr. la Nota citata: *Ricerche ecc.*

(V) δ è massimo per piccole velocità e grossi calibri; δ_{\max} è dell'ordine del centesimo, e può salire al decimo: è, cioè, dello stesso ordine di grandezza di θ' .

(VI) ψ' è dell'ordine dell'unità, e diminuisce con AF lungo la traiettoria.

(VII) δ' è al massimo dell'ordine di θ' , e si annulla per $\psi = \frac{\pi}{2}$.

(Condizione per la stabilità del proietto lungo la traiettoria, e per la precisione ed efficienza del tiro è, com'è noto, che δ si mantenga piccola). Appare dalla (V) l'errore di quei metodi di risoluzione del 2° problema che, per calcolare δ , trascurano θ' , cioè considerano la tangente «fissa». Vedremo nella seconda parte di questa Nota come l'ipotesi semplificativa posta a base di altre trattazioni del problema stesso equivalga invece a trascurare solo quantità dell'ordine di δ^2 o di δ^3).

Combinando (d) con (c) ricaviamo, indicando con l'indice i valori relativi al punto di velocità minima:

$$(e) \delta_{\max} \leq \frac{g a V}{k K_1 v_i^3},$$

la quale dà un limite superiore per δ_{\max} (di calcolo più semplice della (c)), che potrà servire come valore di massima.

A conferma e verifica di quanto sopra riportiamo nella seguente tabella alcuni numeri.

D A T I	AF _o		AF min.	θ' max.	Q _o	Q min.	δ^o max.		
	esatti	form. (d')					esatti	form. (c)	form. (e)
Granata da 75/906 — V = 510	—	7.62	—	—	—	—	—	—	—
» » 65/17 — V = 345	—	5.72	—	—	—	—	—	—	—
» » 149/35 — V = 547	3.42	3.50	0.290	0.0371	199	8.38	9° 84	14° 6	13° 9
» » 152/32 — V = 865	—	3.40	—	—	—	—	—	—	—
» » 149/12 — V = 300	—	2.09	—	—	—	—	—	—	—
» » 210/8 — V = 347	1.96	1.95	0.545	0.0363	71.0	15.10	4° 60	7° 6	7° 9
» » 149/35 — V = 273	1.68	1.70	0.771	0.0495	54.8	16 —	3° 42	7° 3	6° 6
» » 305/17 — V = 412	—	1.59	—	—	—	—	—	—	—
» » 210/8 — V = 263	0.83	0.97	0.187	0.0755	44.4	2.48	29° 3	46° 2	39° —

I numeri sono stati disposti nell'ordine di AF_o decrescente. I valori di δ_{\max} indicati come *esatti* sono stati ricavati mediante calcolo per punti.

Facciamo un'applicazione delle cose dette alla nutazione balistica. E ricordiamo anzitutto come essa costituisca la seconda approssimazione del 2° problema, si proponga cioè di determinare gli angoli che l'asse di figura $G\zeta$ forma coll'asse Gi della rotazione istantanea e con l'asse-momento Gm della quantità di moto: i quali, in prima approssimazione ⁽¹⁾, si considerano coincidenti.

È noto dalla dinamica dei sistemi rigidi aventi un punto fisso che ⁽²⁾ se il loro ellissoide di inerzia è di rivoluzione, gli assi $G\zeta$, Gi , Gm , sono compiani; che, se B è il momento d'inerzia equatoriale del sistema, è:

$$(1) \quad \frac{\tan \zeta i}{\tan \zeta m} = \frac{C}{B}.$$

Si ha d'altronde, indicando con p , q , r , le componenti della velocità angolare Ω di rotazione del proietto sui tre assi $G\xi$ η ζ principali centrali di inerzia:

$$(2) \quad \tan \zeta i = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}.$$

Consideriamo la terna « intrinseca », o di Frénet, $Gxyz$ (χ coincidente con la tangente) di cui alle Note citate; se ψ precessione, δ nutazione, φ azimut sono i soliti angoli di Eulero che definiscono la posizione della terna $G\xi\eta\zeta$ rispetto alla $Gxyz$, *mobile nel corpo e nello spazio*, note relazioni di cinematica danno:

$$(3) \quad \begin{cases} p = \psi' \sin \delta \sin \varphi + \delta' \cos \varphi - \theta' \cos(x\xi) \\ q = \psi' \sin \delta \cos \varphi - \delta' \sin \varphi - \theta' \cos(x\eta) \\ r = \psi' \cos \delta + \varphi' - \theta' \cos(x\zeta). \end{cases}$$

Se, data la condizione di stabilità del proietto, trascuriamo negli sviluppi in serie di $\sin \delta$ e $\cos \delta$ i termini in δ^3 , dalle due prime equazioni (3) si ha, ricordando le (a) e (b):

$$\begin{cases} p = \psi' \delta \sin \varphi - \theta' [\cos \psi \cos \varphi + \cos(x\xi)] \\ q = \psi' \delta \cos \varphi - \theta' [\cos(x\eta) - \cos \psi \sin \varphi]. \end{cases}$$

Se ne ricavano, ricordando che θ' è essenzialmente negativa, e indicando con $|\dots|$ i moduli delle varie grandezze, le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} |p| \leq |\psi' \delta \sin \varphi| + (-\theta') |\cos \psi \cos \varphi + \cos(x\xi)| \\ |q| \leq |\psi' \delta \cos \varphi| + (-\theta') |\cos(x\eta) - \cos \psi \sin \varphi|; \end{cases}$$

(1) Problema della « precessione balistica ».

(2) Cfr. p. es. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, vol. II, p. 323 e CHARBONNIER, *Balistique extér. ration.*, ediz. Doin, 1907, vol. II, p. 224 e seg.

e ancora :

$$(3') \quad \begin{cases} |p| \leq |\psi' \delta \sin \varphi| - 2\theta' \\ |q| \leq |\psi' \delta \cos \varphi| - 2\theta'. \end{cases}$$

Dalle (3') quadrando, sommando e osservando che:

$$\begin{aligned} \sin \varphi + \cos \varphi &= \sqrt{2} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \\ -p^2 + q^2 &\leq \psi'^2 \delta^2 + 8\theta'^2 - 5.6 |\psi' \delta| \theta' = \{ |\psi' \delta| - 2.83 \theta' \}^2. \end{aligned}$$

Sostituendo in (1) e (2):

$$(4) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \zeta_i \leq \frac{|\psi' \delta| - 2.83 \theta'}{r} \\ \operatorname{tang} \zeta_m \leq \frac{B}{C} \frac{|\psi' \delta| - 2.83 \theta'}{r}. \end{cases}$$

In base alle considerazioni fatte sull'ordine di grandezza delle varie quantità è facile vedere dalle (4) che: $\operatorname{tang} \zeta_i$ e $\operatorname{tang} \zeta_m$ sono dell'ordine di δ^2 o di δ secondo che δ sia dell'ordine del centesimo o del decimo⁽¹⁾.

L'ipotesi della *coincidenza dei tre assi* posta a base della 1^a approssimazione del 2° problema balistico è dunque (a differenza di quella della *tangente fissa*) interamente giustificata⁽²⁾.

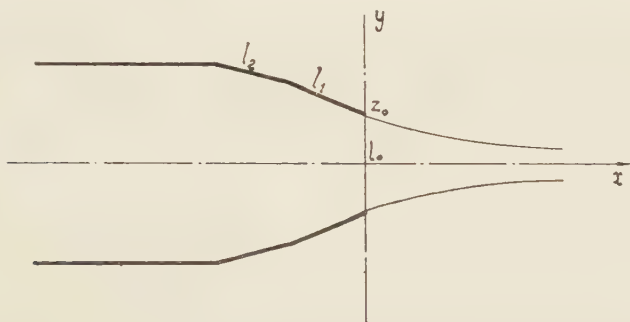
(1) Precisamente a questo risultato eravamo giunti, però in modo assai più laborioso, sviluppando esempi numerici in applicazione della formula data in una Nota: *La nutazione nel moto dei proietti*, « Riv. di Artigl. e Genio », vol. II, 1919. Assai più laboriosi sono anche i metodi per la nutazione riportati nel trattato citato dello Charbonnier.

(2) Ricordiamo che circa la legittimità della 1^a approssimazione esprimeva dubbi il Siacci osservando: « Il S. Robert, il Mayewski, il De Sparre hanno bensì tenuto conto dell'angolo dell'asse di figura colla tangente alla traiettoria, ma nell'espressione della resistenza hanno considerato l'asse di figura come coincidente con l'asse di rotazione istantanea. L'espressioni della resistenza trovate nella Nota V possono dar modo di decidere se le forze provenienti da tale non coincidenza siano realmente trascurabili rispetto a quelle provenienti dal non coincidere l'asse di figura colla tangente alla traiettoria » (*Balistica*, Ediz. 1888, p. 365). Tale dubbio appare sciolto in modo semplice con le formole (4).

Meccanica. — *Sur les jets liquides à parois données.* Nota di A. WEINSTEIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le problème mathématique qui se présente d'une manière naturelle dans la théorie des *jets liquides* est celui de l'écoulement à travers l'orifice d'un récipient de forme *donnée* à priori.

Ce problème, ainsi que les questions analogues qui se présentent dans la théorie des mouvements des liquides partiellement limités par des parois rigides et partiellement par des surfaces libres, a été posé plusieurs fois, mais l'équation intégrô-différentielle à laquelle on a été conduit pour le cas d'un mouvement plan ⁽²⁾ semble inabordable.



Je me propose de montrer dans cette note que la méthode de continuité permet de réduire la question de l'existence du mouvement d'un jet (parallèle à un plan) à *parois polygonales* donnés à l'étude d'un problème aux limites *linéaire et non homogène*, qui d'ailleurs a une signification hydrodynamique.

Soit $z = x + iy$ le plan du mouvement, que je supposerai symétrique par rapport à l'axe des x . Fixons les unités de manière à avoir la vitesse égale à *un* en valeur absolue à l'infini en aval du jet et par conséquence aussi le long des frontières libres. Désignons par φ et ψ le potentiel et la fonction de courant. On peut alors établir une représentation conforme faisant correspondre au champ du mouvement une bande indéfinie S comprise entre les droites $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$ et $\psi = -\frac{\mu\pi}{2}$ du plan $f = \varphi + i\psi$, $\mu\pi$ étant égal au débit du jet et l'axe des x ayant pour image l'axe des φ . Posons

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

(2) Voir p. ex. CISOTTI, *Idromeccanica piana* (Milano, 1922), II, § 143 ainsi que §§ 113, 127.

$\frac{df}{d\zeta} = w = e^{-i\omega}$, $\omega = \vartheta + i\tau$ (où ϑ est égal à l'angle entre la direction du courant et l'axe des x).

M. Cisotti parvient ⁽¹⁾ à l'intégrale générale du problème en introduisant par la relation

$$(1) \quad e^{\frac{f}{\mu}} = \frac{i}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad ; \quad \left(df = \mu \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} \right)$$

au lieu de f la variable ζ (c'est-à-dire en faisant correspondre à la bande S un demi-cercle de rayon 1 dans le plan $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\sigma}$) et en remplaçant dans la relation

$$(2) \quad d\zeta = \frac{df}{w} = e^{i\omega} df$$

df par $\mu \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta}$ et ω par une fonction régulière pour $|\zeta| < 1$, réelle pour ζ réel et nulle pour $\zeta = 0$.

En prenant en particulier pour ω la fonction

$$(3) \quad \omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} \sum_{h=1}^{2n} (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \log i \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \zeta \bar{\zeta}_h}$$

$$\left(\vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_n < 0 \quad ; \quad \vartheta_{2n+2-h} = -\vartheta_h \text{ pour } h = 1, 2, \dots, n ; \right. \\ \left. \frac{\vartheta_{h+1} - \vartheta_h}{\pi} = \beta_h < 1 \quad ; \quad \zeta_h = e^{i\sigma_h} = \xi_h + i\eta_h \quad , \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \frac{\pi}{2} \right.$$

$\left. \text{et } \sigma_{2n-h+1} = \pi - \sigma_h \text{ pour } h = 1, 2, \dots, n \right)$ et en intégrant la relation $d\zeta = e^{i\omega} df$, on obtient d'après M. Cisotti la formule remarquable

$$(4) \quad \zeta - \zeta_0 = \mu \int_1^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \mu i^{\frac{2n-1}{\pi}} \int_1^{\zeta} \prod_{h=1}^{2n} \left(\frac{1 - \zeta \bar{\zeta}_h}{\zeta - \zeta_h} \right)^{\beta_h} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

qui donne la solution générale de l'écoulement d'un jet d'un vase à parois polygonales et symétriques, dont les angles extérieurs sont égaux à $\beta_1 \pi, \beta_2 \pi, \dots, \beta_n \pi$, tandis que les longueurs l_1, l_2, \dots, l_n des côtés et la largeur $l_0 (= 2|\zeta_0|)$ de l'orifice sont des fonctions compliquées des paramètres $\mu, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ de la formule (4).

Posons maintenant le *problème inverse*. Étant donné arbitrairement dans le plan ζ un profil polygonal symétrique, c'est-à-dire étant fixées arbitrairement les $n + 1$ valeurs $l_0^1, l_1^1, \dots, l_n^1$ (les β_k étant fixés une fois pour toutes),

(1) Loc. cit., Capitolo VI.

on demande s'il est possible de disposer des $n + 1$ paramètres (réels) $\mu, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, ($\zeta_k = e^{i\sigma_k}$) de la formule (4) de manière à obtenir un mouvement correspondant aux parois prefixées.

Pour traiter ce problème par la méthode de continuité prenons, en donnant aux paramètres des valeurs initiales arbitraires $\mu_0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_n^0$, un profil d'orifice l_0^0 et de côtés l_1^0, \dots, l_n^0 quelconques. Faisons varier les l d'une manière continue de façon à obtenir les valeurs finales $l_0^1, l_1^1, \dots, l_n^1$ et posons la question si l'on peut suivre cette variation des l par une variation continue des paramètres $\mu, \sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Pour cela il faudrait avant tout démontrer qu'il est possible (l_0, l_1, \dots, l_n étant l'orifice et les côtés correspondants aux valeurs $\mu, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ des paramètres), en donnant aux l_b des accroissements δl_b arbitraires, de déterminer (d'une manière univoque) les accroissements correspondants $\delta \mu$ et $\delta \sigma_k$ des paramètres $\mu, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ par les formules

$$\delta l_b = \sum_{k=1}^n \frac{\partial l_b}{\partial \sigma_k} \delta \sigma_k + \frac{\partial l_b}{\partial \mu} \delta \mu \quad ; \quad (b = 0, 1, \dots, n)$$

c'est-à-dire démontrer que le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{\partial (l_0, l_1, \dots, l_n)}{\partial (\mu, \sigma_1, \dots, \sigma_n)}$$

est toujours différent de zéro.

Le calcul direct de Δ paraissant très compliqué, je me propose de montrer que pour prouver que Δ est différent de 0 (c'est-à-dire qu'aux valeurs $\delta l_b = 0$ correspondent nécessairement les valeurs $\delta \sigma_b = \delta \mu = 0$) il suffit de démontrer qu'un certain problème aux limites linéaire n'admet pas de solution différente de zéro.

Ce problème s'obtient en considérant la *variation* δf que subit la fonction $f(\zeta)$ [définie par (4) et (1)] en tenant χ constant et en donnant aux paramètres des accroissements $\delta \mu, \delta \sigma, \dots, \delta \sigma_n$. On peut considérer δf comme fonction soit de χ , soit de ζ , soit de f et en obtenir par différentiation de la formule (4) une expression explicite.

On trouve

$$0 = \mu e^{i\omega} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{\delta \zeta}{\zeta} + \mu \int_1^\zeta e^{i\omega} \delta(i\omega) \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \delta \mu \int_1^\zeta e^{i\omega} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \delta \chi_0$$

(où $\delta \zeta$ est la variation de la fonction $\zeta(\chi)$, qui se produit en donnant aux paramètres des accroissements arbitraires; $\delta(i\omega)$ et $\delta \chi_0$ sont les différentielles totales de $i\omega$ et de χ_0 par rapport à ces paramètres).

δf et $\delta \zeta$ étant d'après (1) liés par la formule

$$(5) \quad \delta f = \mu \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{\delta \zeta}{\zeta} + f \frac{\delta \mu}{\mu}$$

on obtient comme expression générale de δf :

$$(6) \quad \delta f - f \frac{\delta \mu}{\mu} = \mu e^{-i\omega} \int_1^{\zeta} e^{i\omega} \delta(-i\omega) \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} - \delta \mu e^{-i\omega} \int_1^{\zeta} e^{i\omega} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} - e^{-i\omega} \delta \zeta_0.$$

Cette expression montre que $\gamma = \delta f - f \frac{\delta \mu}{\mu}$ (considérée comme fonction de f) satisfait dans la bande S à l'équation différentielle linéaire et non homogène

$$(7) \quad \frac{d\gamma}{df} - \frac{d(-i\omega)}{df} \gamma = \delta(-i\omega) - \frac{\delta \mu}{\mu}.$$

Dans le voisinage d'un point f_k (correspondant à un point ζ_k , $k = 1, \dots, n$) γ reste finie et tend vers la valeur *réelle*

$$(8) \quad \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_k} \delta \zeta_k.$$

Nous allons porter maintenant notre attention sur le cas où tous les δl sont zéro et montrer que la partie imaginaire β de $\gamma = \alpha + i\beta$ ($\beta = \delta\psi - \psi \frac{\delta \mu}{\mu}$) satisfait alors sur les droites $\psi = 0$ et $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$ (qui limitent la partie supérieure de S) à des conditions linéaires.

En effet la variation du contour polygonal étant zéro, on peut affirmer que le $\delta \zeta$ correspondant est, pour $|\zeta| = 1$, tangentiel à la périphérie du demi-cercle $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$, ce qui donne, par (5), que $\delta f - f \frac{\delta \mu}{\mu}$ y est réel, c'est-à-dire que

$$(9) \quad \beta = 0$$

pour la demi-droite $-\infty < \varphi \leq 0$, $\psi = + \frac{\mu\pi}{2}$.

La même condition (9) a lieu (vue la symétrie du mouvement) pour la droite $\psi = 0$ toute entière, mais elle n'est plus valable pour la demi-droite $0 \leq \varphi < +\infty$, $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$, qui correspond à la ligne libre supérieure, celle-ci pouvant varier de forme, malgré que les δl sont 0.

Pour la demi-droite $0 \leq \varphi < +\infty$, $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$ l'équation (7) qui est toujours satisfaite donne (vue que $\delta(-i\omega) = \delta\tau - i\delta\vartheta$ se réduit, à cause de $|w| = 1$, à $-i\delta\vartheta$) la condition

$$(10) \quad \frac{\partial \beta}{\partial n} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \beta = - \frac{\delta \mu}{\mu}.$$

(où n est la normale extérieure à S et $\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}$ est égale à la courbure de la ligne libre donnée). Dans (10) intervient justement la même fonction harmonique β que dans (9). La constante $-\frac{\delta\mu}{\mu}$ est *a priori* indéterminée.

Si l'on pouvait établir que les conditions (9) et (10) ont pour conséquence que β (et par suite aussi γ) est identiquement 0, on aurait immédiatement, d'après (8), $\delta\sigma_1 = \dots = \delta\sigma_n = 0$, c'est-à-dire $\Delta \neq 0$.

Voici maintenant une forme remarquable sous laquelle on peut énoncer cette question.

Pour démontrer que la fonction $\beta = \delta\psi - \psi \frac{\delta\mu}{\mu}$ (qui satisfait aux conditions aux limites (9) et (10) et qui reste finie à l'infini de S) est identiquement 0, il faut (vue l'équation (10)) que $\delta\mu$ soit = 0. Cette condition est d'ailleurs pour une certaine classe de profils *suffisante*, car on est ramené alors à des conditions que j'ai étudié dans un travail antérieur⁽¹⁾.

Les autres parties de la démonstration par la méthode de continuité ne pouvant présenter aucune difficulté⁽²⁾, on peut, en ayant égard à la signification du paramètre μ (qui est proportionnel au débit) formuler notre résultat de la manière suivante :

Pour démontrer l'existence d'une solution de Cisotti correspondante à des parois polygonales données⁽³⁾ *a priori*, il suffit de démontrer que la variation du *coefficient de contraction* s'annule en même temps que les variations de côtés et de l'orifice du canal.

Au point de vue mathématique ce problème revient à la démonstration que le problème aux limites donné par (9) et (10) n'admet pas (même en laissant la constante $-\frac{\delta\mu}{\mu}$ indéterminée) de solution β différente de zéro.

(1) A. WEINSTEIN, *Ein hydrodynamischer Unitätssatz*, « Mathematische Zeitschrift », vol. 19 (1924), pp. 265-275. L'inégalité (14), p. 274, qui peut caractériser cette classe contient, comme M. Hamel a eu l'obligeance de me faire remarquer, une inexactitude numérique et doit être remplacé par

$$(H) \quad -\vartheta_1 \left(\eta_1 + \frac{1}{\eta_1} \right) \leq 1 \quad ; \quad (\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1).$$

(2) Voir la discussion d'un cas analogue dans ma note *Der Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone*, « Mathematische Zeitschrift », vol. 21 (1924), pp. 72-84.

(3) Et satisfaisant à la condition (H).

Idromeccanica. — *Una estensione del teorema di Bernoulli.*
Nota di BRUTO CALDONAZZO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente
U. CISOTTI.

1. Nel moto stazionario di un fluido perfetto, soggetto a forze di massa conservative e con densità dipendente solo dalla pressione, vale il noto teorema di Bernoulli. Precisamente, indicando U il potenziale specifico delle forze, ρ la densità, p la pressione specifica, v la velocità, il trinomio

$$(1) \quad \Phi = \frac{1}{2} v^2 - U + \int \frac{dp}{\rho}$$

ha valore costante lungo una medesima linea di flusso, potendo variare il valore del trinomio da una linea di flusso ad un'altra. Il luogo delle linee di flusso sulle quali il trinomio ha lo stesso valore è una superficie di flusso e vorticoso insieme (*superficie di Bernoulli*) ⁽²⁾. Il trinomio ha lo stesso valore dovunque se il moto è irrotazionale o più generalmente se il moto è elicoidale (o di Beltrami) ⁽³⁾.

In questa Nota mi propongo di mettere in rilievo una ovvia estensione del teorema di Bernoulli a *moti variabili*: precisamente *la condizione caratteristica affinché il trinomio di Bernoulli lungo ogni linea di flusso abbia lo stesso valore, funzione del tempo, è che il valore locale della velocità sia costante*. In sostanza sussiste ancora il teorema quando la velocità in ogni punto cambia soltanto la sua orientazione; in tal caso però Φ risulta funzione del tempo, diversa in generale da linea a linea di flusso. Il luogo delle linee di flusso per le quali si ha la stessa Φ è ancora una *superficie di flusso*, che chiamerò ancora *superficie di Bernoulli*; in generale però essa non è anche vorticoso, come nei moti stazionari.

Naturalmente, poichè si tratta di moti variabili, anzi di moti variabili in quanto cambia l'orientazione locale della velocità, le linee e le superficie di flusso sono variabili col tempo. Non è esclusa però l'esistenza di *superficie di Bernoulli* (che sono pure superficie di flusso) *fisse* senza che su di esse il moto sia stazionario. Una tale superficie può essere quella che limita il getto di un liquido pesante nell'aria, la configurazione del getto essendo costante. Infatti per tale superficie Φ risulta indipendente dal tempo, pur

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1926.

(2) Cfr. la mia Nota, *Un'osservazione a proposito del teorema di Bernoulli*, « Bollettino dell'U. M. I. », anno IV (1925), pp. 1-3.

(3) U. CISOTTI, *Considerazioni sulla nota formula idrodinamica di Daniele Bernoulli*, « Bollettino dell'U. M. I. », anno II (1923), p. 125.

potendo variare col tempo il sistema di linee di flusso tracciate su tale superficie fissa.

Il caso corrispondente a quello dei moti stazionari irrotazionali o eliocidali si verifica, quando il moto è variabile, allorchè si ha

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v}.$$

Infatti in tal caso Φ è la stessa funzione del tempo per qualsiasi linea di flusso. La (2) richiede anche per questi moti la costanza locale del valore della velocità.

2. L'equazione di moto per i fluidi perfetti considerati si può scrivere

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \text{grad } \Phi = 0.$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + \mathbf{v} \times \text{grad } \Phi = 0.$$

Se $v = \text{mod } \mathbf{v}$ localmente è costante si annulla il primo termine e quindi il $\text{grad } \Phi$ risulta normale a \mathbf{v} . Perciò il trinomio Φ deve essere funzione al più del tempo lungo ciascuna linea di flusso. Reciprocamente se è $\Phi = \Phi(t)$ lungo ciascuna linea di flusso risulta

$$\frac{\partial v^2}{\partial t} = 0$$

e quindi v indipendente localmente dal tempo. Le superficie di equazione

$$\Phi = \Phi(t)$$

sono manifestamente superficie di flusso luogo delle linee di flusso, variabili col tempo, su cui il trinomio è la stessa funzione di t .

Queste superficie, la cui normale in un punto generico può essere definita dal vettore

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v},$$

non sono in generale superficie vorticose, come lo sono le superficie di Bernoulli nel caso stazionario. Continueremo tuttavia a chiamare *superficie di Bernoulli* le nuove superficie che si presentano nel caso variabile quali *superficie di livello* per il trinomio di Bernoulli.

Tali superficie sono anche vorticose in quei moti variabili in cui $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ e $\text{rot } \mathbf{v}$ sono normali. Ciò è verificato automaticamente ad esempio nei moti

piani e nei moti simmetrici rispetto ad un asse, quando avvengono per piani meridiani.

3. Il trinomio di Bernoulli si riduce ad una stessa funzione di t , in tutti i punti, per quei moti e soltanto per essi nei quali è

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v}.$$

Infatti allora, per la (3), è identicamente $\text{grad } \Phi = 0$ e quindi è Φ indipendente dal posto. Come si verifica facilmente, moltiplicando la (4) scalarmente per \mathbf{v} , il valore locale della velocità è ancora indipendente dal tempo. Tenuto conto di ciò, per la (4), il vettore \mathbf{v} in un punto varia col tempo come se fosse dotato di un moto rigido di rotazione intorno al punto con la velocità di rotazione $-\text{rot } \mathbf{v}$.

Notisi che il moto attualmente considerato diviene necessariamente stazionario se esso è irrotazionale ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) o di Beltrami ($\mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v} = 0$), annullandosi allora il primo membro della (4).

Infine non sussistono più le superficie di Bernoulli perchè Φ non dipende più dal posto. È interessante però rilevare che la congruenza di linee (funzione del tempo) individuata dal vettore variazione locale col tempo della velocità, cioè dal primo membro della (4) è normale tanto alle linee di flusso che alle linee vorticose. Se tale congruenza è normale, cioè se essa ammette un sistema di superficie normali queste superficie sono di flusso e vorticose insieme, come le superficie di Bernoulli nei moti stazionari.

4. Possiamo mettere in evidenza la condizione caratteristica dei moti considerati nel n. 2 scrivendo

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u},$$

essendo \mathbf{u} il versore di \mathbf{v} , con v funzione del posto ed \mathbf{u} funzione del posto e del tempo.

Per fluidi incomprimibili ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) v ed \mathbf{u} devono soddisfare alla relazione

$$v \text{div } \mathbf{u} + \text{grad } v \times \mathbf{u} = 0.$$

Se le linee di flusso sono isotachie si ha $\text{grad } v \times \mathbf{u} = 0$ e quindi $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Le linee di flusso pertanto costituiscono una congruenza solenoidale.

Riferendoci poi al numero precedente la (4) si può scrivere

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = v \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\text{grad } v \wedge \mathbf{u});$$

si dovrà inoltre tener conto della relazione precedente se il fluido è incomprimibile.

Astronomia. — *Misure interferometriche sui quattro grandi satelliti di Giove.* Nota II di MENTORE MAGGINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio corrisp. A. BEMPORAD.

In una Nota del 1922 ⁽²⁾ riferii all'Accademia sui primi tentativi fatti per misurare con l'interferometro di Catania il diametro dei quattro principali satelliti di Giove e, quel che più importa, la variazione di questo diametro secondo diversi angoli di posizione, ossia la ellitticità che presenta il satellite. Mi propongo ora di dare un breve resoconto delle osservazioni che ho eseguite fino ad oggi (la cui analisi completa formerà oggetto di altra pubblicazione) resoconto che, più che a trarre delle conclusioni definitive, intendo serva a richiamare l'attenzione degli osservatori sui numerosi e svariati problemi che ci presenta lo studio dei piccoli astri del nostro sistema solare. È appunto con tale intendimento che mi decido a riferire sui tentativi fatti per misurare i satelliti di Giove in anni in cui la forte declinazione australe del pianeta non avrebbe lasciato sperare niente di proficuo; Giove rimarrà australe ancora per varii anni; in attesa, è bene fin da ora vedere cosa si può sperare di ottenere quando le condizioni di esame saranno migliori. Nella presente Nota riferisco sul cambiamento di figura e d'inclinazione dell'asse.

1. I metodi usati nelle misure sono due. Col primo, deduco il diametro dei piccoli dischi in corrispondenza di varii angoli di posizione, ruotando l'interferometro di 20° in 20° e separando le fenditure fino alla scomparsa delle frange; col secondo, mantengo le fenditure ad una separazione fissa, opportunamente scelta, ruoto l'interferometro tutto in giro, ed ogni 20° stimo il contrasto fra le frange oscure e quelle chiare. Ottengo così una misura, su di una scala arbitraria, di quella che, con Michelson, si suole chiamare la « visibilità » del sistema di frange e che per le stime d'occhio è, come è noto, molto bene rappresentata dal rapporto

$$V = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2},$$

dove I_1 , I_2 sono rispettivamente la intensità delle frange chiare e delle frange oscure. Nelle prime prove del 1922 la « visibilità » venne ottenuta confrontando il sistema di frange dato dal satellite con quello dato da un dispositivo ottico laterale, ma questo fu possibile solo nel caso del III satellite; in seguito, acquistata una pratica sufficiente, potei senz'altro fare a meno

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1926.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », vol. XXXI, serie 5ª, 2º sem., fasc. 5º-6º, 1922.

delle frange di confronto e dedurre la «visibilità» da stime eseguite con una scala di contrasto costituita mentalmente. Questa scala venne di poi campionata confrontandola coi valori teorici dati dalla formola

$$V = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}$$

applicata a due fenditure poste in fronte all'obiettivo del rifrattore delle quali si poteva variare il rapporto ρ fra le aree.

Tutte le precauzioni sono prese per eliminare o per calcolare l'influenza degli errori proprii a ciascuno dei due metodi, cioè da una parte gli errori progressivi e periodici della vite che aziona le fenditure interferometriche, e le aberrazioni sferica e zonale dell'obiettivo, dall'altra gli errori di astigmatismo dell'obiettivo e di astigmatismo dell'osservatore.

Ancora da tenersi in gran conto è l'influenza che sulla «visibilità» delle frange ha la nostra atmosfera, influenza che si fa sentire con l'agitazione e con la dispersione. Dall'insieme delle misure di Catania è possibile ricavare una scala di *definizione* atmosferica, impersonale, basata sulla visibilità delle frange per un dato rapporto della larghezza alla distanza delle fenditure; opportune tabelle permettono di dedurre, dalla «visibilità» osservata con un determinato grado di definizione, la «visibilità» che corrisponderebbe ad un grado di definizione ideale. Per quel che si riferisce alla dispersione atmosferica, sembra che si possa concludere che la «visibilità» delle frange date da un astro diminuisce col crescere della distanza zenitale fino ad un valore minimo, per poi crescere di nuovo; il minimo ha luogo in corrispondenza di quella distanza zenitale per la quale la lunghezza dello spettro in cui è trasformato l'astro per effetto della dispersione atmosferica è uguale alla larghezza di una frangia. In generale, le misure sui satelliti di Giove sono state eseguite ponendo un filtro rosso dinanzi all'oculare; si elimina così in gran parte l'effetto della dispersione e si ha una maggior sicurezza del valore di λ .

2. Con queste precauzioni mi è stato possibile, quantunque l'altezza di Giove sull'orizzonte di Catania non fosse mai grande, ottenere delle misure abbastanza buone, capaci di fornire il profilo del disco di ciascun satellite in ciascuna sera di osservazione, nonchè la direzione dell'asse maggiore di questo disco, quando il profilo era ellittico. Dall'analisi di tutto il materiale finora raccolto si può concludere che nei quattro principali satelliti di Giove variano periodicamente tanto la ellitticità quanto la direzione dell'asse, con periodi brevissimi, di poche ore; una dipendenza dalla longitudine nell'orbita risulterebbe solo per il III satellite, nel senso che già riferii a suo tempo.

Riducendo le misure di ellitticità ad un unico periodo di variazione ed assumendo come origine della fase la ellitticità massima o la minima, se-

condo che, come fece già notare il Pickering, è meglio definita l'una o l'altra, si ottengono i seguenti periodi:

$$\text{I. } 5^{\text{h}} 57^{\text{m}} 39^{\text{s}} \quad \text{II. } 4^{\text{h}} 47^{\text{m}} 42^{\text{s}} \quad \text{III. } 3^{\text{h}} 58^{\text{m}} 6^{\text{s}} \quad \text{IV. } 3^{\text{h}} 42^{\text{m}} 24^{\text{s}}$$

Le variazioni di ellitticità durante questi periodi risultano adattarsi a sinusoidi più o meno regolari; per tutti i quattro satelliti la fase di minima ellitticità o di disco perfettamente rotondo è spostata verso il massimo che la segue e la curva può rassomigliarsi a quella che dà la variazione di luce di una cefeide. Se si considera il cambiamento di figura come dovuto alla rotazione del satellite intorno al proprio asse, la durata di questa rotazione è il doppio dei periodi soprariportati.

Nelle curve ora dette si riscontrano delle ineguaglianze la maggior parte delle quali sembra si ripetano ad intervalli di tempo determinati; queste ineguaglianze traducono graficamente degli scostamenti periodici della figura del satellite dalla forma ellissoidica. Sottoponendo le curve all'analisi armonica, ammettendo cioè che la variazione di ellitticità del satellite possa rappresentarsi con l'espressione di Fourier

$$e + A \sin \theta + B \cos \theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta + E \sin 3\theta + F \cos 3\theta + \dots$$

si ottengono i seguenti valori delle costanti, in unità della terza decimale:

	A	B	C	D	E	F	G	H
I.	— 185	— 461	— 2	— 75	+ 40	— 23	+ 12	— 22
II.	— 85	— 501	— 55	— 22	+ 8	— 1	+ 28	— 14
III.	— 58	— 503	+ 11	+ 9	+ 11	+ 11	— 41	— 8
IV.	— 119	— 456	— 14	— 95	— 5	— 62	+ 26	— 18

Si vede che per alcune costanti l'andamento è sistematico specialmente per i primi tre satelliti; in generale il valore del coefficiente di un determinato armonico decresce dal I al III satellite ed è facile ricavare delle relazioni semplici. Queste sono più evidenti, sia nell'amplitudine che nella fase, scrivendo l'espressione armonica nella forma più comune

$$-h_1 \cos(\theta - \varphi_1) + h_2 \cos(2\theta - \varphi_2) + h_3 \cos(3\theta - \varphi_3) + \dots$$

dove, come si sa,

$$h_1^2 = A^2 + B^2 \quad h_2^2 = C^2 + D^2 \quad h_3^2 = E^2 + F^2$$

$$\text{tang } \varphi_1 = A/B \quad \text{tang } \varphi_2 = C/D \quad \text{tang } \varphi_3 = E/F$$

Le curve di variazione di figura di ciascun satellite risultano allora:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 0.57 - 0.50 \cos(\theta - 22^\circ) + 0.08 \cos(2\theta - 1^\circ) - \\ & - 0.04 \cos(3\theta - 119^\circ) + 0.02 \cos(4\theta - 151^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad & 0.53 - 0.51 \cos (\theta - 10^\circ) + 0.06 \cos (2\theta - 68^\circ) + \\
 & + 0.03 \cos (4\theta - 117^\circ) \\
 \text{III.} \quad & 0.50 - 0.51 \cos (\theta - 7^\circ) + 0.01 \cos (2\theta - 51^\circ) - \\
 & - 0.01 \cos (3\theta - 45^\circ) + 0.04 \cos (4\theta - 79^\circ) \\
 \text{IV.} \quad & 0.59 - 0.47 \cos (\theta - 15^\circ) + 0.10 \cos (2\theta - 8^\circ) - \\
 & - 0.06 \cos (3\theta - 5^\circ) + 0.03 \cos (4\theta - 125^\circ).
 \end{aligned}$$

Le $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4$ vanno crescendo per i primi tre satelliti; la φ_1 poi del II è circa la metà della corrispondente del I, mentre la φ_4 del III è la metà di quella del II. D'altra parte abbiamo

nel I	satellite	$h_2 = 2 h_3$	$h_3 = 2 h_4$
nel II	»	$h_2 = 2 h_4$	
nel IV	»	$h_2 = 3 h_4$	$h_3 = 2 h_4$.

Siamo quindi condotti ad ammettere nelle curve di variazione di figura dei satelliti varie onde, sovrapposte a quella principale, le cui amplitudini vanno diminuendo secondo dei rapporti semplici. La presenza di queste onde non può non richiamare alla mente un effetto di marea prodotto su ciascun satellite dalla vicinanza degli altri tre; non sarà superfluo ricordare, come ha già fatto il Pickering, che le durate della rivoluzione sinodica dei primi tre satelliti sono all'incirca doppia l'una dell'altra.

3. L'angolo di posizione dell'asse maggiore dell'ellissoide varia altrettanto rapidamente, ma non mi è stato possibile dedurre dei periodi come per il cambiamento dell'ellitticità; migliori risultati ho ottenuti sottoponendo all'analisi le sole misure eseguite quando il satellite presentava l'allungamento massimo.

Si ottengono in questo caso delle sinusoidi le cui amplitudini e periodi variano da satellite a satellite come segue:

	I	II	III	IV
Ampl.	9°	22°	70°	15°
Per.	72 ^d	96 ^d	120 ^d	?

Anche qui si riscontrano delle irregolarità dovute ad onde secondarie. L'analisi armonica permette di dedurre le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & 0^\circ.54 - 0^\circ.44 \cos (\theta - 175^\circ) + 0^\circ.01 \cos (2\theta - 101^\circ) + 0^\circ.03 \cos (3\theta - 5^\circ) \\
 \text{II.} \quad & 0^\circ.54 - 0^\circ.46 \cos (\theta - 4^\circ) + 0^\circ.03 \cos (2\theta - 33^\circ) + 0^\circ.04 \cos (3\theta - 58^\circ) \\
 \text{III.} \quad & 0^\circ.59 - 0^\circ.45 \cos (\theta - 176^\circ) + 0^\circ.05 \cos (2\theta - 42^\circ) + 0^\circ.04 \cos (3\theta - 8^\circ).
 \end{aligned}$$

Per il IV satellite non si hanno misure sufficienti per una buona curva.

Come si vede, i coefficienti, amplitudini, dei vari armonici sono molto piccoli e solo quelli del primo raggiungono il mezzo grado. Le espressioni del I e del III satellite si somigliano per i valori della fase, mentre la

espressione del II ha la fase del primo armonico variata di 180° . Tenendo presenti i valori in giorni dei periodi si possono trasformare in tempo le differenze di fase ora date in gradi.

Senza entrare in discussione circa la natura di questi cambiamenti di inclinazione, possiamo concludere che per i primi tre satelliti si hanno indizi di almeno tre onde, sovrapposte a quella principale, delle quali sono molto brevi tanto l'ampiezza che la lunghezza.

In una prossima Nota mi propongo di studiare l'influenza che possono avere, sui dati interferometrici, le deboli macchie visibili talvolta alla superficie dei satelliti.

Astrofisica. — *Ancora sulle « ombre volanti »*. Nota del prof. VASCO RONCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Il prof. Horn d'Arturo ha sentito ⁽²⁾ « l'obbligo di confutare certe affermazioni » del prof. G. Armellini ⁽³⁾ e nostre ⁽⁴⁾ « che contraddicono all'interpretazione da lui proposta per il fenomeno delle ombre volanti ».

Lasciando al prof. Armellini la cura di difendersi dall'accusa di affermazioni che non pare abbia avuto intenzione di fare nella sua Nota, veniamo subito a quello che riguarda noi direttamente.

Nella nostra Nota dicevamo che probabilmente una esauriente spiegazione del fenomeno, proposta già da tempo, non era a conoscenza del professor Horn d'Arturo, perchè egli chiamava il fenomeno « notissimo, ma non chiarito ancora » ed al tempo stesso non citava nessuna fonte, per quanto la sua Memoria fosse molto estesa e ricca di dati e di notizie; ed abbiamo citato un paragrafo dell'*Optique Physique* di R. W. Wood, tanto per accennare ad una esposizione che, trovandosi sopra un trattato di indole così generale, presupponeva un precedente sviluppo in Note particolari e più dettagliate.

Il prof. Horn d'Arturo afferma ora di essere a conoscenza delle teorie già proposte e di essersi indotto a pensare agli *spiragli* avendo visto che quelle « non reggono al confronto colle cose osservate »: perchè « ciascuna giustifica qualche particolare del fenomeno, ma nessuna è in grado di render conto di tutte le apparenze descritte dagli osservatori »; e fa una critica di quella teoria che egli chiama del Wood, e che noi continueremo ora a chiamare così per intenderci, benchè gli stessi concetti si trovino anche in altri trattati precedenti. Veramente le obiezioni del prof. Horn d'Arturo

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1926.

(2) Questi « Rend. », III, 10, p. 591, maggio 1926.

(3) Questi « Rend. », II, 10, p. 371, novembre 1925.

(4) Questi « Rend. », III, 5, p. 267, marzo 1926.

non sono molto difficili da ribattere; ma troviamo più opportuno limitarci a citare un articolo di Ch. Fabry sul « Bull. de la Soc. Astr. de France » (1919), dove l'argomento è trattato in modo accessibile e disteso, e dove si trova già dimostrato ciò che ora viene riportato in discussione.

Neppur qui si parla dell'influenza del moto diurno della Terra sul movimento delle ombre volanti. La cosa viene naturalmente a perdere ogni interesse quando gli strati atmosferici attivi si trovano a piccola distanza dal suolo; in ogni caso non è questo un argomento contrario alla teoria del Wood e tale da giustificarne l'abbandono per introdurne una nuova; tutt'al più l'osservazione del prof. Horn d'Arturo potrà servire di complemento.

Quanto alle ulteriori repliche del prof. Horn d'Arturo, possiamo prendere atto della sua intenzione di non aver voluto dimostrare l'esistenza degli spiragli, e di aver voluto riportare il suo caso a quello dell'« Essere minuscolo, che si trovi a considerare sul terreno le immagini reali del disco solare, prodottevi dalle fronde d'un albero », e che fa una ipotesi errata. Però vorremmo notare che il paragone torna soltanto se il periodo si limita alle frasi che abbiamo scritto noi. Infatti se quell'omuncolo, come dice il prof. Horn d'Arturo, arriva all'ipotesi dell'esistenza degli spiragli traendo « conclusioni pienamente conformi alle regole del sano ragionare », fa una ipotesi non errata, tant'è vero che gli spiragli ci sono e son proprio quelli che proiettano sul terreno le immagini reali (per modo di dire) del disco solare. L'omuncolo potrebbe sbagliare se non tenesse conto di tutti gli elementi o tenesse poco conto di alcuni; ma allora le sue conclusioni non sarebbero più « conformi alle regole del sano ragionare ».

Questo ci pare il caso quando si voglia risalire dalle caratteristiche delle ombre volanti all'esistenza degli spiragli ottici a parecchi chilometri di altezza; perchè appunto se si prendono nella debita considerazione gli effetti degli strati inferiori dell'atmosfera, la necessaria costituzione di questi spiragli se sono di aria, gli effetti immancabili della diffrazione e le conseguenze ottiche, si arriva a delle conclusioni « che non reggono al confronto colle cose osservate ». Questo, secondo il comune modo di pensare, basta per dimostrare che gli spiragli non ci possono essere. Non sappiamo perchè il prof. Horn d'Arturo chiami vana questa dimostrazione.

Astronomia. — *Determinazione astronomica di latitudine ed azimut eseguita a Monte Settepani nel 1911.* Nota di U. BARBIERI presentata dal Corrisp. G. LORIA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra l'effetto Doppler nella fluorescenza sensibilizzata.*
Nota di FRANCO RASSETTI presentata ⁽¹⁾ dal Socio ANTONIO GARBASSO.

Nel 1921 Klein e Rosseland ⁽²⁾ dedussero da considerazioni termodinamiche che al processo della eccitazione di un atomo per urto con un elettrone - urto di prima specie - deve corrispondere un processo inverso, detto urto di seconda specie, per effetto del quale un atomo eccitato può tornare nello stato normale senza emissione di radiazione. Questa idea ha portato ad una spiegazione semplice di molti fatti spettroscopici; per esempio, la distruzione della luce di risonanza di un vapore, dovuta alla presenza di gas estranei, studiata da Wood ⁽³⁾ Franck ⁽⁴⁾ e Cario ⁽⁵⁾. Infatti, supponiamo che la densità del gas sia tale, che il tempo fra due urti sia piccolo in confronto alla vita media dell'atomo eccitato; allora, poichè, come hanno dimostrato Franck e Cario, la probabilità che l'urto sia di seconda specie è elevata, la maggior parte degli atomi cadrà nello stato normale senza avere emesso radiazione.

Un'altra prova degli urti di seconda specie, si ha nella distruzione degli stati metastabili. Se un atomo non subisse urti, rimarrebbe in uno stato metastabile un tempo illimitato, perchè il passaggio ad uno stato quantico di energia minore con emissione di radiazione è proibito. Invece, nel caso di urti di seconda specie, è naturale che non valga più nessuna regola di selezione, cioè qualunque transizione è possibile.

Un urto di seconda specie può portare l'atomo, dallo stato iniziale ad un livello più basso, senza farlo cadere addirittura nello stato normale, come è provato, per esempio, dalla formazione dello stato $2p_3$ dallo stato $2p_2$, per urti di seconda specie, nell'atomo di mercurio ⁽⁶⁾; o anche, dal passaggio dell'atomo di sodio ⁽⁷⁾ dagli stati $3p$ agli stati $2p$.

Nell'urto di seconda specie, al contrario di quello di prima specie, l'atomo si trova in un livello più basso alla fine del processo che all'inizio; si rende così disponibile una certa quantità di energia, che può essere impiegata in modo diverso a seconda dei casi, come hanno dimostrato, in una serie di ricerche, Franck e la sua scuola.

(1) Nella seduta del 20 giugno 1926.

(2) KLEIN e ROSSELAND, «Zeitschr. f. Phys.», 4, 46, 1921.

(3) R. W. WOOD, «Phys. Zeitschr.», 13, 353, 1912.

(4) J. FRANCK, «Zeitschr. f. Phys.», 9, 259, 1922.

(5) G. CARIO, «Zeitschr. f. Phys.», 10, 185, 1922.

(6) C. FÜCHTBAUER, «Phys. Zeitschr.», 21, 635, 1920; R. W. WOOD, «Proc. Roy. Soc.», 106, 679, 1924.

(7) G. CARIO e J. FRANCK, «Zeitschr. f. Phys.», 17, 202, 1923.

È stato usato generalmente in questi lavori l'atomo di mercurio, portato nello stato $2p_2$ mediante assorbimento della riga $\lambda = 2537$, di cui il quanto $h\nu$ corrisponde ad un potenziale di 4,9 volts. Il risultato è stato che, quando la particella urtata (atomo o molecola) può, assorbendo una energia minore od uguale ad $h\nu$, subire una qualsiasi trasformazione⁽¹⁾ (eccitazione, dissociazione, ionizzazione), questo processo si realizza effettivamente in un urto di seconda specie; se poi nessuno di tali processi è possibile, per esempio, se l'urto avviene con un atomo avente righe di risonanza di frequenza maggiore, allora l'energia $h\nu$ non può trasformarsi che in forza viva dei due atomi che prendono parte all'urto.

Il caso che a noi interessa, è quello in cui si ha eccitazione dell'atomo urtato, il quale assorbe un quanto $h\nu' < h\nu$ e poi torna nello stato normale, emettendo la riga di frequenza ν' ; il fenomeno si manifesta dunque in questo caso come una fluorescenza, detta « sensibilizzata ». Essa è stata osservata⁽²⁾, ⁽³⁾ in miscele di vapori di mercurio e di un altro metallo, avente un potenziale di risonanza minore di 4,9 volts (tallio, cadmio, piombo, ecc.), illuminando con la riga $\lambda = 2537$.

Anche nell'urto di seconda specie che dà luogo alla fluorescenza sensibilizzata, si ha una certa quantità di energia, e precisamente $h(\nu - \nu')$ che deve trasformarsi in energia cinetica. Lo scopo che mi sono proposto è appunto quello di dare una prova sperimentale diretta e quantitativa di quest'ultima conseguenza della teoria.

Il metodo scelto per osservare la velocità acquistata dagli atomi eccitati per urti di seconda specie, è stato quello di misurare l'effetto Doppler, risultante in un allargamento delle righe emesse. Franck e Cario⁽⁴⁾ hanno osservato che le righe D del sodio, emesse per fluorescenza del vapore illuminato con le righe $1s - 3p$, sono più larghe che quelle emesse per risonanza, in quanto vengono meno assorbite dal vapore stesso; e hanno interpretato questo fatto, supponendo che il passaggio dagli stati $3p$ agli stati $2p$ avvenga non attraverso allo stato $2s$ o agli stati $3d$, ma per urti di seconda specie, in conseguenza dei quali deve prodursi un allargamento. Ma per fare ricerche quantitative, ho creduto meglio cercare un caso in cui l'interpretazione fosse più sicura, e l'effetto Doppler più grande.

Mi sono servito della fluorescenza sensibilizzata in vapori di sodio e mercurio, cioè del processo seguente: un atomo di mercurio avente una energia di eccitazione corrispondente a 4,9 volts urta un atomo di sodio che si trova nello stato normale; lo eccita, cedendogli una energia di 2,1 volts, e l'eccesso di energia, 2,8 volts, va in forza viva. Poi l'atomo di sodio torna nello stato normale emettendo le righe D.

(1) G. CARIO e J. FRANCK, « Zeitschr. f. Phys. », 11, 161, 1922.

(2) H. KOPFERMANN, « Zeitschr. f. Phys. », 21, 316, 1924.

(3) K. DONAT, « Zeitschr. f. Phys. », 29, 345, 1924.

(4) Loc. cit.

In questo caso, le circostanze sono assai favorevoli, perchè l'energia disponibile come forza viva è notevole, e di essa inoltre, conformemente al principio della conservazione della quantità di moto, l'atomo di sodio che ha piccola massa assorbe la maggior parte; la luce D è poi comoda per le osservazioni per la grande sensibilità dell'occhio in quella regione.

È facile calcolare l'effetto Doppler che si deve avere. Chiamate m_1, v_1 ed m_2, v_2 le masse e le velocità dopo l'urto, rispettivamente dell'atomo di sodio e di quello di mercurio, ν_1 la frequenza delle righe D e ν_2 quella della riga $\lambda = 2537$, si hanno le due relazioni che esprimono le leggi della conservazione della quantità di moto e dell'energia

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) / 2 = h (\nu_2 - \nu_1).$$

Di qui, introducendo i valori numerici, si trova per la velocità dell'atomo di sodio $v_1 = 4,3 \times 10^5$; in questo calcolo si è trascurata la velocità iniziale degli atomi dovuta all'agitazione termica, essendo circa $1/10$ di v_1 .

Con questa approssimazione, le velocità degli atomi saranno uguali in grandezza, e distribuite uniformemente nelle varie direzioni. Calcoliamo la probabilità che la componente della velocità di un atomo in una certa direzione x , in cui si osserva la luce emessa, sia compresa fra ξ e $\xi + d\xi$. Immaginiamo a questo scopo di rappresentare le velocità di tutti gli atomi come segmenti orientati di egual lunghezza, a partire da una origine comune. Le estremità di questi segmenti saranno punti distribuiti uniformemente sopra una sfera; di essi, quelli per cui la componente della velocità in direzione x è compresa fra ξ e $\xi + d\xi$ ($\xi < v_1$) si trovano sulla porzione di sfera compresa tra due piani normali all'asse x , di ascisse ξ e $\xi + d\xi$; il loro numero è proporzionale all'area di questa superficie, cioè, per una nota proprietà della sfera, a $d\xi$.

Un atomo avente una componente di velocità ξ , dà origine a una riga spostata dalla posizione normale di

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \xi / c$$

quindi il numero di atomi che danno radiazione di lunghezza d'onda compresa fra λ e $\lambda + d\lambda$ è proporzionale a $d\lambda$, se λ è compreso fra $\lambda_0 (1 - v_1/c)$ e $\lambda_0 (1 + v_1/c)$, altrimenti evidentemente è zero. In conclusione, si dovrà osservare una riga di larghezza

$$\Delta \lambda = 2 \lambda_0 v_1 / c$$

dentro il quale intervallo, l'intensità è distribuita uniformemente.

Sostituendo per v_1 il valore già dato, si trova $\Delta \lambda = 0,17 \text{ \AA}$.

Passiamo a descrivere la parte sperimentale del lavoro.

Come sorgente luminosa, è stata adoperata una lampada a mercurio, raffreddata mediante immersione in acqua, allo scopo di avere la riga $\lambda = 2537$ sottile e non invertita.

I vapori di mercurio e di sodio si trovavano in un palloncino di quarzo, unito ad una pompa a diffusione di Volmer, tenuta in funzione continuamente durante le ricerche. Un pezzetto di sodio era messo dentro al palloncino, che veniva riscaldato ponendolo sopra ad un becco Bunsen, entro ad un tubo metallico verticale, munito di opportuna finestra per l'entrata della luce della lampada e per l'osservazione della fluorescenza. Il palloncino si trovava ad una temperatura circa di 350° ; il mercurio era posto in una opportuna piega del tubo che conduceva alla pompa, e tutto il tratto tra il mercurio e il palloncino era scaldato, mediante una stufa elettrica, a circa 120° , in modo da avere una pressione di vapore di quest'ultimo elemento, dell'ordine di $\frac{1}{2}$ mm. Le condizioni indicate, dopo alcuni tentativi, si dimostrarono le migliori per avere una fluorescenza intensa.

Avvicinando la lampada a mercurio alla finestra, era ben visibile nel palloncino la luminescenza gialla. Una immagine del vapore fluorescente era proiettata sulla fenditura di un grosso spettroscopio di Hilger, munito di reticolo a gradinata di 40 lastre, avente nel giallo un potere risolutivo di circa 400.000.

L'intensità delle righe D era sufficiente per fare buone osservazioni oculari, ma non per fare fotografie, per le quali sarebbero state necessarie pose dell'ordine di un'ora. E ciò era reso impossibile dal fatto che, alle temperature a cui la fluorescenza si manifesta, il vapore di sodio attacca rapidamente il quarzo, facendolo annerire; così che il fenomeno si osserva soltanto per una diecina di minuti.

Furono fatte, mediante un micrometro oculare, 3 misure su D_1 e 3 su D_2 ; la media delle letture ha dato come larghezza di D_1 0.14 \AA , di D_2 0.16 \AA ; quindi una media generale 0.15 \AA .

Se si confronta questo valore con quello teorico, 0.17 \AA , si trova che si ha coincidenza entro i limiti dell'errore sperimentale.

Inoltre, per quanto si può giudicare da osservazioni oculari, anche la conseguenza della teoria che l'intensità abbia distribuzione uniforme, appariva completamente verificata; salvo il fatto, che ciascuna riga nel centro era fortemente invertita; il che è naturale, poichè, producendosi la fluorescenza nell'interno del vapore, la parte centrale della riga è assorbita da questo prima di uscire dal palloncino.

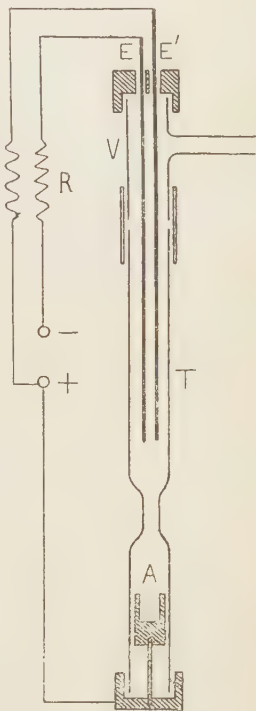
Per avere una prova definitiva che la larghezza della riga di fluorescenza fosse dovuta all'effetto cercato e non ad altre cause, osservai anche le righe D prodotte in un palloncino, in condizioni uguali a quelle della ricerca precedente, per risonanza. A tale scopo adoperai una lampada a vuoto ad amalgama di sodio, alquanto diversa da quelle usate da altri autori; la descrivo brevemente, perchè la trovai di facile costruzione e assai pratica nell'uso.

In un tubo T di quarzo trasparente, del diametro di circa 15 mm., è praticata una strozzatura, che lo riduce al diametro di 5 mm. Il tubo si usa in posizione verticale; all'estremità inferiore è masticiato l'anodo A , costituito da un cilindro di ottone, cavo per potervi introdurre l'amalgama, sostenuto da un filo metallico. Al tubo di quarzo è unito, mediante un giunto di gomma, un tubo di vetro V , che comunica con la pompa, ed ha masticiati due fili di ottone E, E' . Tali elettrodi ordinariamente si toccano, ma possono staccarsi dando una leggera scossa alla lampada. Le connessioni dei circuiti risultano chiaramente dalla figura. Posta in A un'amalgama circa di volumi uguali di sodio e di mercurio, e fatto nella lampada un vuoto conveniente con una pompa di Gaede, si dà una leggera scossa, per la quale si produce un arco fra E ed E' ; istantaneamente si stabilisce allora la scarica fra E ed A , e si mantiene per lungo tempo.

La lampada va adoperata con una tensione piuttosto elevata (300 volts); la resistenza R deve essere tale che non passi una corrente superiore a 3 Amp.

Appena accesa, la lampada dà soltanto lo spettro del mercurio; poi, a mano a mano che si riscalda, appare lo spettro del sodio. La strozzatura è naturalmente il punto più luminoso. L'estremità inferiore è bene sia mantenuta fredda mediante immersione in acqua.

Le righe D emesse da questa lampada sono sottili e intense, adatte quindi a produrre la risonanza. Concentrando la luce, mediante un condensatore, sopra un palloncino contenente vapore di sodio, la radiazione di risonanza è intensissima, e si può studiare bene con strumenti ad alto potere risolutivo. Esaminandola con lo spettroscopio a gradinata, trovai che le righe erano molto sottili, confermando così la causa dell'allargamento trovato nella fluorescenza sensibilizzata.



Fisica. — *Sulla ipotesi balistica e l'effetto Doppler.* Nota del dott. G. WATAGHIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Recentemente Corbino e Levi-Civita ⁽²⁾, hanno pubblicato una Nota sulla teoria balistica dell'effetto Doppler. La conclusione a cui giungono questi Autori è, che se si accettano le idee classiche sulla frequenza (precisate nel loro lavoro), l'effetto balistico dell'accelerazione risulta per alcune stelle doppie di gran lunga superiore all'effetto Doppler ordinario, cosicchè la ipotesi balistica risulta in questo caso contraddetta dall'esperienza (resta però per la teoria balistica aperta la possibilità di ricorrere, per definire la la frequenza, all'equazione di Einstein-Bohr).

Ora mi sembra che la questionè dell'incompatibilità della teoria balistica con l'esperienza non resta con ciò esaurita. Precisamente farò vedere in questa Nota, che le considerazioni di Corbino e Levi-Civita devono essere completate e che un esame dei risultati ottenuti da questi Autori e dei dati astronomici mostra che la teoria balistica conduce effettivamente a conseguenze astronomiche assurde sia se si pensa la frequenza come collegata con un'emissione consecutiva di onde (concetto su cui si basa la definizione ordinaria della frequenza), sia se si definisce la frequenza mediante l'equazione di Bohr.

2. La formola, che esprime l'effetto Doppler nella teoria balistica, quando ci si attiene al concetto ordinario della frequenza, è secondo Corbino e Levi-Civita ⁽³⁾:

$$(1) \quad v = v' \left[1 + \frac{\dot{r}}{c} + \frac{r\ddot{r}}{c^2} \right]$$

ove v e v' sono le frequenze della radiazione relative alla sorgente e all'osservatore rispettivamente; r è la distanza della sorgente dall'osservatore; c è la velocità della luce relativa alla sorgente; i punti indicano la derivazione fatta rispetto al tempo.

Ci sarà utile di scrivere la (1) sotto un'altra forma, particolarmente adatta alle considerazioni che seguono. A tal uopo adottiamo le notazioni seguenti: P è la sorgente; O l'osservatore; $v = \text{mod } \boldsymbol{v}$ è il modulo della velocità \boldsymbol{v} di P rispetto ad O; V è il modulo della velocità della luce in

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1926.

(2) «Rend. d. Acc. d. Lincei», vol. III, 1926. Debbo riconoscenza al prof. Levi-Civita, che gentilmente mi ha dato occasione di conoscere il contenuto di questa Nota prima della sua pubblicazione.

(3) V. form. (12) loc. cit.

direzione $O - P$; α è l'angolo, che \mathbf{v} forma con $O - P$; ρ è il raggio di curvatura dell'orbita di P ; $\beta = \frac{v}{c}$.

Se il piano osculatore alla traiettoria in P passa per O , allora la componente secondo la direzione di $P - O$ dell'accelerazione di P è notoriamente:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

ove θ è l'anomalia in un sistema di coordinate cilindriche, che ha l'origine in O e l'asse z normale al piano contenente $P - O$ e v .

Se ne deduce:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \pm \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha - \dot{v} \cos \alpha.$$

Sostituendo nella (1) il valore di \ddot{r} così ottenuto, trascurando il termine contenente $\dot{\theta}^2$ ⁽¹⁾, e ricordando che $\dot{r} = v \cos \alpha$, si ottiene la formola cercata ⁽²⁾:

$$(2) \quad v = v' \left[1 - \beta \cos \alpha \pm \frac{r}{c^2} \cdot \frac{v^2}{\rho} \cdot \sin \alpha - \frac{r\dot{v}}{c^2} \cdot \cos \alpha \right].$$

L'ultimo addendo della (2) rappresenta l'effetto balistico dell'accelerazione tangenziale, mentre il penultimo si riferisce all'accelerazione centripeta. Formole molto simili alla (2) sono già state ricavate e applicate alle stelle doppie per la prima volta da Zurhellen e in seguito da de Sitter, Thirring e Bernheimer ⁽³⁾. La deduzione però non era basata su uno studio preciso e generale del lato cinematico del problema, e sebbene le relazioni finali siano talvolta solo dei casi particolari della (2), le applicazioni alle stelle doppie e quindi anche le obbiezioni alla teoria balistica di questi Autori non mi sembrano esaurienti per una ragione, che sarà rilevata nel prossimo paragrafo.

La valutazione sommaria dell'ultimo termine della (2) è stata tentata da Bernheimer (l. c.), il quale trova per la componente principale di S An-

$$(1) \text{ Perchè } \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} = \beta^2 \sin^2 \alpha.$$

(2) Questa formola si deduce anche direttamente dalla relazione generale (11') della Nota di CORBINO e LEVI-CIVITA. Basta considerare V come funzione di v e di α [notoriamente, secondo RITZ: $V = c (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha} + \beta \cos \alpha)$], eseguire le derivazioni, sviluppare, osservando che, se il piano osculatore dell'orbita passa per O : $\dot{\alpha} = \pm \frac{v}{\rho} \pm \frac{v \sin \alpha}{r}$ e trascurare i termini di ordine superiore al 2° in β .

(3) ZURHELLEN, « Astr. Nachr. », B. 198, Nr. 4729 (1914); DE SITTER, « Bull. of the Astr. Inst. of the Netherlands », V. 2, pp. 121, 163 (1924); THIRRING, « ZS. f. Phys. », 31, p. 133 (1925); BERNHEIMER, « ZS. f. Phys. », 36, p. 302 (1926).

tliae un valore di $\frac{r\dot{v}}{c^2}$ dell'ordine di $4 \cdot 10^3$. Purtroppo egli non precisa le ipotesi fatte sullo stato di moto della sorgente, il che infirma il valore dimostrativo del suo calcolo⁽¹⁾.

Corbino e Levi-Civita (come anche Zurhellen e de Sitter, v. l. c.) si occupano specialmente del penultimo termine della (2), considerando il caso particolare del moto circolare uniforme della sorgente intorno ad un bari-centro G, fermo rispetto a O. In questo caso $\dot{v} = 0$, e l'ultimo termine si riduce a zero.

3. La valutazione del penultimo termine relativo all'accelerazione centripeta richiede in particolare la conoscenza di v . E qui nasce la principale difficoltà, che mette in dubbio l'attendibilità dei calcoli di tutti gli autori sopracitati⁽²⁾. Le componenti radiali delle velocità delle stelle si misurano coll'effetto Doppler, ma *i valori numerici di \dot{r} , che si trovano nelle tavole astronomiche sono tutti dedotti in base alla formola classica dell'effetto Doppler:*

$$(3) \quad v = v' [1 - \beta \cos \alpha]$$

e quindi non possono servire per la verifica della (2), dedotta nell'ipotesi balistica, cioè, partendo da un'ipotesi, contraria a quella, su cui si basa la (3) [che è il principio di costanza della velocità della luce]. (Mi metto qui naturalmente sul punto di vista della teoria ondulatoria non quantistica, dato che la (2) vale solo in questa ipotesi).

Sarà quindi necessario nella verifica sperimentale della (2) cercare di evitare l'uso dei valori di v dedotti in base alla (3). Corbino e Levi-Civita cercano di superare questa difficoltà, ricorrendo al confronto dei due termini della (2): il termine $-\beta \cos \alpha$ relativo all'effetto Doppler ordinario e il termine $\frac{r}{c^2} \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha$ relativo all'accelerazione centripeta. Nel caso del moto circolare uniforme della sorgente il confronto si fa facilmente.

Basta osservare, che in questo caso vale:

$$(4) \quad \frac{v}{\rho} = \frac{2\pi}{T}$$

(1) Perchè la formola di Zurhellen e de Sitter, usata da Bernheimer, fosse esatta, bisognerebbe, che u avesse il significato della componente radiale della velocità della sorgente rispetto all'osservatore.

(2) Escluso quello di Zurhellen. L'obiezione, che si può fare all'importante lavoro di quest'ultimo, è che in esso non si è tenuto conto del possibile sfasamento nella misura fotometrica dell'eclissi di una doppia, dovuto alle variazioni di intensità e sovrapposizioni dei raggi provenienti da diversi punti dell'orbita, che si hanno nell'ipotesi balistica.

ove T è il periodo di rotazione della stella, noto per via affatto indipendente dalla misura di v ;

$$\frac{r}{c^2} \cdot \frac{v^2}{\rho} = \beta \cdot \frac{r}{c} \cdot \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \beta \cdot \frac{T_1}{T}$$

ove $T_1 = \frac{r}{c}$ è il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza

$O - P$ (calcolato in conformità col principio della costanza della velocità della luce), quindi T_1 è facilmente calcolabile.

Ponendo ora con La Rosa $K = \frac{T_1}{T}$, si può dare alla (2) la forma seguente:

$$(5) \quad v = v' \left[1 - \beta (\cos \alpha \pm 2\pi K \sin \alpha) - \frac{r\dot{v}}{c^2} \cos \alpha \right]$$

ove K si misura per via affatto indipendente dalla misura di v o da una qualsiasi teoria dell'effetto Doppler.

Questo è il procedimento seguito da Corbino e Levi-Civita. Per valutare l'influenza dell'accelerazione questi Autori confrontano i valori massimi dei due addendi del coefficiente di β nella (5), cioè 1 e $2\pi K$, giungendo alla conclusione (V. sotto nella tabella II i valori di $2\pi K$), che l'effetto dell'accelerazione è per alcune doppie di gran lunga superiore all'effetto Doppler ordinario.

4. Per giustificare questa conclusione è necessario però assicurarsi, che la (5) è applicabile, almeno per quanto riguarda l'ordine di grandezza, a tutte le doppie.

Lasciamo per ora da parte il caso in cui l'ultimo termine della (5) non è trascurabile di fronte alla somma degli altri due, riservandoci di considerarlo in seguito. Ricordiamo che la (5) è stata dedotta in base alla (4), e che la relazione (4) cade in difetto se il baricentro della doppia non è in quiete rispetto all'osservatore, e se l'orbita non è circolare (ρ allora non è più il raggio dell'orbita relativa al baricentro, ma il raggio di curvatura della traiettoria relativa all'osservatore).

Ora, per le doppie finora conosciute le velocità di traslazione risultano sempre dello stesso ordine di grandezza delle velocità orbitali, e quindi anche ρ è dell'ordine di grandezza del raggio dell'orbita.

Questa circostanza può essere stabilita con certezza in base alle misure dell'effetto Doppler, anche quando le si considera dal punto di vista della teoria balistica [cioè anche quando si ricorre per determinare la v alla (2) e non alla (3)]. Infatti l'ipotesi, che la velocità di traslazione della doppia è molto grande rispetto a quella delle sue componenti relativa al baricentro della stella è da scartarsi per tutte le doppie spettroscopiche, per le quali si osserva uno spostamento periodico oppure uno sdoppiamento delle righe

spettrali; quindi essa è da scartarsi in generale per tutte le doppie conosciute, perchè anche le così dette doppie telescopiche dimostrano lo stesso comportamento spettroscopico.

Per convincersene basta osservare, che se la velocità orbitale fosse trascurabile di fronte alla velocità di traslazione del sistema, l'effetto Doppler dovrebbe ridursi ad uno spostamento costante delle righe. (L'angolo α sarebbe praticamante costante).

Per illustrare questa circostanza riproduco nella tabella I⁽¹⁾ i valori delle velocità orbitali delle componenti e le velocità di traslazione del baricentro di alcune doppie dedotte naturalmente nell'ipotesi della validità della (3). Gli esempi scelti si possono considerare come tipici. Essi illustrano il fatto sperimentale, che generalmente la variazione periodica delle frequenze, dovuta alla variazione della componente radiale della velocità orbitale, o supera o è dello stesso ordine della variazione costante della frequenza, dovuta al modo traslatorio del baricentro.

Possiamo dunque esser sicuri, che la (4) riproduce con esattezza almeno l'ordine di grandezza del rapporto $\frac{v}{\rho}$.

Per quanto riguarda le altre ipotesi fatte nella deduzione della (5), e cioè che il piano dell'orbita passa per O, e che l'orbita è circolare, esse sono poco restrittive, come osservano Corbino e Levi-Civita, perchè esclusi i casi eccezionali (piano dell'orbita normale alla visuale), l'ordine delle grandezze, che compaiono nella (5), non resta modificato, se queste ipotesi non si avverano (anche se per es. l'orbita non è piana).

5. Passiamo ora in rassegna i valori di $2\pi K$, relativi ad alcune doppie.

Questi valori dimostrano ovviamente l'importanza preponderante, che ha l'accelerazione centripeta per le doppie a corto periodo. Sembra evidente che sia impossibile metterli d'accordo colle misure astronomiche dell'effetto Doppler. Ma forse non è superfluo osservare, che *a rigore questi valori non dimostrano ancora che la formula (2) o (5) è contraddetta dall'esperienza*. Infatti, la legge della dipendenza da α dell'effetto di accelerazione (termine $2\pi K\beta \sin \alpha$) è ancora della forma periodica sinusoidale. Quindi è lecito supporre, che l'effetto Doppler osservato sia dovuto, nei casi considerati, all'accelerazione, e applicare la (5) per ricavare dalle misure dell'effetto Doppler (cioè dalle misure di $\Delta v = v' - v$) il valore balistico di v .

Però un semplice confronto delle due formule (3) e (5) mostra che per ottenere lo spostamento di $v' - v$ delle righe spettrali osservato, mediante la formula balistica (5), è necessario attribuire alla velocità v della

(1) Mi sono servito nel compilare sia la tabella I, che la tabella II in parte del « Third Catalogue of Spectroscopic Binary Stars » (Lick Obs. Bull. Nr. 355), ricorrendo agli esempi già citati da Thirring e da Bernheimer, in parte di alcuni dati comunicatimi gentilmente dal prof. Volta.

TABELLA I.

	γ = semi- ampiezza della curva di velocità orbitale (relativa al baricentro) in $\frac{\text{Km.}}{\text{sec.}}$	V_0 = velo- cità radiale del baricentro in $\frac{\text{Km.}}{\text{sec.}}$
α Aurigae I	26	+ 30
α Virginis I	126	+ 2
β Aurigae I.	109	— 18
δ Draconis	23,5	— 8
RZ Cass.	69,30	— 38,32
Boss. 4622 { comp. princ.	105,09	— 8,51
satt. . . .	103,12	
S Antliae { comp. princ.	81	— 5
satt. . . .	148	
W U. Ma. { comp. princ.	134	— 5
satt. . . .	188	

TABELLA II.

	Distanza $T_1 = \frac{r}{c}$ in anni luce	Periodo T in giorni	$2\pi K = 2\pi \frac{T_1}{T}$
α Centauri	4,5	78,8	120
α Aurigae	11	104,0	230
Algol.	65	2,87	26.000
RZ Cass.	112,2	1,20	204.000
W W Aur.	270	2,52	240.000
Boss. 4622	362	2,05	396.000
S Ant.	465	0,65	1.566.000
W Ursae Maj. . . .	326	0,33	2.150.000

stella un valore, che è circa $2\pi K$ volte minore di quello dedotto in base alla formula (3). Infatti la (3) e la (5) danno rispettivamente:

$$(3') \quad \beta = \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$(5') \quad \beta = \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \pm 2\pi K \sin \alpha}$$

ove il valore massimo del coefficiente $\frac{\Delta v}{v} \cong \frac{v' - v}{v'}$ è determinato sperimentalmente.

Per le componenti principali delle stelle W Ursae Maj. e S Antliae, che sono doppie spettroscopiche, per cui sono visibili le linee spettrali di ambo le componenti, la formola (3') dà una velocità orbitale (relativa al baricentro della stella) di circa $134 \frac{\text{Km}}{\text{sec}}$ per una, e $81 \frac{\text{Km}}{\text{sec}}$ per l'altra. Le velocità corrispondenti dedotte in base alla (5') sarebbero dell'ordine di grandezza di $6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Km}}{\text{sec}} = 6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ per la W Ursae Maj., e di $5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ per

S Antliae. Cito ancora come esempio di una stella ben conosciuta il caso della variabile Algol. La velocità di Algol relativa al baricentro è di $45 \frac{\text{Km}}{\text{sec}}$. La velocità calcolata in base alla (5) risulterebbe dell'ordine di 2 m.

Ovviamente questi valori di v non sono accettabili. Credo però non superfluo di considerare la questione più da vicino:

1) Vi è una incompatibilità tra il valore piccolo di v , il corto periodo, e le dimensioni presumibili dell'orbita. Così per la W U. Maj. nell'ipotesi che $v = 6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, il diametro dell'orbita risulta dell'ordine di 600 m.!

2) L'effetto Doppler è dovuto al moto relativo della sorgente rispetto all'osservatore. Ora l'osservatore terrestre è animato da una velocità relativa al sole dell'ordine di $30 \frac{\text{Km}}{\text{sec}}$ (velocità del moto annuo della terra sull'eclittica) *variabile in direzione* rispetto alle stelle. Quindi le variazioni, che subisce la velocità della stella relativa alla terra in un anno, sono almeno dell'ordine di $30 \frac{\text{Km}}{\text{sec}}$. Dello stesso ordine dev'essere, come abbiamo visto sopra, anche la velocità orbitale di tutte le doppie, per cui si osserva lo sdoppiamento o spostamento periodico delle linee spettrali.

La (5) dà in questo caso, per le doppie considerate nella tabella II, un valore di Δv assolutamente fantastico $\left[\frac{\Delta v}{v} \cong 230 \text{ per la W U. Maj.} \right]$.

Il caso in cui l'ultimo termine della (5) non è trascurabile di fronte a quello relativo all'accelerazione centripeta conduce evidentemente agli stessi risultati assurdi.

La formola (5) o (2) è quindi in ogni caso contraddetta dall'esperienza.

6. Ma Corbino e Levi-Civita hanno prospettato un'altra possibilità per la teoria balistica. Notoriamente l'effetto Doppler trova la sua interpretazione anche nella teoria dei quanti. Questa interpretazione è basata sui concetti energetici, e ad essa non è più applicabile la (1) (cfr. l. c.). Con ciò scompaiono quindi tutte le difficoltà relative alle formole (2) e (5). Ne nascono però delle altre.

La teoria dei quanti conduce all'espressione (3) per l'effetto di Doppler, l'uso della quale è in tal caso giustificato dal punto di vista della teoria balistica. E allora riesce difficile confutare le obiezioni mosse alla teoria di La Rosa, da Thirring e Bernheimer, relativa ai valori che può assumere il fattore $K\beta$.

Finchè non era stabilita la formola balistica dell'effetto Doppler queste obiezioni rimanevano criticabili. Infatti, se, per es., si ricorre alla (5) per determinare la v , i valori di $K\beta$, che ne risultano sono assai inferiori al valore 5 (e anche a $\frac{1}{30}$). Essi sono allora tutti dell'ordine di $\frac{1}{2\pi} \frac{\Delta v}{v}$,

ove $\frac{\Delta v}{v}$ è l'effetto Doppler osservato, cioè $\frac{\Delta v}{v}$ è dell'ordine di 10^{-4} . Non appena la (3) diventa una formula « balistica », bisogna riconoscere, che la teoria di La Rosa si trova in pieno disaccordo con le osservazioni relative a tutta una classe di doppie (cfr. Bernheimer, l. c.). La critica di La Rosa delle misure di parallasse non può scuotere questa conclusione, perchè in questo caso non si tratta di valutazioni quantitative, ma di apprezzamenti degli ordini di grandezza.

Concludendo, possiamo dire, che le due trattazioni dell'effetto Doppler, che finora si conoscono, conducono entrambe a risultati decisamente sfavorevoli all'ipotesi balistica.

Fisica. — *Metodo per la misura delle variazioni delle capacità calorifiche nei campi magnetici.* Nota di B. NANNEI, presentata dal Corrisp. G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Elettrochimica. — *Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo.* Nota di L. MAZZA, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sugli ossidi ed idrati di cobalto.* Nota II. *Struttura cristallina dell'ossido salino di cobalto* ⁽¹⁾. Nota di G. NATTA e F. SCHMID, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

L'ossido salino di cobalto Co_3O_4 può essere preparato oltre che dagli altri ossidi di cobalto, tra i quali appare essere il più stabile, per mediocre arroventamento all'aria, anche da moltissimi altri composti sia del cobalto bivalente che di quello trivalente. Solo per riscaldamento a temperature molto più elevate ⁽³⁾, o meno alte se in presenza di riducenti, si trasforma nell'ossido cobaltoso, il quale però all'aria alla temperatura del rosso ciliegia riassorbe ossigeno ritrasformandosi nel primitivo ossido salino.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 20 giugno 1926.

(3) PROUST, « J. Phys. », 63, 421; RUSSEL, « J. Chem. Soc. », (2), 1, 51; ZIMMERMANN, « Ann. », 232 (1886), 340.

Questo si riuscì ad ottenere microscopicamente cristallino per via secca da miscele di cloruro ammonico e sali di cobalto (ad esempio ossalato) in presenza di ossigeno⁽¹⁾; così preparato è inattaccabile sia all'acido cloridrico e al nitrico concentrati, che all'acqua regia bollente; al microscopio appare in piccoli ottaedri. Pure cristallino fu ottenuto⁽²⁾ dal cloruro di cobalto per riscaldamento all'aria umida in ottaedri, non isomorfo con il Mn_3O_4 .

Null'altro si conosce sulla sua struttura cristallina e nessuno sinora potè dimostrare il suo isomorfismo con il corrispondente ossido di ferro: la magnetite.

È interessante osservare che pure il Ni_3O_4 fu ottenuto secondo Baubigny⁽³⁾ per riscaldamento del $NiCl_2$ all'aria umida in cristalli microscopici, appartenenti alla forma dello spinello; mentre lavori del Bellucci⁽⁴⁾ e successivi röntgenografici, compiuti dall'ing. Ferrari in questo Laboratorio ma non pubblicati, negherebbero l'esistenza del Ni_3O_4 . Questi infatti fotografando il prodotto, descritto come Ni_3O_4 ed ottenuto secondo il metodo indicato da Dudley⁽⁵⁾, non ottenne che un debole fotogramma del NiO .

Appare perciò utile l'esame röntgenografico del Co_3O_4 , sia per confermarne l'esistenza, che potrebbe da qualche analogia con il presunto Ni_3O_4 sembrare dubbia, sia per determinarne la struttura cristallina ed atomica, questa particolarmente interessante perchè nello stesso reticolo dovrebbero presentarsi atomi dello stesso elemento ma di valenza diversa: $(Co_3O_4 = Co_2O_3 \cdot CoO)$.

Noi abbiamo dapprima preparato del Co_3O_4 , per forte arroventamento del nitrato di cobalto all'aria, che all'analisi risultò contenere il 73.21 % di Cobalto (teorico 73.44 %). Tale prodotto fu fotografato con la radiazione, emessa da un anticatodo di nichelio di un tubo Coolidge ad elettroni, sotto una tensione di 30,000 Volta, con il solito metodo delle polveri.

Il fotogramma così ottenuto fu ordinato nel sistema monometrico; come lato della cella elementare risulta $a = 8.02 \text{ \AA}$, valore abbastanza vicino a quello osservato nella magnetite ($a = 8.30 \text{ \AA}$)⁽⁶⁾. Nella seguente tabella sono indicati gli indici delle faccie che hanno prodotto riflessioni, il seno dell'angolo di riflessione corretto per lo spostamento dovuto al diametro del preparato, la distanza reticolare d della faccia riflettente, ed il lato a del cubo che da quella si calcola.

Supposto che la cella elementare contenga 8 molecole risulta per la densità: $d = \frac{8 \times 1.66 \times 241}{(8.02)^3} = 6.21$, valore compreso tra quelli abba-

(1) SCHWARZEMBERG, « Ann. », 97, 211; « Jahresber. ü. Fortschr. Chem. » (1885), 406.

(2) GORGEU e BERTRAND, « Compt. rend. », 100 (1885), 175; C. B., 1885, 186.

(3) BAUBIGNY, « Compt. rend. », 87 (1878), 1082; 141 (1905), 1232; 142 (1906), 154.

(4) BELLUCCI e CLAVARI, « Atti Lincei », (5), 14 (1905), 2°, 234.

(5) DUDLEY, « J. Am. Chem. Soc. », 18, (1896), 901.

(6) BRAGG W. H., « Phil. Mag. », 30, 305.

stanza discordi, da 5.833 a 6.296, osservati sperimentalmente⁽¹⁾ e, come è naturale, assai vicino al massimo.

$h_1 h_2 h_3$	$\sin \frac{\theta}{2}$	d	a	Intensità	
				I oss.	I calcol.
202	0.2929	2.83	8.01	mf	1,068
113	0.3428	2.418	8.00	ff	3,777
004	0.4136	2.002	8.00	mr	1,571
224	0.5055	1.64	8.02	d	560
151	0.5439	1.522	7.92	f	1,250
440	0.5844	1.415	8.00	ff	4,137
351	0.6156	1.347	7.97	dd	130
260	0.6520	1.27	8.03	dd	324
353	0.6770	1.222	8.00	md	777
262	0.6819	1.215	8.03	d	31
444	0.7150	1.157	8.00	d	460
700	0.7235	1.145	8.01	dd	16
246	0.7716	1.073	8.015	d	565
713	0.7912	1.046	8.02	f	2,155
553					
800	0.8239	1.005	8.04	m	1,552
660	0.8734	0.948	8.045	md	1,380
751	0.8902	0.93	8.05	mf	1,312
840	0.9206	0.90	8.05	mf	1,660

Data l'analogia nella composizione e nelle dimensioni della cella elementare, abbiamo supposto, nei calcoli di verifica della struttura, anche per il Co_3O_4 una disposizione atomica analoga a quella attribuita alla magnetite, che come è noto ha un reticolo cristallino del tipo degli spinelli. In fig. 1 è rappresentata schematicamente la cella elementare con i soli atomi di Co^{++} , che formano un reticolo tipo diamante ed occupano i vertici ed il centro delle faccie del cubo e tetraedricamente 4 dei cubetti elementari inscritti di lato $a/2$. Uno di tali cubetti è disegnato in fig. 2, mentre in fig. 3 è rappresentato uno dei quattro rimanenti cubetti non centrati dall'atomo di Co^{++} , contenenti 4 atomi di Co^{+++} , disposti tetraedricamente, e 4 atomi di ossigeno. In base a questa ipotesi di struttura e ponendo per

(1) RAMMELSBERG, «Kryst. Chem.», 1°, 1881, 201.

gli atomi di ossigeno e di Co^{++} un parametro $u = 1/8$, sono state calcolate le intensità delle singole riflessioni che accordano abbastanza bene con quelle osservate dal fotogramma: tali intensità osservate e calcolate sono espresse nelle due ultime colonne della precedente tabella.

Viene così dimostrato che il Co_3O_4 è isomorfo col Fe_3O_4 e come questo cristallizza nella forma degli spinelli. Uno di noi aveva già calco-

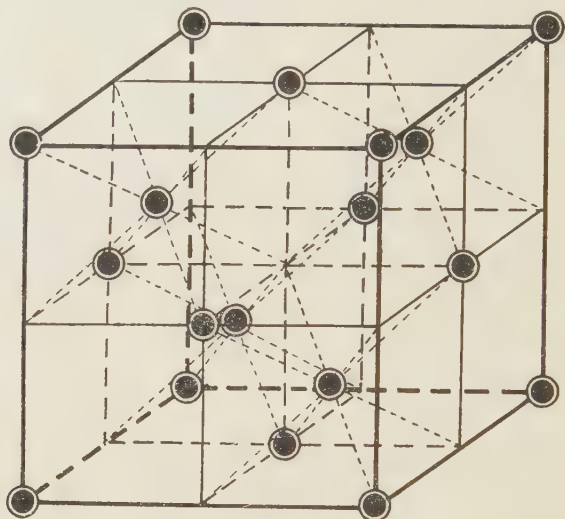


fig. 1

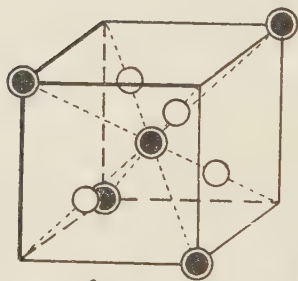


fig. 2

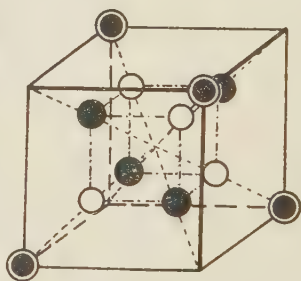
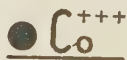


fig. 3



lato, nella precedente Nota sugli ossidi ed idrati del cobalto, il diametro dell'ione Co^{++} , ma tale valore e quello universalmente ammesso per il diametro dell'ossigeno sono inammissibili per la struttura su enunciata anche ammesso che il diametro del Co^{+++} , possa essere alquanto più piccolo di quello del Co^{++} . Solo assumendo per il parametro u degli atomi di Co^{+++} un valore parecchio diverso da $1/8$ e dal valore del parametro degli atomi

di ossigeno, si può senza alterare fondamentalmente il tipo di struttura, giungere ad un reticolo non incompatibile con i diametri atomici ⁽¹⁾. Su questo argomento, che si riallaccia a quello della struttura elettronica degli spinelli, riferirà in seguito uno di noi, se i lavori tuttora in corso daranno risultati soddisfacenti.

Conclusioni. — L'ossido salino di cobalto, Co_3O_4 , cristallizza nel sistema monometrico, isomorfo con la magnetite. La cella elementare del reticolo cristallino, del tipo degli spinelli, possiede un lato di 8.02 \AA e contiene 8 molecole. In base a tale struttura si calcola per il Co_3O_4 una densità $d = 6.21$.

Chimica. — *Sull'1-N-fenil- α , β nafto-1, 2, 3-triazolchinone.*
Nota di G. CHARRIER, presentata dal Corrisp. G. ERRERA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Della dispersione rotatoria e rifrattiva delle soluzioni acquose dell'acido tartarico.* Nota di M. L. PAGLIARULO, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Analogia di comportamento e isomorfismo fra cerio e torio.* Nota di G. SCAGLIARINI presentata dal Corrisp. G. BOERIS.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Durante la stampa della presente Nota abbiamo ricevuto un lavoro di V. M. GOLDSCHMIDT (*Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*. VII, «Norske Videnskaps-Akad. Skrift. I kl.», 1926, n. 2), nel quale sono calcolati i raggi atomici degli ioni ammettendo quello dell'ione ossigeno eguale a 1.33 \AA , valore calcolato da J. A. Vasastjerna in base a dati ottici; essendo tale valore esattamente il doppio di quello dato da Bragg, si calcolerebbero per gli ioni metallici dei valori notevolmente diversi. Nel caso del Co_3O_4 le ipotesi di Goldschmidt non alterano le nostre conclusioni ed il valore $1/8$ del parametro u della struttura degli spinelli appare egualmente incompatibile con tali nuovi valori dei diametri atomici.

Chimica. — *Composti di addizione tra alogenuri dello stagno e del titanio a basi organiche.* Nota di G. SCAGLIARINI e M. MONTI presentata dal Corrisp. M. G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti a basi organiche.* Nota di G. SCAGLIARINI e G. TARTARINI, presentata dal Corrisp. M. G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *I minerali delle serpentine di Piosasco (Piemonte).* Nota di E. REPOSSI e V. GENNARO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio C. F. PARONA.

Nelle grandi cave di materiali da pietrisco aperte da diversi anni nelle serpentine scistose di Piosasco, alle falde del Monte S. Giorgio, che si protende verso la pianura una quindicina di chilometri ad occidente da Torino, non sono stati finora segnalati minerali cristallizzati degni di particolare menzione. Nello scorso autunno, ed in ripetute visite compiute in seguito, ci fu invece possibile raccogliere in queste cave un copioso materiale mineralogicamente interessante, ed ora ne è in corso lo studio.

E poichè questo studio, data l'abbondanza del materiale e l'importanza di esso, che a noi sembra non trascurabile, richiederà ancora alquanti mesi per essere compiuto, riteniamo opportuno darne fin da oggi qualche cenno preliminare, riservandoci di pubblicare in seguito le descrizioni complete delle singole specie, di mano in mano che verranno ultimate.

I minerali cristallizzati di Piosasco, a somiglianza di quanto si verifica nei giacimenti della stessa zona (Comba Robert, S. Ambrogio, ecc.), provengono dai litoclasti di lenti di granatite disposte a catena entro le serpentine. Anche in questo giacimento, tali lenti, di solito di non grandi dimensioni, sono ravvolte da clorite e con essa abbondantemente commiste. Anzi, a Piosasco, la clorite è forse diffusa in maggior quantità che negli altri giacimenti ricordati, e, in certi litoclasti, singolarmente bella. Ed a

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1926.

questa notevole abbondanza di clorite sembra pure connettersi un'accentuata irregolarità delle lenti granatitiche, che raramente presentano la netta forma a mandorla osservata altrove, ma spesso sono invece disordinatamente attraversate da zone e masserelle cloritiche ed energicamente stirate. Una forte laminazione è del resto il carattere di tutto il giacimento, il quale anche in questo ripete più o meno distintamente la fisionomia dei giacimenti di Comba Robert e di S. Ambrogio.

Peculiare del giacimento di Piossasco è invece il colore presentato dalle masse di granatite che non sono rosee o rosse come di consueto, ma hanno una tinta violacea scura, affatto tipica, raramente osservata altrove.

Le specie delle quali fu sinora accertata la presenza a Piossasco, sono le seguenti: *ilmenite*, *magnetite*, *calcite*, *aragonite*, *diopside*, *granato*, *vesuvianite*, *clorite*, *titanite*, *perowskite*, *apatite*. A queste va aggiunta con ogni probabilità la *gavite*. Fu inoltre riscontrata qualche masserella di *crisocolla*, la quale accennerebbe alla esistenza pure di solfuri cupriferi, finora non trovati in individui distinti.

Tra queste specie hanno particolare interesse l'ilmenite, la vesuvianite, la clorite, la titanite e la perowskite; le quali tutte sono rappresentate da numerosi e bei cristalli.

L'ilmenite trovasi in cristalli di dimensioni variabili da 1-2 a 6-7 mm., di solito con abito nettamente tabulare o lamellare, qualche volta anche in cristalli grossetti. Ordinariamente le facce sono appannate, rugose o incurvate, ma non mancano cristalli lucenti e perfetti, suscettibili di buone misure goniometriche.

Le forme finora osservate in questo minerale sono :

$\{0001\}$, $\{10\bar{1}4\}$, $\{20\bar{2}5\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{01\bar{1}2\}$, $\{02\bar{2}1\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{22\bar{4}3\}$, $\{4\bar{2}\bar{2}3\}$.

La vesuvianite di solito si trova in cristalli adagiati sulle pareti dei litoclasti che attraversano le lenti di granatite. L'abito dei cristalli è ordinariamente prismatico slanciato, o addirittura bacillare, e la dimensione massima degli individui non supera di solito gli 8-10 mm. In qualche caso abbiamo notato cristalli aggregati o imperfettamente sviluppati di dimensioni molto maggiori. I cristalli migliori invece sono, come di consueto, i più piccoli, e mentre la gran maggioranza degli individui è appoggiata sopra una faccia prismatica, essi si trovano non di rado impiantati sulla base.

Il colore del minerale è variabile dal giallo bruno chiarissimo al bruno rossiccio scuro, con toni caldi, avvicinantisi a quelli delle note vesuvianiti della Corbassera. I cristalli più scuri, che sono anche i più grossi, si presentano quasi sempre con la base ridotta o addirittura mancante; quelli chiari sono invece spesso terminati da una larga faccia di base.

Le forme osservate sono :

$\{100\}$, $\{110\}$, $\{210\}$, $\{001\}$, $\{331\}$, $\{111\}$, $\{113\}$, $\{115\}$, $\{311\}$, $\{312\}$.

La clorite, oltre a riempire in lamine irregolarmente aggregate i litoclasti delle granatiti e ad accompagnare gli altri minerali citati, si trova in lamine distinte, più o meno sottili, o in spessi individui cristallograficamente ben formati, di bellezza senza dubbio eccezionale in questo gruppo di minerali.

La titanite si presenta in due forme ben distinte: in larghi individui bianco-verdognoli inclusi di solito interamente nella clorite, ed in bei cristallini limpidi, quasi incolori, o leggermente giallognoli, adagiati fra le lamine cloritiche nell'interno dei litoclasti beanti. Questi ultimi, che raggiungono al massimo 4-5 mm. di diametro, sono sempre ben formati e misurabili al goniometro, non ostante una frequente e caratteristica corrosione delle facce.

Le forme finora osservate sono :

$$\{100\}, \{010\}, \{001\}, \{\bar{1}01\}, \{\bar{2}01\}, \{011\}, \{021\}, \{041\}, \\ \{111\}, \{112\}, \{221\}, \{331\}, \{\bar{1}11\}, \{\bar{1}12\}, \{\bar{2}21\},$$

La perowskite, relativamente abbondantissima, ci sembra degna di molto interesse, non solo per questa sua grande frequenza nei litoclasti delle granatiti di Piosasco, ma anche per la rara bellezza di alcuni dei suoi cristalli. Essa infatti è poco meno diffusa dei minerali fin qui ricordati, di solito enormemente più comuni, e in qualche esemplare raggiunge una singolare perfezione di forme. Tanto che crediamo di non errare dicendo che questo nuovo giacimento della perowskite è notevolmente più ricco ed importante di tutti quelli fin qui conosciuti sul versante italiano delle Alpi.

Il minerale si presenta in cristalli di colore variabile dal giallo-miele chiarissimo al giallo bruno ed al bruno scuro, quasi nero, e di dimensioni oscillanti fra 1-2 mm. a 3-4 mm., con un massimo di 6 mm. La lucentezza, sempre viva, appare vivissima, quasi metallica, nelle varietà scure. Alcuni cristalli giallo-bruni sono cubi perfetti; altri, e specie quelli nerastri, presentano la combinazione del cubo, con l'ottaedro, il rombododecaedro e un cubo piramidato con facce piane e lucenti; per la maggior parte i cristalli sono invece alquanto imperfetti, striati, solcati, e variamente aggruppati.

Nel caso più frequente la perowskite è annidata fra le lamine di clorite o aderente direttamente alla granatite; non di rado però è compresa entro la roccia stessa. Include spesso lamelle cloritiche e tavolette di ilmenite; in qualche caso è interamente inclusa nei cristalli di titanite.

Sembra particolarmente frequente nei punti in cui le lenti di granatite, accompagnate da diopside e da clorite, manifestano una spiccata laminazione.

Gli altri minerali cristallizzati di Piosasco nulla hanno di singolarmente interessante, salvo forse la magnetite, che in qualche caso presenta la combinazione, relativamente molto complessa, del cubo con l'ottaedro, il rombododecaedro, due icositetraedri e un triacisottaedro.

Merita invece di essere segnalata la presenza a Piossasco di un minerale molto simile, se non assolutamente identico, alla gavite. Si tratta di crosticine bianco-verdognole, alquanto spugnose o cariate, che rivestono internamente le pareti di molti litoclasti e che al microscopio appaiono formate da un aggregato di minute squame birifrangenti, con una birifrazione ed una rifrazione non molto diverse da quelle riscontrate per la gavite. Un saggio analitico sommario dimostra che si tratta anche in questo caso essenzialmente di un silicato di magnesio con una quantità d'acqua ed una quantità di silice leggermente superiori a quelle del minerale di Voltri. L'analisi completa ci permetterà di farne la diagnosi in modo sicuro.

Nè vogliamo terminare senza richiamare l'attenzione sulla diffusione a Piossasco dei minerali di titanio, diffusione che ci sembra eccezionale in confronto con quanto si verifica nei giacimenti consimili della nostra regione.

Cristallografia. — *Studio cristallografico di alcuni nitroderivati aromatici.* Nota di G. RESEGOTTI, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Altri fatti sopra le migrazioni dei tonni accertati negli anni.* Nota di M. SELLA, presentata dal Corresp. E. GIACOMINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia — *Sul comportamento del glicogeno epatico negli animali digiunanti trattati con insulina* ⁽¹⁾. Nota di SABATO VISCO presentata dal Corresp. D. LO MONACO.

In una breve comunicazione svolta nella seduta ordinaria del 10 luglio del 1925 della Associazione fra i Cultori di Scienze mediche e biologiche di Roma ⁽²⁾, esponendo alcune osservazioni fatte sulla sopravvivenza di ani-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica diretto dal prof. Domenico Lo Monaco.

(2) « Bollettino » ed « Atti della Associazione fra i Cultori di Scienze mediche e biologiche di Roma », anno VI, fascicolo 1, luglio 1925, Roma.

mali digiunanti trattati con insulina, accennai anche ai primi risultati di una seconda serie di indagini, eseguite in condizioni sperimentali identiche a quelle delle prime, ed aventi per oggetto lo studio del comportamento del glicogeno epatico.

Dissi allora che dal fegato di alcuni conigli avevo estratto quantità differenti di glicogeno secondo che essi erano stati, oppur no, trattati con insulina durante il periodo dell'inanizione. In seguito estesi tali ricerche, perchè mi sembrò utile stabilire su basi solide questo fatto che può avere un certo valore per la interpretazione del meccanismo d'azione dell'insulina.

Ricerche come quelle che espongo potevano essere influenzate da numerose cause di errore; pertanto mia precipua cura fu quella di una rigorosa scelta degli animali in maniera che, almeno da questo lato, l'esattezza dell'esperimento fosse sicuramente garantita.

I conigli che adoperai risposero due a due ai seguenti requisiti: provenire da uno stesso parto, essere dello stesso sesso ed avere pesi presso a poco uguali. In precedenti ricerche, di altri e mie, era stato osservato che conigli di razza diversa reagiscono in maniera differente all'azione dell'insulina e al digiuno e perciò sul primo requisito fui rigoroso; dipende dalle difficoltà incontrate nella realizzazione di questa condizione se ho potuto eseguire soltanto dieci esperimenti.

I singoli animali di ogni coppia destinata alla ricerca furono tenuti in identiche condizioni di vitto per cinque giorni prima dell'inizio del periodo di digiuno. L'insulina adoperata nelle prime quattro coppie fu sempre di una stessa qualità ed accuratamente dosata. (Insulina Belfanti, gentilmente fornitami dal Direttore dell'Istituto Sieroterapico Milanese - appartenente alla serie 34 ed avente un pH di circa 2). Nella quinta coppia iniettai insulina preparata da una casa Americana, contenente 10 u. c. per cm.³, e della quale mi era ignota la [H⁺].

Gli animali furono pesati ogni giorno, dopo che ne avevo vuotato la vescica con una leggera pressione sulla regione soprapubica.

Il digiuno fu limitato a 5 giorni, tempo sufficiente perchè il fegato del coniglio perda la quasi totalità del suo glicogeno. Durante il digiuno gli animali bevvero a volontà.

Il glicogeno fu estratto col metodo di Pflüger, e dosato, dopo la trasformazione in glucosio, col metodo di Bertrand quando fu possibile, con il micrometodo di Ivar Bang, quando, per le scarse quantità di sostanza ottenuta, il primo risultò inapplicabile.

Riassumo nelle seguenti tabelle le ricerche eseguite:

PRIMA COPPIA DI CONIGLI.

Coniglio A (maschio): si sospende l'alimentazione e si inizia il trattamento con insulina.

Insulina somministrata		Comportamento del peso	
nella 1 ^a giornata	cc. —	peso iniziale . . gr. 1965	peso perduto ogni 24 ore . . . gr. 63
» 2 ^a »	» 0.20	peso dopo 24 ore di digiuno . . » 1902	» » » 181
» 3 ^a »	» 0.10	peso dopo 48 ore di digiuno . . » 1721	» » » 41
» 4 ^a »	» 0.10	peso dopo 72 ore di digiuno . . » 1680	» » » 66
» 5 ^a »	» 0.10	peso dopo 96 ore di digiuno . . » 1614	» » » 45
Totale in 5 giorni	cc. 0.50	peso dopo 120 ore di digiuno . . » 1569	Totale gr. 396
non si osservano mai convulsioni.		= 20.1 % del peso iniziale.	

Dopo cinque giorni di digiuno dissanguo l'animale per recisione della carotide, e, appena morto, con la massima rapidità possibile, ne apro l'addome ed estirpo il fegato per pesarlo ed estrarne il glicogeno.

Peso del fegato gr. 56. Contenuto in glicogeno = 1.49 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 3.320, polmoni gr. 6.300, reni gr. 11, milza gr. 1.100, capsule surrenali gr. 0.210.

Coniglio B (maschio): non gli si somministra insulina.

Comportamento del peso				
peso iniziale	gr. 1950	peso perduto ogni 24 ore . .	gr. 123	
» dopo 24 ore di digiuno . .	» 1827	» » » » . .	» 155	
» » 48 » . .	» 1672	» » » » . .	» 120	
» » 72 » . .	» 1552	» » » » . .	» 105	
» » 96 » . .	» 1447	» » » » . .	» 238	
» » 120 » . .	» 1209	Totale gr. 741		
= 39 % del peso iniziale				

Dopo cinque giorni di digiuno dissanguo l'animale per recisione della carotide e, appena morto, con la massima rapidità, ne apro l'addome ed estirpo il fegato per pesarlo ed estrarne il glicogeno.

Peso del fegato gr. 24. Contenuto in glicogeno = 0.36 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 3.560, polmoni gr. 5.210, reni gr. 8.180, milza gr. 0.410, capsule surrenali gr. 0.210.

SECONDA COPPIA DI CONIGLI.

Coniglio C (femmina): si tratta con insulina.

Insulina somministrata			Comportamento del peso		
nella 1 ^a giornata	cc. 0.0		peso iniziale . . gr. 2350	peso perduto ogni	
» 2 ^a »	» 0.20		» dopo 24 ore » 2170	24 ore . . . gr. 180	
» 3 ^a »	» 0.20		» » 48 » » 2050	» » » 120	
» 4 ^a »	» 0.20		» » 72 » » 2025	» » » 25	
» 5 ^a »	» 0.20		» » 96 » » 1945	» » » 80	
Totale in 5 giorni	cc. 0.80		» » 120 » » 1840	» » » 105	
non si osservano mai convulsioni.				Totale gr. 510	
				= 21.7 % del peso iniziale.	

Dopo cinque giorni di digiuno prelevo il fegato dall'animale vivente, lo peso e inizio le operazioni chimiche per il dosaggio del glicogeno con la massima celerità possibile.

Peso del fegato gr. 48. Contenuto in glicogeno = 1.10 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 5.340, polmoni gr. 8.520, reni gr. 12.820, milza gr. 1.520, capsule surrenali gr. 0.350.

Coniglio D (femmina): digiuna per cinque giorni e non subisce il trattamento con insulina.

Comportamento del peso					
peso iniziale	gr. 2315	peso perduto ogni	24 ore . .	gr. 213	
» dopo 24 ore di digiuno . .	» 2102	» » » » . .	» »	105	
» » 48 » . .	» 1997	» » » » . .	» »	94	
» » 72 » . .	» 1903	» » » » . .	» »	84	
» » 96 » . .	» 1819	» » » » . .	» »	112	
» » 120 » . .	» 1707	Totale gr. 608			
		= 26.4 % del peso iniziale			

Dopo cinque giorni di digiuno prelevo il fegato dall'animale vivente, lo peso, ed inizio, con la massima celerità possibile, le operazioni chimiche per il dosaggio del glicogeno.

Peso del fegato gr. 32. Contenuto in glicogeno = 0.51 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 5.003, polmoni gr. 7.800, reni gr. 11.100, milza gr. 0.512, capsule surrenali gr. 0.322.

TERZA COPPIA DI CONIGLI.

Coniglio E (femmina): si tiene a digiuno e gli si somministra insulina.

Insulina somministrata		Comportamento del peso			
nella 1 ^a giornata	cc. 0.30	peso iniziale . .	gr. 2060	peso perduto ogni	
» 2 ^a »	» 0.20	peso dopo 24 ore		24 ore . . .	gr. 180
» 3 ^a »	» 0.20	di digiuno . .	» 1880	» »	» 123
» 4 ^a »	» 0.20	peso dopo 48 ore		» »	» —
» 5 »	» 0.20	di digiuno . .	» 1757	» »	» 147
Totale in 5 giorni cc. 1.10		peso dopo 72 ore		» »	» 51
		di digiuno . .	» —	Totale gr. 501	
non si osservano mai con-		peso dopo 96 ore			
vulsioni.		di digiuno . .	» 1610		
		peso dopo 120 ore			
		di digiuno . .	» 1559	= 24.3 % del peso iniziale.	

Trascorsi cinque giorni da quello di inizio del digiuno dissanguo l'animale per recisione della carotide e, appena morto, con la massima rapidità possibile ne apro l'addome ed estirpo il fegato per pesarlo ed estrarne il glicogeno.

Peso del fegato gr. 49. Contenuto in glicogeno = 1.51 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 3.850, polmoni gr. 8.120, reni gr. 14.400, milza gr. 1.320, capsule surrenali gr. 0.220.

Coniglio F (femmina): si tiene a digiuno, non gli si somministra insulina.

Comportamento del peso

peso iniziale	gr. 2160	peso perduto ogni 24 ore . .	gr. 275
» dopo 24 ore di digiuno . .	» 1885	» » » »	. . » 120
» » 48 » . .	» 1765	» » » »	. . » —
» » 72 » . .	» —	» » » »	. . » 165
» » 96 » . .	» 1600	» » » »	. . » 150
» » 120 » . .	» 1450	Totale gr. 710	
		= 32.95 % del peso iniziale	

Trascorsi cinque giorni da quello dell'inizio del digiuno dissanguo l'animale per recisione di una delle carotidi e, appena morto, con la massima rapidità possibile ne apro l'addome ed estirpo il fegato per pesarlo ed estrarne il glicogeno.

Peso del fegato gr. 33. Contenuto in glicogeno = 0.2253 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 4.040, polmoni gr. 9.360, reni gr. 13.750, milza gr. 0.650, capsule surrenali gr. 0.140.

QUARTA COPPIA DI CONIGLI.

Coniglio G (maschio): gli si somministra insulina.

Insulina somministrata		Comportamento del peso		
nella 1 ^a giornata	cc. 0.30	peso iniziale . . gr. 2385	peso perduto ogni	
» 2 ^a »	» 0.20	peso dopo 24 ore	24 ore . . . gr.	105
» 3 ^a »	» 0.20	di digiuno . . » 2280	» »	» 180
» 4 ^a »	» 0.20	peso dopo 48 ore	» »	» 75
» 5 ^a »	» 0.20	di digiuno . . » 2100	» »	» 55
		peso dopo 72 ore	» »	» 40
		di digiuno . . » 2025		
Totale in 5 giorni	cc. 1.10	peso dopo 96 ore	Totale gr. 455	
		di digiuno . . » 1970		
non si osservano mai con-		peso dopo 120 ore	= 19.07 % del peso iniziale.	
vulsioni.		di digiuno . . » 1930		

Trascorsi cinque giorni da quello di inizio del digiuno estirpo il regato all'animale vivente, lo peso, e, con la massima sollecitudine possibile, inizio le operazioni chimiche occorrenti per il dosaggio del glicogeno.

Peso del fegato gr. 45. Contenuto in glicogeno = 1.9304 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 5.420, polmoni gr. 7.280, reni gr. 13.208, milza gr. 1.010, capsule surrenali gr. 0.181.

Coniglio H (maschio): non gli si inietta insulina.

Comportamento del peso				
peso iniziale	gr. 2396	peso perduto ogni	24 ore . .	gr. 221
» dopo 24 ore di digiuno . .	» 2175	» » » »	. . »	178
» » 48 » . .	» 2002	» » » »	. . »	93
» » 72 » . .	» 1913	» » » »	. . »	92
» » 96 » . .	» 1821	» » » »	. . »	103
» » 120 » . .	» 1718	Totale gr. 678		
		= 28.79 % del peso iniziale		

Trascorsi i cinque giorni di inanizione estirpo il fegato all'animale vivente, lo peso, e con la massima sollecitudine possibile, inizio le operazioni chimiche per il dosaggio del glicogeno.

Peso del fegato gr. 34. Contenuto in glicogeno = 0.521 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 6.001, polmoni gr. 7.300, reni gr. 12.696, milza gr. 0.692, capsule surrenali gr. 0.170.

QUINTA COPPIA DI CONIGLI.

Coniglio I (femmina): gli si somministra insulina.

Insulina somministrata		Comportamento del peso	
nella 1 ^a giornata	cc. 0.25	peso iniziale . . gr. 1700	peso perduto ogni
» 2 ^a »	» 0.25	peso dopo 24 ore	24 ore . . . gr. 160
» 3 ^a »	» 0.25	di digiuno . . » 1540	» » » 80
» 4 ^a »	» 0.20	peso dopo 48 ore	» » » 59
» 5 ^a »	» 0.20	di digiuno . . » 1460	» » » 26
		peso dopo 72 ore	» » » 59
Totale in 5 giorni	cc. 1.15	di digiuno . . » 1401	
		peso dopo 96 ore	Totale gr. 384
		di digiuno . . » 1375	
non si osservano mai con-		peso dopo 120 ore	
vulsioni.		di digiuno . . » 1316	= 22.5 % pel peso iniziale.

Dopo cinque giorni dall'inizio del digiuno estirpo il fegato all'animale vivente, lo peso e, con la massima sollecitudine possibile, inizio le operazioni chimiche occorrenti per il dosaggio del glicogeno.

Peso del fegato gr. 33. Contenuto in glicogeno = 0.311 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 3.268, polmoni gr. 5.100, reni gr. 8.870, milza gr. 0.380, capsule surrenali gr. 0.115.

Coniglio L (femmina): non gli si inietta insulina.

Comportamento del peso

peso iniziale	gr. 1710	peso perduto ogni	24 ore . . gr. 170
» dopo 24 ore di digiuno . . »	1540	» » » »	. . » 45
» » 48 » . . »	1495	» » » »	. . » 63
» » 72 » . . »	1432	» » » »	. . » 38
» » 96 » . . »	1394	» » » »	. . » 114
» » 120 » . . »	1280	Totale gr. 430	
= 25.1 % del peso iniziale			

Dopo cinque giorni di inanizione estirpo il fegato all'animale vivente, lo peso, e nel minor tempo possibile inizio le operazioni chimiche occorrenti per il dosaggio del glicogeno.

Peso del fegato gr. 31. Contenuto in glicogeno = 0.275 % di organo fresco.

Peso di altri organi interni: cuore gr. 3.480, polmoni gr. 4.900, reni gr. 8.960, milza gr. 0.410, capsule surrenali gr. 0.110.

Il comportamento del peso degli animali costituenti questa coppia, e la costante mancanza di convulsioni nel coniglio I, al quale nella terza, quarta e quinta giornata di digiuno iniettai cm³ 0.20 di insulina, mi fecero sorgere il sospetto che l'insulina adoperata in questo caso avesse perduta la sua attività ipoglicemizzante; tale sospetto fu pienamente confermato dal controllo biologico, il quale mi dimostrò che l'abbassamento di glicemia che esso provocava era minimo e di breve durata.

Riassumo nella seguente tabella i risultati ottenuti.

ELEMENTI PRESI IN ESAME	Prima coppia		Seconda coppia		Terza coppia		Quarta coppia		Quinta coppia	
	Coniglio A	Coniglio B	Coniglio C	Coniglio D	Coniglio E	Coniglio F	Coniglio G	Coniglio H	Coniglio I	Coniglio L
Peso iniziale gr.	1965	1950	2350	2315	2060	2160	2385	2396	1700	1710
Insulina somministrata in 5 giorni cc.	0.50	0.0	0.80	0.0	1.10	0.0	1.10	0.0	1.15	0.0
Peso totale perduto in 5 giorni. gr.	396	741	510	608	501	710	455	678	384	430
% del peso iniziale perduto »	20.1	39.0	21.7	26.4	24.3	32.95	19.07	28.79	22.5	25.1
Peso del fegato . . . »	56	24	48.0	32.0	49.0	33.0	45.0	34.0	33	31
Contenuto % in glicogeno »	1.49	0.360	1.10	0.51	1.51	0.22	1.93	0.521	0.311	0.275
Peso della milza. . . »	1.100	0.410	1.520	0.512	1.320	0.650	1.010	0.692	0.380	0.410
» del cuore »	3.320	3.560	5.340	5.003	3.850	4.040	5.420	6.001	3.268	3.480
» dei reni. »	11.00	8.180	12.820	11.100	14.40	13.750	13.208	12.696	8.870	8.960
» delle capsule surrenali »	0.210	0.210	0.350	0.322	0.220	0.140	0.181	0.170	0.115	0.110
Peso dei polmoni . . »	6.300	5.210	8.520	7.800	8.120	9.360	7.280	7.300	5.100	4.900

Dalle indagini eseguite traggo le seguenti conclusioni:

a) Nei conigli l'insulina influenza la perdita di peso causata dal digiuno rendendola minore di quella che si osserva in animali della stessa razza, dello stesso peso e dello stesso sesso, ai quali tale sostanza non viene somministrata.

b) Dopo cinque giorni di digiuno il peso del fegato e della milza degli animali trattati con insulina è maggiore di quello dei conigli normali, mentre il cuore, i reni, le capsule surrenali ed i polmoni presentano differenze di peso meno costanti e molto meno notevoli.

c) Dal fegato di animali tenuti a digiuno per cinque giorni, e trattati con insulina, si estraggono, col metodo di Pflüger, quantità di glicogeno oscillanti tra un minimo di gr. 1.10 ed un massimo di gr. 1.90 per 100 grammi di ghiandola fresca, mentre che da quello degli animali tenuti in identiche condizioni di vita, ma ai quali non si somministra insulina, se ne ricavano al massimo gr. 0.521 per 100 gr. di organo.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1926.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Matematica. — *La varietà delle forme binarie del 7° ordine a sesta spinta identicamente nulla.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. GINO FANO.

1. Nella mia Nota: *Sulle forme binarie per le quali una delle spinte su sè stessa sia identicamente nulla* ⁽²⁾ ho considerata anche l'interpretazione geometrica della questione, cioè le varietà algebriche di opportuni spazi che rappresentano i singoli sistemi di forme di dato ordine aventi una spinta determinata identicamente nulla, quando si faccia uso della consueta interpretazione dei coefficienti c_k della forma:

$$f \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k x_1^{n-k} x_2^k,$$

(che s'intende definita a meno di un fattore numerico) come coordinate proiettive omogenee di punto in S_n . Alcune delle varietà così incontrate erano già note e geometricamente studiate, altre no. Di una di queste ultime mi propongo esporre qui qualche proprietà, in relazione principalmente ai sistemi di rette chi vi sono contenuti.

La 6ª spinta di una forma binaria di grado n sopra sè stessa, essendo di ordine $2(n-6)$, esiste per $n \geq 6$; e, per $n = 6$, si riduce al ben noto

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1926.

(2) «Giornale di matem.», vol. 62 (1924), p. 91.

invariante quadratico della sestica. Nel caso successivo, $n = 7$, esso è un covariante di 2° ordine, il cui annullarsi identico conduce alle 3 equazioni:

$$(I) \quad \begin{cases} c_0 c_6 - 6 c_1 c_5 + 15 c_2 c_4 - 10 c_3^2 = 0 \\ c_0 c_7 - 5 c_1 c_6 + 9 c_2 c_5 - 5 c_3 c_4 = 0 \\ c_1 c_7 - 6 c_2 c_6 + 15 c_3 c_5 - 10 c_4^2 = 0. \end{cases}$$

E pertanto, nella rappresentazione suaccennata, le forme di 7° ordine a 6ª spinta nulla hanno per immagini i punti della varietà M_4^8 di S_7 intersezione completa delle 3 quadriche (I). Questa M_4^8 contiene gli ∞^1 piani osculatori, ma non gli S_3 osculatori, della curva γ^7 razionale normale di equazioni parametriche:

$$c_k = p^k \quad (k = 0, 1, \dots, 7);$$

i punti di quei piani osculatori essendo immagini di forme con radice quintupla, per le quali (come per ogni forma di grado n con radice $[n-2]^{pl}$) la 6ª spinta è appunto identicamente nulla. La M_4^8 contiene inoltre tutte le trisecanti della varietà M_3^{15} luogo dei piani osculatori della γ^7 ; per ogni terna di piani osculatori vi è una trisecante, intersezione dei 3 spazi S_5 congiungenti tali piani a 2.a 2. D'altra parte, per un punto generico della M_4^8 , devono passare otto rette di questa varietà, intersezioni dei tre S_6 - coni secondo cui lo spazio S_4 ivi tangente ad essa incontra le 3 quadriche (I). E poichè di queste 8 rette, come vedremo, una sola è trisecante della M_3^{15} anzidetta, sorge la questione del come quelle rette si distribuiscano in diversi sistemi; questione alla quale appunto mi sono proposto di rispondere.

2. Un primo sguardo d'insieme alla questione si può dare nel modo che segue. Lo spazio $(S_5) c_3 = c_4 = 0$, congiungente i piani osculatori a γ^7 nei due punti fondamentali [0] e [7] del sistema di coordinate, incontra M_4^8 in una superficie composta delle parti sottoindicate:

a) i due piani anzidetti, osculatori a γ^7 (cioè i piani fondamentali $\overline{012}$ e $\overline{567}$);

b) la quadrica (di S_3) $c_1 = c_6 = c_0 c_7 + 9 c_2 c_5 = 0$;

c) la rigata razionale normale del 4° ordine con ∞^1 coniche direttrici, intersezione della M_3^3 di piani:

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & 6 c_2 \\ 6 c_5 & c_6 & c_7 \end{vmatrix} = 0$$

colla quadrica $c_1 c_6 - 9 c_2 c_5 = 0$, all'infuori degli stessi due piani considerati in a).

D'altra parte lo spazio stesso $c_3 = c_4 = 0$ incontra la M_3^{15} dei piani osculatori di γ^7 , all'infuori dei due piani a), secondo una sua direttrice,

contenuta nella rigata c). Se ne conclude che le generatrici di quest'ultima rigata sono trisecanti del sistema dei piani osculatori di γ^7 (poichè ne incontrano 2 piani osculatori fissi, e un terzo variabile); mentre dei due regoli della quadrica b), uno si compone di rette incontranti *due* piani osculatori, l'altro di rette che non ne incontrano in generale alcuno. La rigata c) e i due regoli di b) descriveranno perciò, al variare dei due punti [0] e [7] sopra γ^7 , sistemi di rette tutti distinti, che (in relazione al numero dei piani osculatori di γ^7 incontrati) designeremo rispettivamente con $\Sigma_3, \Sigma_2, \Sigma_0$. Le rette di tali sistemi sono immagini di *fasci di forme binarie del 7° ordine* a sesta spinta identicamente nulla, contenenti rispettivamente 3, 2 oppure nessuna forma con radice quintupla.

3. Per lo studio ulteriore della M_4^8 e di questi sistemi di rette, conviene approfittare della circostanza che le (1) sono lineari rispetto a c_5, c_6, c_7 , e consentono di esprimere razionalmente queste 3 coordinate mediante le altre, quali parametri omogenei: il che, geometricamente, significa che la M_4^8 si proietta univocamente dal piano $\overline{567} \equiv \pi$, osculatore a γ^7 nel suo punto (generico) [7], sopra un S_4 , che possiamo supporre sia lo spazio $c_5 = c_6 = c_7 = 0$. Le sezioni iperpiane di M_4^8 , sue intersezioni cogli spazi $\sum_{k=0}^n \lambda_k c^k = 0$, si proiettano nelle ipersuperficie del sistema lineare ottenuto eliminando c_5, c_6, c_7 fra la $\sum \lambda_k c_k = 0$ e le (1), cioè:

$$(2) \quad (\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4) (c_0^2 c_3 + 2 c_1^3 - 3 c_0 c_1 c_2) + \\ + \lambda_5 \varphi(c) + \lambda_6 \psi(c) + \lambda_7 \chi(c) = 0$$

dove φ, ψ, χ sono forme di 4° grado nelle c_0, \dots, c_4 . Le intersezioni variabili di queste ipersuperficie (essendo proiezioni di superficie di ordine 8° da un loro punto semplice) sono superficie del 7° ordine; e il sistema (2) avrà perciò una superficie base complessiva di 9° ordine, luogo delle immagini delle rette di M_4 appoggiate al piano π . Poichè tali rette si ripartiscono fra i 2 sistemi Σ_3 e Σ_2 , dovrà la F^9 spezzarsi del pari in due parti distinte.

E invero: la M_3^{15} dei piani osculatori a γ^7 si proietta dal piano π nella M_3^6 dei piani osculatori alla γ^4 (di equazioni $c_i = p^i$, $0 \leq i \leq 4$) proiezione di γ^7 ; perciò le rette di Σ_3 appoggiate a π , e appoggiate quindi anche ad altri due piani della M_3^{15} , avranno per immagini i punti della superficie doppia di M_3^6 , che è una Φ^4 , proiezione generica della ben nota « superficie di Veronese »; detta Φ^4 contiene ∞^2 coniche, delle quali ∞^1 nei piani osculatori di γ^4 . Invece le rette del sistema Σ_2 , appoggiate a π e a un altro piano osculatore assegnato di γ^7 , formano un regolo del tipo b) (n. 2), avente per traccia su questo secondo piano una retta, che pel regolo b) è lo spigolo [0] [2] della piramide fondamentale delle coordinate. Poichè [0] è un punto generico della curva γ^7 e [2] l'intersezione del piano

osculatore a γ^7 in quel punto collo spazio S_5 osculatore nel punto fisso [7], così, nella proiezione da π , le rette del tipo [0] [2] avranno per immagini le rette congiungenti i singoli punti di γ^4 colle tracce dei rispettivi piani osculatori sopra un piano osculatore fisso. Queste tracce hanno per luogo una conica δ ; quelle congiungenti saranno le generatrici di una rigata R^5 i cui punti saranno immagini delle rette di Σ_2 appoggiate a π ; e Φ^4 e R^5 , formeranno insieme la superficie base del sistema lineare (2). Entrambe queste superficie sono proiettate dal punto [4] secondo il cono cubico (∞^4 di piani):

$$(3) \quad c_0^2 c_3 + 2 c_1^3 - 3 c_0 c_1 c_2 = 0$$

il cui vertice sarà perciò punto doppio di R^5 .

La rigata razionale R^5 è normale per S_6 , e caso particolare di quella considerata da Severi ⁽¹⁾ come una delle superficie di S_4 dotate di un solo punto triplo apparente; la quartica piana direttrice riscontrata da Severi è qui costituita dalla conica δ , insieme con una generatrice - la tangente a δ nel punto fondamentale [4] - contata 2 volte ⁽²⁾.

Le superficie Φ^4 e R^5 hanno a comune la conica δ , e si toccano lungo la quartica γ^4 , nei punti della quale hanno i piani osculatori di questa come piani tangenti comuni. Per la R^5 ciò è ovvio, poichè le sue generatrici stanno, per costruzione, nei piani osculatori di γ^4 . Quanto a Φ^4 , essa ammette lo stesso gruppo proiettivo ∞^3 che muta in sè γ^4 ; il piano tangente ad essa in un punto di γ^4 deve quindi essere unito per il sottogruppo ∞^2 che lascia fisso questo punto, e deve quindi coincidere col piano ivi osculatore a γ^4 .

4. Le rette della varietà M_4^8 non appoggiate al piano π sono proiettate da questo piano su S_4 secondo rette incontrate dalle V_3^4 del sistema lineare (2) in un solo punto variabile, e perciò trisecanti della superficie base complessiva $\Phi^4 + R^5$. È perciò ovvio che la loro distribuzione nei diversi sistemi Σ dovrà corrispondere ai vari modi di ripartire queste 3 intersezioni fra Φ^4 e R^5 . Indichiamo con h (≥ 0) il numero delle intersezioni delle suaccennate rette proiezioni con Φ^4 ; il numero delle loro intersezioni con R^5 sarà perciò $3 - h$; e poichè la M_3^6 dei piani osculatori di γ^4 passa doppiamente per Φ^4 e semplicemente per R^5 , il numero dei piani osculatori di γ^4 incontrati dalle stesse rette fuori della superficie base complessiva, quindi

(1) *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie...*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », vol. 15^o (1901); cfr. in part. n. 13.

(2) Rappresentata parametricamente γ^4 colle solite equazioni $r_i = \rho^i$, le equazioni di R^5 possono ricevere la forma:

$$c_0 = \frac{c_1}{\rho} = \frac{c_2}{\rho^2(1+u)} = \frac{c_3}{\rho^3(1+3u)} = \frac{c_4}{\rho^4(1+6u)}$$

essendo ρ, u i due parametri.

anche il numero dei piani osculatori di γ^7 incontrati dalle corrispondenti rette oggettive di M_4^8 , sarà $= 6 - 2b - (3 - b) = 3 - b$.

Per le rette del sistema Σ_3 , incontranti 3 piani osculatori di γ^7 , sarà $3 - b = 3$, onde $b = 0$; esse si proiettano perciò nel sistema Σ'_3 delle trisecanti di R^5 , che è del 1° ordine⁽¹⁾. In particolare, le rette di Σ_3 appoggiate al piano π hanno per immagini i singoli punti di Φ^4 , unitamente alle trisecanti di R^5 passanti rispettivamente per essi. Queste trisecanti, immagini dei punti di π , e rette fondamentali del sistema lineare (2), non sono altro che le generatrici del cono (3).

Per le rette del sistema Σ_0 , non incontranti, in generale, piani osculatori di γ^7 , è $3 - b = 0$, $b = 3$; esse si proiettano perciò nel sistema Σ'_0 delle trisecanti di Φ^4 , che è pure di 1° ordine⁽²⁾. In questo sistema sono comprese anche le generatrici di R^5 , tangenti a Φ^4 nei punti della quartica γ^4 e appoggiate ancora ad essa nei punti della conica δ . Le rette di Σ'_0 devono distribuirsi in ∞^2 regoli, proiezioni di altrettanti esistenti sulle quadriche del tipo b (n. 2); e vedremo subito in qual modo.

Per le rette del sistema Σ_2 , incontranti 2 piani osculatori di γ^7 , è $3 - b = 2$, $b = 1$, esse si proiettano perciò nel sistema Σ'_2 delle corde di R^5 appoggiate semplicemente a Φ^4 . Anche queste devono distribuirsi in ∞^2 regoli, aventi rispettivamente i precedenti come regoli di direttrici. Per i regoli contenuti in Σ'_2 valgono le proprietà seguenti:

Ogni retta r di Σ'_2 appartiene a uno (solo) di questi ∞^2 regoli. Essa si appoggia infatti a 2 generatrici g_1, g_2 di R^5 , il cui spazio S_3 incontra Φ^4 in una quartica di 2ª specie (razionale); poichè g_1 e g_2 sono trisecanti di Φ^4 e di questa quartica, la rigata che ha per direttrici g_1, g_2 e tale quartica è un regolo, contenente la r e contenuto in Σ'_2 . Ed è anche il solo; perchè lo spazio S_3 di un regolo contenuto in Σ'_2 deve incontrare R^5 secondo una linea bisecante le generatrici del regolo stesso, e non incontrante una sua direttrice rettilinea generica, che è retta di Σ'_0 ; perciò secondo una coppia di rette, generatrici di R^5 : le sole 2 appoggiate ad r . Gli ∞^2 regoli del sistema Σ'_2 stanno dunque negli spazi S_3 determinati dalle coppie di generatrici della rigata R^5 .

L'ordine del sistema Σ'_2 sarà pertanto eguale al numero dei suoi regoli passanti per un punto generico di S_4 ; e perciò anche — poichè le direttrici di questi regoli costituiscono il sistema Σ'_0 , che è del 1° ordine — al numero dei regoli di Σ'_0 passanti per una retta generica s di quest'ultimo sistema. Ora, da questa retta la rigata R^5 è proiettata su di un piano secondo un involuppo di 5ª classe, razionale, e avente perciò 6 rette doppie; vi sono quindi in R^5 sei coppie di generatrici contenute in spazi S_3 , passanti

(1) SEVERI, loc. cit.

(2) ASCIONE, « Rend. R. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. 6º (1897) I. Cir. pure SEVERI, loc. cit.

per s , e da queste coppie, colla costruzione applicata poc'anzi a g_1, g_2 , si ottengono altrettanti regoli contenuti in Σ'_2 e di direttrice s (ovvero, il che fa lo stesso, regoli di Σ'_0 contenenti la s).

Risultano così esaurite, sopra la M_4^8 , le otto rette passanti per un punto generico, poichè i sistemi Σ_0 e Σ_3 sono del 1° ordine, e Σ_2 del 6° ordine. Per un punto generico di M_4^8 passano sei quadriche del tipo b); e precisamente: una sola retta del sistema Σ_0 , comune a tutte queste quadriche, e sei rette del sistema Σ_2 , una su ciascuna di quelle quadriche.

La proiezione eseguita ci mostra anche l'esistenza in S_4 di un quarto sistema di rette, pure trisecanti della superficie complessiva $\Phi^4 + R^5$; il sistema Σ'_1 delle corde di Φ^4 appoggiate semplicemente a R^5 . Ma questo sistema si spezza in due altri, entrambi di ordine zero, e composti delle rette contenute rispettivamente nei piani osculatori di γ^4 , e nei piani del cono cubico (3). Invero, ciascuno di questi piani, sia degli uni che degli altri, contiene una conica di Φ^4 e una generatrice di R^5 ; tutte le rette ivi contenute sono dunque corde di Φ^4 appoggiate a R^5 . E non ve ne sono nemmeno altre. Infatti le corde di Φ^4 passanti per un punto assegnato di S_4 si distribuiscono nei piani di 3 coniche di Φ^4 stessa, aventi a comune una retta, trisecante di Φ^4 (proprietà ovvie, quando si pensi che da quel punto Φ^4 deve proiettarsi in una superficie di Steiner); se il punto assegnato sta su R^5 , questa trisecante è generatrice di R^5 , e tangente a Φ^4 ; perciò di quelle 3 coniche solo 2 sono distinte (ed è precisamente quella contenuta in un piano osculatore di γ^4 che ne assorbe 2 fra le 3).

5. La varietà M_4^8 considerata, e tutti i sistemi di rette in essa contenuti, sono invarianti rispetto al gruppo proiettivo ∞^3 di S_7 trasformante in sé la curva γ^7 .

Una retta generica del sistema Σ_3 è invariante rispetto al gruppo diedrico G_6 che permuta nei vari modi i 3 piani osculatori γ^7 ad essa incidenti.

Per una retta generica del sistema Σ_0 passano 6 regoli contenuti in Σ_0 , giacenti su quadriche del tipo b), ciascuno dei quali ha 2 generatrici contenute in piani osculatori di γ^7 . Si hanno così, in corrispondenza ad ogni retta di Σ_0 , sei coppie di piani osculatori, le quali, a 2 a 2, formano quaderne costituenti un unico continuo, e proiettivamente equivalenti. Da ciò si trae che ogni retta di Σ_0 è invariante per un gruppo icosaedrico di proiettività su γ^7 ; e il gruppo di 12 punti invariante su γ^7 è dato dai punti di osculazione dei 12 piani anzidetti.

Una retta del sistema Σ_2 è invariante per la sola involuzione avente per elementi doppi, nel sistema dei piani osculatori di γ^7 , i 2 piani a cui quella retta si appoggia.

Geometria. — *Proprietà proiettive delle superficie a curvatura metrica costante.* Nota ⁽¹⁾ del CORRISP. GUIDO FUBINI.

Noi qui caratterizzeremo in modo quasi completo le superficie a curvatura metrica costante mediante proprietà proiettive. Useremo le notazioni della Nota: *Sulle superficie R ecc.*, testè pubblicata in questi « Rendiconti ».

1. Qui ci volgiamo ad una ricerca preliminare, chiedendoci anzitutto quando certi valori *dati* delle β, γ (cfr. loc. cit.) possono convenire ad una superficie a curvatura metrica costante riferita alle asintotiche u, v . In tal caso $\beta = \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$, $\gamma = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $\theta_u = \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $\theta_v = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$, ove i simboli di Christoffel sono calcolati per l'elemento lineare di Gauss $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$. Varranno dunque delle equazioni del tipo:

$$(1) \quad E_u = 2(\theta_u E + \beta F) \quad , \quad G_v = 2(\theta_v G + \gamma F);$$

$$(2) \quad F_u = \frac{1}{2} E_v + \theta_u F + \beta G \quad , \quad F_v = \frac{1}{2} G_u + (\theta_v F + \gamma E).$$

Essendo S a curvatura costante, potremo scegliere i parametri delle u, v in guisa che $E = G = 1$ (il cambiamento di parametri cambierà le β, γ in guisa che $\beta du^2 : dv$ e $\gamma dv^2 : du$ non mutino).

Sarà perciò per le (1) e per l'equazione dedotta da (2) quando si esprima che $F_{uv} = F_{vu}$:

$$\theta_u = -\beta F \quad , \quad \theta_v = -\gamma F \quad , \quad \theta_u \gamma + \beta_v = \theta_v \beta + \gamma_u ,$$

cioè

$$\beta \theta_v = \gamma \theta_u \quad , \quad \gamma_u = \beta_v .$$

Esiste dunque una funzione φ delle u, v tale che

$$\beta = \varphi_u \quad , \quad \gamma = \varphi_v \quad , \quad \varphi_u \theta_v - \varphi_v \theta_u = 0 .$$

Cosicchè θ è funzione di φ . Porremo $\theta' = d\theta : d\varphi$ e analoghe. Escluso il caso $\varphi_u = \varphi_v = 0$ (cioè $\beta = \gamma = 0$, che corrisponde a quadriche o sfere) è dunque:

$$(3) \quad E = G = 1 \quad , \quad F = -\theta'(\varphi) \quad , \quad \beta = \varphi_u \quad , \quad \gamma = \varphi_v .$$

Le equazioni (2) sono soddisfatte soltanto se

$$(4) \quad \theta'' = \theta'^2 - 1 \quad [e \text{ quindi } \theta''' = 2\theta'\theta'' = 2\theta'(\theta'^2 - 1)].$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio. 1926.

La curvatura di Gauss $\frac{1}{\sqrt{1-F^2}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F_u}{\sqrt{1-F^2}} \right)$ essendo per ipotesi uguale ad 1, sarà:

$$(5) \quad \varphi_{uv} + \theta' \varphi_u \varphi_v = 1.$$

Se valgono le (3), (4), (5), è facile riconoscere che le u, v si possono supporre asintotiche per la superficie (a curvatura costante) di elemento lineare $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$, perchè per questo $\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

2. Questo premesso, cerchiamo quando per una superficie S esiste una coppia di congruenze duali K, K' , l'una completamente coniugata, l'altra completamente armonica ad S . Per i risultati della Nota citata ciò avviene se:

$$(6) \quad \pi_{11}v = \pi_{22}u = p_{11}v = p_{22}u = 0.$$

Caso 1°. È $\pi_{11} = \pi_{22} = p_{11} = p_{22} = 0$. In tal caso K è una stella di rette uscenti da un punto (loc. cit.), e K' è un piano rigato. Perciò S è una superficie di *Tzitzeica-Wilczynski*, e K, K' sono le congruenze delle direttrici⁽¹⁾.

Caso 2°. È $\pi_{11} = p_{22} = 0$. Supponiamo dapprima $p_{11}\pi_{22} \neq 0$. Cambiando i parametri delle u, v , potremo rendere $p_{11} = \pi_{22} = 1$, cosicchè per le condizioni d'integrabilità sarà $\beta_v = \gamma_u = 0$. Le $-1 = \pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta\theta_v$, $1 = \gamma_u + \gamma\theta_u$ danno:

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma}, \quad \theta_v = -\frac{1}{\beta} \text{ cosicchè } -\gamma_v : \gamma^2 = +\beta_u : \beta^2 = \theta_{uv} = k = \text{cost.}$$

Le altre condizioni d'integrabilità si riducono alla $k = k\beta^2\gamma^2$. Poichè per le precedenti $\frac{1}{\beta} = -ku + h$, $\frac{1}{\gamma} = kv + l$ ($h, k, l = \text{cost.}$) sarà $k = 0$, e quindi $\beta = \text{cost.}$, $\gamma = \text{cost.}$, cosicchè, cambiando di nuovo i parametri delle u, v potremo rendere $\beta = \gamma = \text{cost.}$, pure conservando costanti p_{11}, π_{22} ,

Se invece, oltre alle π_{11}, p_{22} fosse nulla anche una (sola) delle p_{11}, π_{22} , p. es. la π_{22} , potremmo al solito rendere $p_{11} = 1$. Le condizioni d'integrabilità danno $\gamma_u = 0$; e la $0 = \pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \gamma\theta_u$, $-1 = \beta_v + \beta\theta_v$ danno (escluse per un momento le rigate e quindi supposto $\gamma \neq 0$) $\theta_u = 0$. Le altre condizioni d'integrabilità danno poi $\beta_u = 0$, $(\beta^2\gamma)_v = 0$, cosicchè $\beta^2\gamma$ è costante, e potremo quindi cambiare il parametro delle v in guisa che $\beta = \gamma = \text{cost.}$, come precedentemente. Ora le $\beta = \gamma = \text{cost.}$ dicono che si tratta di particolari *superficie di coincidenza* (F. C., p. 157). Nel caso $\gamma = 0$

(1) Cfr. *Geometria proiettiva-differenziale* di G. FUBINI ed E. ČECH (Bologna, Zanichelli), p. 167. Citeremo questo libro con F. C.

ora escluso le condizioni d'integrabilità danno $\theta_u \theta_{uv} = \theta_{uuv}$, $\theta_v \theta_{uv} = \theta_{vvv}$, cioè $\log \theta_{uv} = \theta + \text{cost}$, oppure $\theta_{uv} = 0$. Quindi

$$\theta = \log \frac{h U' V'}{U + V} \text{ oppure } \theta = U + V \quad (h = \text{cost}; U \text{ funz. di } u, V \text{ funz. di } v).$$

Nel primo caso, mutando i parametri delle u, v (col che non sarà più $p_{11} = 1$) potremo rendere $U = u, V = v$. Nel secondo caso potremo analogamente rendere $\theta = 0$ e quindi $\beta_v = -p_{11}$ funzione della sola u . Il caso 2° conduce dunque a *rigate* od a *superficie di coincidenza*, di cui lasciamo al lettore l'esame particolareggiato. Il caso $\pi_{22} = p_{11} = 0$, duale di questo, si riconduce ad esso anche soltanto scambiando le u, v .

Caso 3°. È $p_{11} = p_{22} = 0$, $\pi_{11} \pi_{22} \neq 0$. (Duale di questo è il caso $\pi_{11} = 0$, $p_{11} \neq 0$).

Allora K' (Nota cit.) è un piano rigato, che potremo supporre essere il piano $t = 0$. Potremo poi scegliere i parametri delle u, v in guisa che:

$$1 = \pi_{11} = \pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta \theta_v, \quad 1 = \gamma_u + \gamma \theta_u.$$

Poichè per le condizioni d'integrabilità è $\beta_v = \gamma_u$, sarà anche $\beta \theta_v = \gamma \theta_u$. Cioè esiste una funzione φ tale che $\beta = \varphi_u$, $\gamma = \varphi_v$; e θ sarà funzione di φ .

Porremo $\theta' = d\theta : d\varphi$ e analoghe. Le precedenti diventano così:

$$(6) \quad \beta = \varphi_u, \quad \gamma = \varphi_v, \quad \varphi_{uv} + \theta' \varphi_u \varphi_v = 1 \quad (\varphi_u \varphi_v \neq 0).$$

Tenuto conto di questo, si riconosce che le condizioni d'integrabilità equivalgono alle:

$$\{(\theta'' - \theta'^2 + 1) \varphi_u^2 \varphi_v\}_v = \{(\theta'' - \theta'^2 + 1) \varphi_u \varphi_v^2\}_u = 0,$$

cioè alle:

$$(7) \quad \begin{cases} (\theta'' - \theta'^2 + 1) \varphi_u^2 \varphi_v = U_1 = \text{funzione della sola } u. \\ (\theta'' - \theta'^2 + 1) \varphi_u \varphi_v^2 = V_1 = \text{funzione della sola } v. \end{cases}$$

Se $\theta'' - \theta'^2 + 1 \neq 0$, segue che $\varphi_u : U_1 = \varphi_v : V_1$, cioè che φ è funzione di una $w = U + V$, ove U è funzione della sola u , V della sola v , ed $U' V' \neq 0$, $\varphi' \neq 0$.

Le (7) diventano (posto $\varphi' = d\varphi : dw$ e analoghe):

$$(\theta'' - \theta'^2 + 1) \varphi'^3 U' V' = \text{cost.}$$

Poichè $\theta = \theta(\varphi)$, $\varphi = \varphi(w) = \varphi(U + V)$ segue che $U' + V'$ è funzione di $U + V$.

Due casi sono pertanto possibili nella nostra ipotesi:

3° A). È $U' = \text{cost.}$, $V' = \text{cost.}$ Cioè φ è funzione di $hu + kv$ (con $h, k = \text{cost.} \neq 0$), ossia è funzione di $u + rv$, con $r = \text{cost.} \neq 0$; ed è:

$$r(\varphi'' + \theta'\varphi'^2) = 1 \quad ; \quad (\theta'' - \theta'^2 + 1)\varphi'^3 = \text{cost.} \quad (\varphi' = \frac{d\varphi}{dw} \quad , \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\varphi} \text{, ecc.})$$

3° B). Scrivendo $w = e^{U+V}$, anzichè $w = U + V$, si trova che φ è funzione di $w = uv$ e che

$$w(\varphi'' + \theta'\varphi'^2) = 1 \quad , \quad w^2\varphi'^3(\theta'' - \theta'^2 + 1) = \text{cost.}$$

3° C). Se invece $\theta'' - \theta'^2 + 1 = 0$, la (6) dimostra per i risultati del n. 1 che *la superficie è collineare ad una superficie a curvatura metrica costante*. Del resto è ben noto che la congruenza delle normali metriche ad una superficie S a curvatura costante metrica è completamente coniugata alla superficie, perchè le asintotiche delle due falde focali dell'evoluta di S corrispondono alle asintotiche di S ⁽¹⁾. Perciò, per i risultati della mia Nota cit., non soltanto le superficie a curvatura costante sono superficie R , ma anche la congruenza delle normali è R , e le falde dell'evoluta sono pure superficie R . Ciò si può verificare direttamente. Infatti, poichè le normali ad S formano una congruenza W , basta a tal fine dimostrare che alle linee di curvatura di S corrisponde su ogni falda dell'evoluta un sistema isoterma-coniugato. Ora, se u, v sono le linee di curvatura di S , ed r_1, r_2 sono i raggi di curvatura ($r_1 r_2 = 1$), le formole di Codazzi provano che l'elemento lineare di S si può ridurre alla forma $\frac{1}{1 - r_2^2}(r_2^2 du^2 + dv^2)$ e che la seconda forma (di Gauss) dell'evoluta diventa

$$\sqrt{G} \frac{1}{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial v} (du^2 + dv^2),$$

che ha appunto la forma isoterma.

Oss. Anche le superficie applicabili in senso metrico su quadriche sono superficie R , e sono pertanto completamente coniugate ad una congruenza R ; le sue due falde focali sarebbero pertanto, dal presente punto di vista, l'analogo delle evolute delle superficie a curvatura costante.

Caso 4°. Ci rimane un unico caso da studiare: quello che nessuna delle p, π sia nulla. Coi metodi della Nota precedente vediamo che con una deformazione proiettiva possiamo ridurci al caso $p_{11} = p_{22} = 0$ già studiato.

Dunque: *Escluse alcune rigate, le superficie di Tzitzeica-Wilczynski ed alcune superficie o di coincidenza o dei tipi 3° A, 3° B, che dipendono da un numero finito di costanti, soltanto le superficie S a curvatura metrica costante,*

(1) Nel libro citato è anche dimostrato (§ 30 A) che per le superficie a curvatura costante e per esse sole la congruenza duale di quella delle normali metriche si riduce al piano (rigato) all' ∞ .

le loro duali e le loro deformate proiettive posseggono una coppia di congruenze duali, l'una completamente coniugata, l'altra completamente armonica ad S . Tra queste le superficie di Tzitzzeica-Wilczynski godono delle proprietà che le due congruenze si riducono l'una ad una stella, l'altra a un piano rigato; invece per le superficie a curvatura metrica costante generalmente la sola congruenza completamente armonica degenera e si riduce al piano (all'infinito) rigato; la congruenza duale è quella delle normali metriche.

Abbiamo lasciato al lettore lo studio completo dei casi eccezionali 2° (rigate e superficie di coincidenza) e 3° A, 3° B. Queste ultime godono della notevole proprietà di essere non solo superficie R , ma anche isotermo-asintotiche. Le 3° A ammettono anche un gruppo continuo ($u' = u - ra$, $v' = v + a$) di collineazioni in se stesse.

Chimica. — *Sulla presenza del fluosilicato sodico e di quello di potassio tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio.*⁽¹⁾ Nota del Socio FERRUCCIO ZAMBONINI e del dott. GUIDO CAROBBI.

Spetta ad Arcangelo Scacchi il merito di aver riconosciuto la presenza del fluoro in alcune sublimazioni vesuviane raccolte sulla lava del 1850⁽²⁾ e di avere, poco dopo, stabilito la presenza dell'acido fluoridrico libero tra i prodotti delle esalazioni delle fumarole del grande incendio vesuviano del 1855⁽³⁾. Più tardi ancora, lo Scacchi ebbe ad osservare sviluppo abbondante di acido fluoridrico durante diversi mesi nel 1870, e meno abbondante, invece, subito dopo l'eruzione del 1872⁽⁴⁾. Lo stesso Scacchi ritenne probabile che anche il tetrafluoruro di silicio fosse da annoverarsi fra le sostanze esalate dalle fumarole vesuviane, sia come prodotto dell'azione dell'acido fluoridrico sulle lave, sia di origine profonda. In base ad alcune indagini analitiche, lo Scacchi considerò come verosimile l'esistenza al Vesuvio del fluosilicato di ammonio, che propose di chiamare criptoalite⁽⁵⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli; pervenuto all'Accademia il 4 agosto 1926.

(2) *Memoria sullo incendio vesuviano del mese di Maggio 1855 fatta per incarico della R. Accademia delle Scienze dai Socii G. Guarini, L. Palmieri e A. Scacchi, preceduta dalla relazione dell'altro incendio del 1850 fatta da A. Scacchi.* Napoli 1855, p. 47.

(3) *Ibidem*, p. 169.

(4) *Contribuzioni mineralogiche per servire alla storia dell'incendio vesuviano del mese di aprile 1872.* Parte Seconda. «Atti Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli», 1874, VI, pp. 65, 66.

(5) *Contribuzioni mineralogiche per servire alla storia dell'incendio vesuviano del mese di aprile 1872.* Parte seconda. «Atti Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli», 1874, VI, p. 35.

Molti anni dopo, il Matteucci⁽¹⁾ affermava che l'acido fluoridrico era abbondantissimo tra i prodotti gassosi delle fumarole manifestatesi il 3 luglio 1895 sul fianco N. W. del cono vesuviano.

Più recentemente, uno di noi⁽²⁾, riprendendo in esame il materiale originale di A. Scacchi, ha potuto dimostrare che la criptoalite rappresentava effettivamente la fase cubica del fluosilicato di ammonio $(\text{NH}_4)_2\text{SiF}_6$, e poté anche osservare, tra i materiali delle fumarole del periodo eruttivo iniziatosi il 3 luglio 1895 la hieratite, modificazione cubica del fluosilicato di potassio, che A. Cossa⁽³⁾ aveva scoperto nell'Isola di Vulcano.

Alcuni mesi or sono, uno di noi⁽⁴⁾ ha dimostrato l'esistenza, tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, di una varietà cesifera del fluoborato di potassio (avogadrite). Il ritrovamento ha un particolare interesse, perchè, almeno per quanto è a nostra conoscenza, sali dell'acido fluoborico non erano ancora stati osservati in natura. La formazione dell'acido fluoborico si spiega molto facilmente, per azione dell'acido fluoridrico sull'acido borico, sicchè si viene, così, a stabilire che, anche nell'attuale periodo di attività del Vesuvio, vi devono essere state delle esalazioni di acido fluoridrico⁽⁵⁾.

Grande importanza ha il fatto che le osservazioni ora ricordate di uno di noi non sono rimaste isolate, ma, come verrà comunicato in apposito lavoro, anche l'altro autore del presente scritto, il Dott. Carobbi, ha potuto ritrovare l'avogadrite, questa volta pura, non cesifera, in una seconda fumarola. Abbiamo, perciò, che, a prescindere da altri eventuali ritrovamenti, finora si sono constatate due fumarole a fluoborati. La prima, specialmente notevole per il forte contenuto in composti di cesio o, almeno, cesiferi, si trova sulle lave dell'aprile-maggio 1924⁽⁶⁾: il campione studiato fu raccolto nel novembre dello stesso anno, quando già le esalazioni in quel luogo erano cessate. L'altra fumarola era più vicina al conetto, e si apre in un canale delle stesse lave: è tutt'ora assai attiva, come uno di noi (F. Z.) ha potuto constatare anche pochi giorni or sono.

(1) « Rend. R. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli ». Adunanza del dì 3 aprile 1897. Ibidem Adunanza del 1º luglio 1899.

(2) F. Zambonini, *Mineralogia Vesuviana*, 1910, pp. 53-54.

(3) Bull. Soc. franç. de Minér 1882, V, 61.

(4) « Rendiconti R. Accad. Lincei (6ª) 1926, III, 1º sem., 344.

(5) Che il magma vesuviano sia fluorifero, risulta, del resto, anche dalla presenza non rara nei blocchi rigettati di cristalli di fluorapatite, di indubbia origine pneumatolitica, come pure da quella di fluorite sulle pareti di una lava del 1872 (o, più probabilmente, del 1631), e di sellaite (belonesite), l'una e l'altra pneumatolitiche, in un'antica roccia vulcanica avvolta nella lava del 1872. Nei blocchi del Monte Somma sono frequenti, poi, minerali fluoriferi (fluorite, humiti, miche, anfibioli, ecc.).

(6) Per la disposizione di queste lave si consulti lo schizzo planimetrico del cratere vesuviano al 31 dicembre 1924, eseguito dal prof. A. Malladra, pubblicato a p. 101 del volume I (anno 1924) della terza serie degli « Annali del R. Osservatorio Vesuviano ».

Sia nell'una, che nell'altra fumarola si è avuta una profonda alterazione delle lave, prodotta, soprattutto, da vapori di acqua e di acido cloridrico, che ha prodotto il caratteristico ingiallimento della roccia.

Il biossido di zolfo era presente nella seconda fumarola, ed è molto probabile che non mancasse nemmeno nella prima. Ora, è interessante notare che in condizioni analoghe fu rinvenuto dallo Scacchi il fluoro nel 1850 e nel 1855.

La presenza del fluoborato potassico nelle due fumarole in questione ci ha fatto pensare che, molto facilmente, non dovevano mancare i fluosilicati dei metalli alcalini. Se, infatti, l'acido fluoridrico aveva formato col borico l'acido fluoborico, e, quindi, il fluoborato potassico, ancor più facilmente dovevano essersi originati dei fluosilicati. Le nostre ricerche sono state coronate da successo, perchè nei prodotti di ambedue le fumarole abbiamo potuto riconoscere sia il fluosilicato di potassio, che quello di sodio. Il primo, come abbiamo già detto, è stato già trovato al Vesuvio da uno di noi, nella modificazione cubica, mentre il secondo non è stato, ancora, rinvenuto come minerale. Ricristallizzando alcuni campioni con cloroammonio raccolti sulle lave vesuviane del 1906, R. Brauns⁽¹⁾ ha riferito di aver ottenuto alcuni cristallini con l'aspetto di quelli del fluosilicato di sodio esagonale, ma non ha, evidentemente per mancanza di materiale adatto, dimostrato nè che quei cristalli fossero davvero di fluosilicato di sodio, nè che esistessero già nei miscugli salini sottoposti a ricristallizzazione da soluzioni acquose. Per il fluosilicato di sodio esagonale, ora per la prima volta sicuramente trovato come minerale, noi proponiamo il nome di *Malladrite*, in omaggio all'attuale Conservatore del R. Osservatorio Vesuviano, professore A. Malladra, che da quindici anni dedica la sua intelligente attività allo studio del Vesuvio.

La hieratite, fase cubica del fluosilicato di potassio, è stata da noi osservata in minutissimi cubetti, monorifrangenti. Poteva sorgere il dubbio che si trattasse di cristallini di fluoborato di potassio, i quali, quando sono molto piccoli e sottili, possono sembrare monorifrangenti, data la loro tenue birifrangenza. La distinzione, però, è assai facile, perchè, mentre il fluoborato di potassio ha indici di rifrazione inferiori a quelli dell'acqua⁽²⁾, il fluosilicato di potassio ha $n_{Na} = 1.339$, come risulta dalla determinazione del dott. L. Raiteri⁽³⁾. Ora, precisamente, noi abbiamo potuto stabilire dapprima che i nostri cristallini avevano $n_{Na} > 1.333$ (che è l'indice di rifrazione dell'acqua per la luce del sodio), e, successivamente, abbiamo potuto fare una determinazione precisa, col metodo della linea di Becke, ricorrendo, come il Raiteri, a miscele formate da alcool metilico, alcool etilico e solu-

(1) «Centralbl. für Min. Geol. u. s. w.», 1906, p. 321.

(2) F. ZAMBONINI, «Rend. R. Acc. Lincei».

(3) «Rend. R. Acc. Lincei», 1922 (5) XXXI; 1° sem., 115.

zione acquosa satura di fluosilicato di potassio. Abbiamo, così, trovato $n_{Na} = 1.340$ (1.339 secondo il Raiteri). Per ricristallizzazione, abbiamo ottenuto cristalli più nitidi, generalmente col cubo dominante, unito spesso all'ottaedro, e con lo stesso indice di rifrazione. Isolandone alcuni, si è potuto riconoscere qualitativamente che erano costituiti da fluosilicato potassico.

La Malladrite è abbastanza diffusa, ma in modo tutt'altro che uniforme, nei campioni di ambedue le fumarole, sotto forma di prismetti esagonali assai piccoli, con birifrangenza debole, negativa. Di solito, non sono terminati regolarmente alle estremità dell'asse principale: talvolta, però, si distinguono una bipiramide esagonale ovvero il pinacoide base ben netto. Gli indici di rifrazione sono nettamente inferiori a quelli dell'acqua. Non disponendo di liquidi ad indice di rifrazione così basso, abbiamo fatto una determinazione approssimativa di ϵ e di ω col metodo del Duca di Chaulnes, ottenendo 1,31 circa. Questo valore si accorda bene con quelli di Raiteri⁽¹⁾ $\epsilon = 1.3089$, $\omega = 1.3125$, ambedue per la luce del sodio. Tutti questi caratteri indicavano nettamente che si trattava di cristallini di fluosilicato sodico. Che si avesse a che fare con cristallini di un fluosilicato fu messo fuori dubbio con una esperienza assai semplice. I cristallini in questione furono trattati con una soluzione calda di cloruro di potassio, e dettero luogo alla formazione di piccoli cristallini cubici di fluosilicato potassico, ben riconoscibili mediante il caratteristico indice di rifrazione.

Ad ogni modo, i cristallini naturali di Malladrite furono ricristallizzati. Si ottennero, così, dei bellissimi cristallini di fluosilicato sodico, prismatici ovvero tabulari, ed identici a quelli che si hanno comunemente nelle indagini microchimiche. In uno, benchè piccolissimo, fu possibile misurare ω e ϵ col metodo della deviazione minima, ottenendo, per la luce del sodio, $\epsilon = 1.309$, $\omega = 1.312$.

Risulta, così, l'identità di questi cristalli con quelli naturali di Malladrite, dai quali si differenziano soltanto per le loro dimensioni più considerevoli. È stato, naturalmente, facile stabilire qualitativamente che si trattava di fluosilicato sodico. Nel cristallino adoperato per la determinazione di ω e di ϵ si è anche misurato $(1010): (10\bar{1}1) = 57^{\circ}0'$, mentre il valore trovato da Marignac⁽²⁾ $56^{\circ}57'$.

Nei prodotti di ricristallizzazione abbiamo osservato alcune interessanti associazioni regolari dei due fluosilicati di sodio e di potassio. Su una faccia della base di alcuni cristalli di fluosilicato sodico erano impiantati, per una faccia di cubo, dei cristallini del sale di potassio, in modo tale, che, delle due coppie di spigoli visibili del cubo, una era parallela e l'altra, naturalmente, perpendicolare ad uno degli spigoli di combinazione della base col prisma esagonale. La tendenza a dare associazioni regolari, è però,

(1) Loc. cit.

(2) *Oeuvres*, I, 496.

molto debole, come risulta dal fatto che, mentre per alcuni cristalli la posizione indicata è rigorosa; altri, invece, vi si approssimano soltanto. Alcuni cristalli, poi, presentano i lati della faccia visibile del cubo rispettivamente paralleli e perpendicolari ad uno spigolo di combinazione (in realtà non esistente) della base col prisma esagono $\{11\bar{2}0\}$: formano, infatti, angoli di 30° e 60° rispettivamente con due lati contigui dell'esagono base.

Col ritrovamento del fluosilicato sodico, noi abbiamo che, come prodotti dell'attività fumarolica sono, finora, noti i tre fluosilicati:

$(\text{NH}_4)_2 \text{ Si F}_6$	Criptoalite A. Scacchi
$\text{K}_2 \text{ Si F}_6$	Hieratite A. Cossa
$\text{Na}_2 \text{ Si F}_6$	Malladrite F. Zambonini e G. Carobbi.

Criptoalite e malladrite sono stati osservati soltanto al Vesuvio, la hieratite a Vulcano ed al Vesuvio. Noi riteniamo, però, che essi sieno più frequenti di quanto non è risultato finora, e che sieno sfuggiti agli studiosi a causa della piccolezza dei loro cristalli. È anche nostra opinione, fondata su esperienze che, per ora, non crediamo di riferire, che altri fluosilicati, oltre quelli indicati, si trovino tra i prodotti delle fumarole vesuviane.

Chimica. — *Solfati di cerio ceroso e tallio talloso* ⁽¹⁾. Nota del Socio FERRUCCIO ZAMBONINI e della dott. SILVIA RESTAINO.

Nella presente Nota, che fa seguito a quella già pubblicata sui solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini ⁽²⁾, riferiremo i risultati ottenuti dallo studio di quella parte del sistema ternario $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ — Tl_2SO_4 — H_2O , che ci interessa per lo scopo del nostro lavoro. Come al solito, le nostre esperienze sono state eseguite per l'isoterma di 25° , con gli stessi metodi già usati nelle precedenti.

H. Zschiesche ⁽³⁾ si è occupato per il primo dei solfati di cerio ceroso e di tallio talloso: egli ne ha preparati e descritti due, che rispondono alle formule moderne $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Tl}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ⁽⁴⁾ e $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{Tl}_2\text{SO}_4$.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli, pervenuto all'Accademia il 4 agosto 1926.

(2) Si vedano le varie Note di ZAMBONINI e CAROBBI, ZAMBONINI e CAGLIOTI, ZAMBONINI e RESTAINO pubblicate nei « Rendiconti » di questa Accademia a partire dal 2° semestre del 1924.

(3) « Journal prakt. Chem. », 1869, CVII, pp. 98-99.

(4) Nel *Lexikon der anorganischen Verbindungen* di M. K. HOFFMANN (1919, I, 2. Hälfte, p. 1490) questo sale è dato come $1 - 1 - 4$, ma in realtà Zschiesche ha preparato il diidrato, come risulta in modo sicuro non solo dalla formula data dallo Zschiesche ma anche dai valori calcolati, che corrispondono precisamente alla formula $1 - 1 - 2$, e da quelli trovati con l'analisi.

Per quest'ultimo, lo Zschiesche rimase indeciso se considerarlo anidro, ovvero con 1 o $1\frac{1}{2}$ H₂O, pur ritenendo come più verosimile questa seconda ipotesi⁽¹⁾. Dei due sali doppi, il primo fu ottenuto mescolando soluzioni abbastanza concentrate dei due solfati, in modo che quello di cerio fosse presente in eccesso, e scaldando leggermente; il secondo, mescolando alla temperatura ordinaria soluzioni *sature* dei due sali.

M. Delafontaine, nell'articolo *Cérium* da lui scritto per il Dizionario del Wurtz⁽²⁾ riferisce alcune sue ricerche inedite, in base alle quali il « solfato talloso-ceroso », senza indicazione precisa di formula, è descritto come una polvere fine, pesante, bianca, cristallina, più solubile nell'acqua pura del sale di potassio corrispondente, ottenuta per evaporazione di una soluzione contenente i due solfati. Secondo M. K. Hoffmann⁽³⁾, queste indicazioni si riferirebbero al composto $3\text{Ti}_2\text{SO}_4 \cdot \text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$, ma la cosa non è sicura. Non solo, infatti, il Delafontaine non dà alcuna formula, ma il solfato ceroso potassico secondo lui più importante sarebbe $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{K}_2\text{SO}_4$ anidro, dimodochè, se mai, il composto corrispondente di tallio talloso dovrebbe essere ugualmente del tipo 1 — 3 — 0 e non 1 — 3 — 1.

Il composto $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Ti}_2\text{SO}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ o 1 — 1 — 4 è stato preparato e studiato accuratamente da G. Wyrouboff⁽⁴⁾, il quale ha trovato sempre lo stesso idrato, indipendentemente dalla temperatura di preparazione⁽⁵⁾. Ottenne cristalli misurabili, monoclini, con $a : b : c = 1.1309 : 1 : 0.7059$; $\beta = 91^\circ 53'$, e le forme semplici $a \{100\}$, $m \{110\}$, $n \{320\}$, $q \{011\}$ ed un prisma di incerto simbolo $\{\bar{1}55\}$ o $\{\bar{1}66\}$.

(1) Generalmente (così, per es., nell'articolo *Cérium* dell'*Encyclopédie Chimique* di Frémy, scritto da P. T. CLEVE, nel *Lexikon der anorganischen Verbindungen* di M. K. HOFFMANN) si riferisce che la formula data da Zschiesche per questo sale è $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Ti}_2\text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ e non $1\frac{1}{2}$ H₂O. In realtà Zschiesche ha scritto la formula con una sola molecola di acqua di cristallizzazione, ma i valori calcolati che egli dà sono quelli richiesti per la formula 1 — 1 — $1\frac{1}{2}$ e non per l'altra 1 — 1 — 1, come risulta dal seguente prospetto:

	Valori calcolati per		Valori calcolati da Zschiesche
	1 — 1 — 1	1 — 1 — $1\frac{1}{2}$	
Ce ₂ O ₃	15.65	15.58	15.41
Ti ₂ O	60.60	60.34	60.48
SO ₃	22.89	22.79	22.82
H ₂ O	0.86	1.28	1.28

Non vi è dubbio, perciò, che Zschiesche mentre ha dato la formula 1 — 1 — 1, ha eseguito i calcoli tenendo presente l'altra 1 — 1 — $1\frac{1}{2}$.

L'acqua trovata da Zschiesche ammonta a 1.424 %.

(2) *Dictionnaire de Chimie pure et appliquée*, tome I, p. 797.

(3) *Lexikon der anorganischen Verbindungen*, 1919, I (2. Hälfte), p. 1490.

(4) « Bull. Soc. Franç. min. », 1891, XIV, p. 86.

(5) È evidente che, con questa espressione, il Wyrouboff intende dire temperature comprese fra quella ordinaria dell'ambiente e quella del bagno maria. I cristalli migliori furono ottenuti a 60°.

In ricerche recenti il Fernandes ⁽¹⁾ accenna a due diversi solfati ceroso-tallosi, uno di formula



il quale ultimo può precipitare nel caso in cui si agisca con un eccesso di solfato di tallio.

Riassumendo, figurano noti, finora, due diversi solfati doppi del cerio trivalente e del tallio talloso



il secondo dei quali si formerebbe in presenza di un eccesso di solfato talloso.

I risultati delle nostre esperienze sono riuniti nella seguente Tabella.

N. dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	Tl ₂ SO ₄	Ce ₂ (SO ₄) ₃	H ₂ O	$\frac{\text{Tl}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	Ce	SO ₄	H ₂ O	Tl	$\frac{\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Tl}_2\text{SO}_4}$	
1	5.45	—	94.55	0.057	6.81	22.21	—	70.98	0.16	I — 4 $\frac{1}{2}$
2	5.21	—	94.79	0.055	7.71	23.37	—	68.92	0.18	
3	5.33	—	94.67	0.056	9.54	25.86	—	64.60	0.24	
4	3.46	0.05	96.49	0.036	10.32	25.26	—	64.42	0.26	
5	2.55	0.12	97.33	0.026	11.54	26.58	0.47	61.41	0.31	I — 4 $\frac{1}{2}$ + I — 3 — (I?)
6	2.44	0.16	97.40	0.025	12.16	26.65	0.86	60.33	0.33	
7	2.52	0.14	97.34	0.026	13.23	27.04	0.88	58.85	0.36	
8	2.44	0.17	97.39	0.025	13.39	27.33	1.90	57.38	0.38	I — 3 — (I?) + I — 1 — 4
9	2.57	0.16	97.27	0.026	14.75	28.55	1.91	54.79	0.44	
10	2.42	0.16	97.42	0.025	17.66	29.74	3.17	49.23	0.58	
11	2.29	0.18	97.53	0.024	22.12	32.18	5.12	40.58	0.89	
12	2.53	0.18	97.29	0.026	23.07	32.72	5.34	38.87	0.97	I — 1 — 4H ₂ O
13	2.35	0.24	97.41	0.024	23.71	33.39	5.66	37.24	1.04	
14	1.90	0.33	97.77	0.019	24.55	33.77	6.28	35.40	1.14	
15	1.80	0.32	97.88	0.018	24.66	33.84	6.17	35.33	1.14	
16	1.23	0.54	98.23	0.012	24.88	33.77	6.48	34.87	1.17	
17	1.14	0.65	98.21	0.011	24.88	35.23	6.39	33.50	1.21	
18	1.01	1.02	97.97	0.010	25.88	34.44	6.77	32.91	1.29	

(1) « Gazz. chim. ital. », 1924, LIV, 623.

Composizione teorica dei composti ottenuti.

	Ce	Tl	SO ₄	H ₂ O.
Ce ₂ (SO ₄) ₃ ·Tl ₂ SO ₄ ·4H ₂ O	24.50	35.64	33.57	6.29
Ce ₂ (SO ₄) ₃ ·4½ Tl ₂ SO ₄	9.88	64.72	25.40	—
Ce ₂ (SO ₄) ₃ ·3Tl ₂ SO ₄ ·H ₂ O	13.36	58.32	27.46	0.86

Da questa tabella e dalla solita rappresentazione grafica (fig. 1) ottenuta riportando sulle ascisse i valori del rapporto $\frac{Tl_2SO_4}{H_2O}$ delle fasi liquide e sulle ordinate quelli del rapporto $\frac{Ce_2(SO_4)_3}{Tl_2SO_4}$ dei corrispondenti corpi di

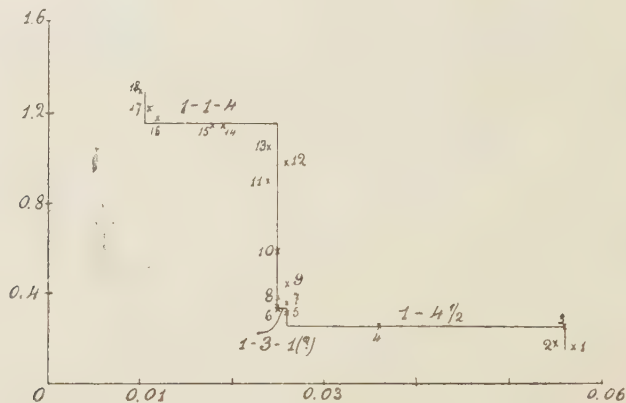
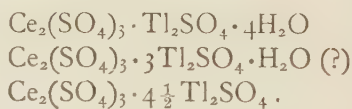


Fig. 1.

fondo, appare chiaramente che nelle nostre condizioni sperimentali sono stabili i tre composti:



I due primi sono noti da lungo tempo, mentre il terzo non era stato, finora, osservato da coloro che hanno studiato i solfati doppi di cerio ceroso e tallio monovalente. È notevole il fatto che, mentre Zschiesche, Delafontaine e Fernandes considerano il composto 1 — 3 — 1 (anidro secondo Delafontaine) come quello che si forma in presenza di un eccesso di solfato talloso, in realtà esso ha un campo di esistenza ristrettissimo, tanto che, anche in una ricerca sistematica potrebbe molto facilmente sfuggire, se non presentasse, come vedremo, dei caratteri cristallografici così netti, da permetterne il riconoscimento senza difficoltà.

Stabile, invece, in contatto con soluzioni che contengono più di 2.5 % Tl₂SO₄ è il sale doppio 1 — 4½, che ha, perciò, un largo campo di sta-

bilità, analogamente a quanto abbiamo già trovato nelle nostre precedenti ricerche sui solfati doppi del lantanio e del neodimio col tallio talloso.

La facile formazione del composto $1-3-1$ (?) osservata dagli autori sopra indicati, è dovuta, probabilmente, al fatto che, in un primo tempo, si separa effettivamente dalle soluzioni quel sale doppio, il quale, però, essendo stabile solo in contatto con liquidi che contengono una quantità determinata di solfato talloso, se la soluzione ha una composizione diversa, si trasforma in parte o totalmente nell'uno o nell'altro dei due composti $1-1-4$ o $1-4\frac{1}{2}$, a seconda del tenore in solfato talloso della soluzione.

Effettivamente, con apposite esperienze, abbiamo potuto stabilire che, in qualche caso, e, precisamente quando si mescolano soluzioni *diluite* di solfato ceroso e di solfato talloso, se quest'ultimo è in eccesso, si ottiene un deposito del sale doppio $1-3-(1?)$, ben riconoscibile al microscopio. Se, al contrario, le soluzioni dei due componenti sono *concentrate*, precipita il sale $1-4\frac{1}{2}$, identificato per presentarsi al microscopio in tavolette a contorno esagonale, e per il suo contenuto in cerio (10.18 % trov. 9.88 calc.).

Daremo ora, alcune brevi notizie sui composti preparati.

$Ce_2(SO_4)_3 \cdot Ti_2SO_4 \cdot 4H_2O$ o $1-1-4$. — Questo composto è stabile, puro, in contatto con soluzioni contenenti da 1.2 a 2 % circa Ti_2SO_4 e da 0.5 a 0.3 % $Ce_2(SO_4)_3$.

Nella maggior parte delle esperienze si è ottenuto sotto forma di polveri cristalline, ma una volta si sono avuti anche nitidi cristalli, sempre molto piccoli, ma ben determinabili. Nei cristallini misurati si sono osservate le forme a {100}, m {110}, q {011}; in quelli microscopici spesso si vede anche un altro prisma che si unisce a q per terminare i cristalli alle estremità dell'asse verticale. Generalmente, il pinacoide {100} ha faccette strettissime, ma qualche volta è più esteso ed allora i cristalli somigliano assai a quelli ordinari di augite.

Del resto, i cristalli, specialmente i più grandi, sono molto mal conformati. Gli spigoli della zona [001] quasi sempre non sono paralleli, ma convergenti; spesso, inoltre, parecchi cristalli si riuniscono insieme uno dopo l'altro, senza, però, che gli assi c dei vari cristallini sieno collineari. Le faccie del prisma {110} sono spesso striate, ma non verticalmente, come ha osservato Wyruboff, bensì parallelamente ad uno degli spigoli di combinazione con {011}. Le misure riescono, perciò, molto oscillanti; le medie tuttavia vanno bene d'accordo con i valori teorici di Wyruboff, ma la concordanza è da ritenersi più che altro accidentale:

Mis.	Calc.
$(110) : (\bar{1}10) = 82^\circ 22'$	$83^\circ 0'$
$(011) : (0\bar{1}1) = 70^\circ 24'$	$70^\circ 24'$
$(011) : (110) = 65^\circ 20'$	$65^\circ 33'$

Su (110) una direzione di massima estinzione forma un angolo di 16° – 17° con la verticale. Spesso si ha estinzione ondulosa, e molti cristalli non si estinguono mai fra i nicol incrociati. Alcuni cristalli presentano ad un estremo di c estinzione perfetta, molto ondulosa, invece, all'altro estremo.

Il composto $1-1-4$ perde la sua acqua di cristallizzazione già nella stufa ad acqua, a 98° circa.

Il sale doppio $Ce_2(SO_4)_3 \cdot 3Tl_2SO_4 \cdot 1(?)H_2O$ ha un campo di esistenza limitatissimo. È stabile, puro, soltanto in contatto di soluzioni che contengono 2.5% circa di solfato talloso e 0.15% circa di solfato ceroso. Si comprende, perciò, bene, come possa facilmente sfuggire nello studio del sistema. Per fortuna, è facile riconoscere questo composto al microscopio. Esso costituisce una polvere cristallina, che al microscopio risulta formata da cristalli perfettamente identici a quelli già descritti per il lantanio, di formula $La_2(SO_4)_3 \cdot 3Tl_2SO_4$ ⁽¹⁾. La figura a p. 281 del lavoro ricordato e la fig. 4 a p. 282 possono benissimo rappresentare anche i cristalli di solfato ceroso-talloso $1-3$ ⁽²⁾.

Un problema interessante era quello di stabilire se il composto $1-3$ è anidro ovvero monoidrato. Nelle nostre ricerche già citate sui solfati doppi di lantanio e di tallio talloso, il composto $1-3$ lo abbiamo descritto come anidro. È vero che le analisi avevano date piccole quantità di acqua (da 0.23 a 0.38%), notevolmente inferiori a quelle richieste dalla formula $1-3-1$, sicchè furono considerate come dovute ad acqua interposta ovvero adsorbita, tanto più che quantità analoghe di acqua erano state trovate anche nel composto $1-4\frac{1}{2}$, indubbiamente anidro.

Nel composto $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Tl_2SO_4$ il contenuto in acqua corrispondeva sensibilmente (0.88%) a quello richiesto dalla formula $1-3-1$ (0.86%) anche dopo alcuni mesi dalla preparazione. Si è osservato, però, che l'eliminazione dell'acqua avviene gradualmente; nella stufa ad acqua, a 98° – 99° , se ne elimina 0.31% , una quantità, cioè, che corrisponde a circa $1/3 H_2O$. Ma, ciò che è più importante, i cristalli, anche quando vengono pressochè completamente disidratati, mediante due ore di riscaldamento a 140° , non presentano, al microscopio, la minima variazione nella loro trasparenza, nè subiscono modificazioni apparenti. Rimangono perfettamente omogenei, e l'estinzione continua ad avvenire, in modo completo ed uniforme, sulle faccie del pinacoide (010) parallelamente e perpendicolarmente all'asse b . In base a queste osservazioni, è certo che l'acqua osservata nel composto $1-3$ non può considerarsi come acqua di cristallizzazione vera e propria, nel qual caso la sua eliminazione dovrebbe essere accompagnata, come si verifica negli idrati tipici, dalla distruzione del reticolo cristallino.

(1) ZAMBONINI e CAROBBI, «Rend. R. Acc. Lincei», (6°) 1925, I, 1° sem., p. 280.

(2) Nella Nota ora ricordata, due figure furono, nella impaginazione, inesattamente numerate. E, precisamente, la figura a p. 281 va considerata come la fig. 3 e la fig. 3 a p. 282 come la fig. 2.

Sembrerebbe, piuttosto, trattarsi di acqua disciolta od adsorbita, paragonabile a quella delle zeoliti, dell'ossalato di cerio, ecc., nei quali casi, appunto, essa può sfuggire senza distruggere l'omogeneità dei cristalli.

Il sale doppio $1 - 4\frac{1}{2}$ si presenta, al microscopio, in nitide tavolette a contorno esagonale, perfettamente corrispondenti a quelle già descritte per i solfati doppi di lantanio e tallio e di neodimio e tallio (talloso).

Chimica. — *Sopra l'elemento di numero atomico 61* ⁽¹⁾. Nota del Corrisp. LUIGI ROLLA e di LORENZO FERNANDES.

In quest'ultimo decennio gli studii sopra gli elementi delle terre rare sono stati rivolti soprattutto alla ricerca di quegli elementi previsti dalla legge di Moseley, e che non erano stati ancora identificati, elementi di numero atomico 72 e 61.

Le ricerche sopra il primo di questi furono brillantemente risolte nel 1923 da Coster ed Hevesy con la scoperta dell'afnio. Per quello che riguarda invece l'elemento 61 la letteratura è assai scarsa di notizie. Hadding ⁽²⁾ nel 1922, in un lavoro nel quale riporta i risultati dell'analisi Röntgenspettrografica di alcuni minerali, segnalò, tra gli altri elementi presenti in un campione di fluocerite, l'elemento 61. La notizia di questo Autore non ebbe più nè da lui nè da altri alcuna conferma. Le lunghe e sistematiche ricerche eseguite invece da Günther e Stranski ⁽³⁾ dettero risultati completamente negativi, come pure tutte negative furono le ricerche dei numerosi sperimentatori che ricercarono l'elemento 61 sopra i minerali delle terre rare e su materiali arricchiti, mediante l'analisi degli spettri di raggi X (emissione della serie L).

Prandtl e Grimm ⁽⁴⁾ considerando questi insuccessi, avuti anche da valorosi autori che si erano occupati dell'argomento con raziocinio e con grandiosità di mezzi sperimentali, pensarono che si dovesse ricercare una ragione teorica per la quale l'elemento 61 o non sarebbe esistito o si sarebbe trovato lontano dagli elementi delle terre rare.

Quello che risultava evidente era il fatto che se l'elemento 61 esisteva, e questo era quasi fuori dubbio, doveva trovarsi certamente in quantità così piccola da sfuggire anche ai mezzi più fini di ricerca.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze; pervenuto all'Accademia il giorno 3 agosto 1926.

(2) « Z. anorg. Chem. », 122, 195 (1922).

(3) « Z. phys. Chem. », 106, 440 (1922).

(4) « Z. anorg. Chem. », 1924.

Per scoprire l'elemento 61 bisognava dunque, o perfezionare i metodi di frazionamento tanto da poterlo ottenere in concentrazioni tali per le quali fossero validi gli attuali mezzi di indagine, o affinare questi mezzi.

Noi abbiamo iniziato le nostre ricerche soprattutto per risolvere la prima di queste quistioni; prima di tutto perchè con essa ci si sarebbe avviati alla possibilità di un'eventuale separazione, in secondo luogo perchè una volta riusciti ad accertare la presenza del nuovo elemento con i metodi comuni, si avrebbero avute meno perplessità che se il metodo fosse stato nuovo e quindi meno sicuro.

Sin dall'inizio dell'anno 1922 noi indirizzammo le nostre ricerche sopra le terre didimiche considerando come in esse dovesse trovarsi l'elemento ricercato.

Attaccammo una quantità relativamente piccola di ossido di didimio commerciale, contenente circa il 70 % di neodimio e praseodimio e il resto, lantanio cerio ed altri elementi delle terre rare.

Come metodo di frazionamento ci servimmo di un metodo che ci aveva dato ottimi risultati nel frazionamento delle terre del cerio dell'ittrio e delle terre rare tetravalenti ⁽¹⁾.

Gli ossidi didimici furono sciolti in acido solforico diluito, e alla soluzione dei solfati così ottenuta fu aggiunta una soluzione di solfato di tallio. I solfati doppi delle terre col tallio vennero cristallizzati frazionatamente.

Dopo numerose serie di cristallizzazioni, potemmo osservare negli spettri di assorbimento delle soluzioni, delle anomalie che ci fecero pensare essere dovute alla presenza di un nuovo elemento. Ritenemmo allora necessaria l'analisi Röntgenspettrografica.

Gli spettri di raggi X d'assorbimento, serie K, eseguiti in Arcetri dalla Sig.^a Prof. Brunetti sul nostro materiale dettero la riga caratteristica dell'elemento 61.

Gli spettri di emissione, però (serie L), eseguiti nelle condizioni normali non ci dettero nessun risultato. In vista del fatto che il materiale che noi avevamo a disposizione era in quantità molto piccola, non ritenemmo scrupoloso pubblicare allora i nostri risultati, e riprendemmo subito le nostre ricerche sopra quantità molto maggiori di materiale. Il metodo di frazionamento venne però alquanto modificato per ovviare ad alcune difficoltà di indole pratica, riguardanti la poca solubilità dei solfati doppi delle terre didimiche col tallio.

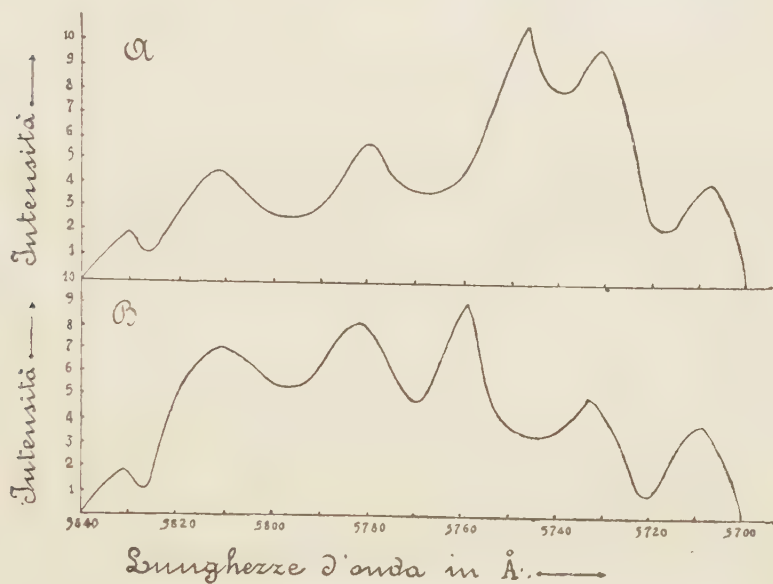
Operando sopra quantità relativamente grandi era molto difficile poter trovare recipienti di laboratorio che fossero capaci di contenere masse ingenti di liquido, inoltre la evaporazione di questo portava una grande perdita di tempo. Noi desideravamo invece progredire colla massima rapidità.

(1) « Gazz. Chim. it. », 54, 617 (1924); 623 (1924); 55, 1 (1925).

Il frazionamento ⁽¹⁾ venne eseguito sopra cristalli misti dei nitrati doppi delle terre col tallio, coi nitrati doppi delle terre con l'ammonio. Le code incristalizzabili vennero successivamente trasformate in nitrati doppi col magnesio.

Complessivamente furono eseguite circa 3000 cristallizzazioni.

Dalle teste del frazionamento si eliminò in un primo tempo una ingente quantità di lantanio; poi cominciò la separazione del praseodimio. Le frazioni più solubili contenenti il neodimio, dopo circa 200 serie di cristallizzazioni, non contenevano più che piccole quantità di praseodimio, e cominciarono a separare, nelle code estreme, frazioni colorate in giallo



e ricche di samario. Queste frazioni vennero man mano eliminate e riunite tutte insieme. Sopra di esse venne eseguito un frazionamento a parte.

Dopo circa 30 serie di cristallizzazioni il neodimio si era quasi tutto concentrato nelle teste, mentre che le code si erano arricchite in samario.

All'esame degli spettri di assorbimento di queste frazioni si riscontrarono molto più accentuate quelle anomalie già osservate due anni or sono.

Queste anomalie riguardano in modo particolare la grossa banda di assorbimento sino ad ora attribuita al neodimio, che si trova nella regione gialla dello spettro.

(1) I dettagli del metodo e del procedere del frazionamento verranno pubblicati in una prossima Nota sulla « Gazzetta Chimica Italiana ».

Per diluizione della soluzione questa banda si scinde in 6 righe le quali nelle diverse soluzioni hanno intensità relative, e in qualche caso, posizione diversa.

Questo comportamento risulta assai evidente dal diagramma della figura I nel quale sono riportate le intensità delle varie linee di assorbimento di due frazioni estreme.

1° Le linee 5810 e 5785 Å hanno maggiore intensità nelle frazioni di coda (B) che in quelle di testa (A).

2° La linea 5750 nella soluzione B è spostata di 12 Å.

3° La linea 5733 nella soluzione A è molto più intensa che nella soluzione B.

Questo modo anomalo di comportarsi delle varie bande non poteva trovare una logica spiegazione se non coll'ammettere la presenza di un nuovo elemento.

Per definire quindi la questione in modo sicuro, era nostra intenzione eseguire sulle varie frazioni una ricerca sistematica, Röntgenspettrografica, sia cogli spettri di emissione della serie L sia con gli spettri di assorbimento della serie K che due anni or sono ci avevano dati buoni risultati e che forse, nel caso particolare, possono più difficilmente trarre in inganno.

Le nostre ricerche stavano per volgere alla fine quando è comparso l'annuncio che i Signori Harris, Hopkins e Yntema ⁽¹⁾ della Università di Illinois erano giunti a risultati paragonabili. I Chimici americani sono riusciti a fare apparire la linea $L\alpha$ caratteristica del 61 mediante lunghissime pose, ponendo sull'anticatodo di rame delle pastiche di ossido fuso.

Appare però evidente dalle loro comunicazioni, che, nelle ordinarie condizioni di esperienza, essi, come noi, non poterono osservare la linea $L\alpha$ di raggi X.

Noi, d'altra parte, non pensammo di realizzare delle condizioni di coercizione per il timore che si manifestasse qualche fenomeno accessorio che falsasse i nostri risultati.

(1) « J. Am. Chem. Soc. », 48, 1585 (1926).

Paleontologia. — *L'Elephas antiquus di Pignataro Interamna in Valle del Liri.* Nota ⁽¹⁾ del Socio GIUSEPPE DE LORENZO.

Nello scorso mese di luglio il colono Saverio Tiseo, di Pignataro Interamna presso Cassino, cavando, a scopo edilizio, arena nel suo podere, situato sulle pendici meridionali del colle, che regge il paesetto, e propriamente in Fontanarosa, vi ha rinvenuto, a circa otto metri di profondità, un grande cranio di mammifero, che è stato subito oggetto di grande curiosità e di molto rumore, essendo stato divulgato dai giornali in tutta Italia come l'avanzo fossile di un grande mastodonte miocenico.

Il fondo, in cui s'è trovato il fossile in questione, fa parte, con la collina di Pignataro Interamna, di tutto il sistema di dolci ondulazioni, che si stendono da Aquino e da Pontecorvo lungo la sponda sinistra del Liri fino al fiume Rapido, sotto Cassino, e sono costituite dalle grandi alluvioni del quaternario antico, dilaganti prima tra la catena degli Aurunci e quella delle Mainarde, modellate poi dalle acque posteriori, defluenti in minor copia verso l'attuale e più limitato corso del fiume Liri, che continua ancor oggi, come ai tempi di Orazio, a mordere taciturno, con acqua quieta, i suoi campi:

rura, quae Liris quieta
mordet aqua taciturnus amnis.

I campi attuali, recentemente creati dal Liri, si stendono, sotto Pignataro Interamna, ad una ventina di metri sul livello del mare; mentre i colli suddetti, formati dal diluvio quaternario antico, oscillano tra i sessanta ed i settanta metri sul mare, dando così uno spessore di una cinquantina di metri al terreno pleistocenico scoperto. Questo terreno, prevalentemente argilloso nella parte inferiore, passa superiormente a sabbie, arene e ghiaie gialline, intercalate a placche argillose e straterelli torbosi e contenenti anche, in alto, ceneri vulcaniche.

In questo terreno quaternario antico già da tempo si sono trovati avanzi di mammiferi fossili, specialmente elefantidi, in parte conservati nel Museo di Geologia e Paleontologia dell'Università di Napoli. Ne fece un primo cenno Oronzio Costa nei « Rendiconti della R. Acc. di Scienze fis. e matem. di Napoli » del giugno 1864. Li descrisse ampiamente Giustiniano Nicolucci nella sua memoria *Su gli elefanti fossili della Valle del Liri* (« Memorie della Soc. ital. delle Scienze detta dei XL », vol. IV, anno 1882). Nuovi contributi vi portò il Cacciamali, descrivendo, nel « Bollettino della Società

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1926.

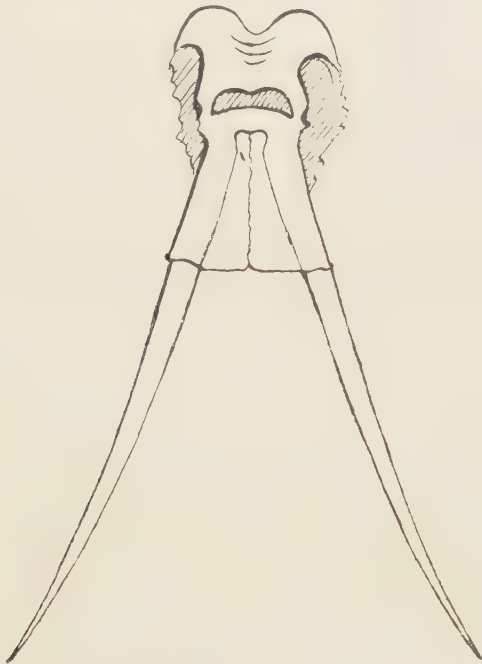
geologica italiana » del 1890, alcuni molari di elefanti di Val di Comino e di Aquino. Vi accennò infine Antonio Weithofer nella sua memoria su i *Proboscidiani fossili in Valdarno* (Memorie per servire alla descrizione della Carta geologica d'Italia, vol. IV, parte 2^a, Firenze, 1893); e ne parlò anche Hans Pohlig nella sua grande monografia su l'*Elephas antiquus*, pubblicata nei « Nova Acta Academiae Caes. Leopold. Carol. Germanicae naturae curiosorum », vol. 53, Halle 1889, e vol. 57, Halle 1892. Riassumendo poi le notizie altrui e le osservazioni mie, nella mia « Geologia e Geografia fisica dell'Italia meridionale », Bari, Laterza, 1904, a pag. 157 indicai la sicura esistenza dell'*Elephas (Euelephas) antiquus* Falc. nei depositi quaternari antichi della Valle del Liri.

Il fatto, che già esistano avanzi di elefanti fossili della Valle del Liri, non scema l'importanza dell'attuale rinvenimento di Pignataro Interamna: importanza veramente eccezionale, per la completezza del cranio esumato e per la sua posizione; la quale fa indurre, che esso si trovi in giacitura originaria, non secondaria, di trasporto, e fa quindi sperare, che esso sia collegato a tutto il restante scheletro dell'animale. Infatti l'enorme testa è disposta col suo asse longitudinale, che misura non meno di metri 3.50 dalle protuberanze frontali all'apice delle zanne, in posizione quasi perfettamente orizzontale; in modo da far supporre, che l'animale, sceso a bagnarsi in un bacino melmoso, ricco di vegetazione, sia affondato nella sabbia e nel fango, senza poter più nuotare, ed abbia cercato di tenere la testa e la proboscide in alto, per poter respirare il più lungamente possibile, finchè non sprofondò definitivamente, ed un'ulteriore alluvione poi di sua preda lo coprì e cinse. Questa ipotesi è avvalorata dalla circostanza, che proprio in corrispondenza della testa è tra le sabbie gialle intercalato un sottile straterello nero, torboso, corrispondente alla vegetazione erbacea del fondo dello stagno, in cui l'elefante forse sprofondò. Per queste ragioni v'è da ritenere, che probabilmente dietro la testa si trovi ancora, *in situ*, tutto lo scheletro dell'elefante, che sarebbe quindi opportuno scavare.

Ma lo scavo non è facile, non tanto per la profondità di esso, quanto per la friabilità dello scheletro stesso. Le ossa finora scoperte, infatti, quelle del capo, anzi che pietrificate sono, per dir così, decalcificate: in modo che, per isolarle e raccoglierle, occorre molta delicatezza ed accuratezza. Per poter isolare la mandibola e scoprire i molari, dovetti io stesso scavare sotto il cranio un cunicolo, che poi ho fatto ricolmare, per impedire il franamento dell'enorme teschio. Questa decalcificazione e tarlatura delle ossa è dovuta, io credo, al fatto, che le acque, penetranti dall'*humus* nel sottosuolo cariche di acido carbonico, passarono indenni tra le sabbie prevalentemente silicee e sciolsero gradatamente, nel corso dei millenni, il fosfato e carbonato di calcio dello scheletro, lasciando le ossa porose ed annerite, per la carbonizzazione della sostanza organica dell'osseina. I molari superiori, p. es., sono ridotti ad una serie di saccocce sciolte di smalto, essendo stato asportato

tutto l'avorio ed il cemento. Anche questa ipotesi è avvalorata dal fatto, che mentre le sabbie e le ghiaie soprastanti al fossile sono sciolte e facilmente scavabili, quelle sottostanti al cranio invece contengono placche più dure di tufo calcareo, che è evidentemente il deposito della calce sciolta dalle ossa.

In questo terreno, dunque, ed in tali condizioni giace ora il cranio dell'elefante, davvero imponente nella sua muta grandiosità. Esso è lungo, dal sommo delle protuberanze craniali all'orlo distale degli intermascellari, m. 1.40, ed è largo, sulla linea frontale, tra i parietali, m. 0.80. Caratteri-



Elephans antiquus Falc. di Pignataro Interamna (1/40 dal vero).

stica è la forma a ventaglio dei due intermascellari, che hanno insieme, sotto la cavità nasale, m. 0.42 di larghezza, mentre sull'orlo anteriore, concavo e cercinato, si allargano fino a m. 0.90, conservando nello spazio libero interno, tra i due incisivi, una larghezza di m. 0.50, ed avendo poi una lunghezza totale, lungo la sutura mediana, di m. 0.75. I due incisivi, del diametro di m. 0.15 all'uscita degli alveoli e lunghi m. 2.20, bellissimi e perfettissimi di forma e lievemente ed elegantemente curvati in avanti ed in fuori, divergono ampiamente, seguendo la linea esterna degli intermascellari, in modo, che a m. 0.45 dall'uscita dagli alveoli distano già di un metro ed i due apici sono a più di due metri di distanza l'uno dall'altro.

La mandibola era così strettamente aderente alla mascella superiore, che la sua sinfisi pareva quasi saldata alla parete interna degli intermascellari. Essa è larga, presso i condili, circa m. 0.60, con altrettanta lunghezza sulla bisettrice. Nello staccarla dal cranio, le lamelle di smalto dei molari superiori, vuotate di cemento, come s'è detto, e prive di sostegno, caddero spontaneamente. Sono rimasti in posto i molari inferiori della mandibola: specialmente sull'arco destro di questa si può osservare bene il resto di abrasione del primo (o secondo) molare, lungo m. 0.10, largo m. 0.07, con sei dischi residuali, ed il secondo (o terzo) molare, lungo m. 0.17, largo m. 0.07, con dieci dischi.

Tutti questi caratteri, e specialmente la lunghezza del cranio, la imponentza delle protuberanze e della fossa occipitale, la enorme divergenza degli intermascellari e degli incisivi, la depressione frontale, la strettezza dei dischi dei molari rispetto alla loro altezza ed alla lunghezza dei molari stessi, la forma delle difese, ecc., dimostrano chiaramente, che il cranio di Pignataro Interamna appartiene alla specie *Elephas (Euelephas) antiquus* Falconer, caratteristica delle fasi interglaciali del quaternario antico e la più grande delle poche specie di elefanti vissute sulla faccia della terra. Il felice ritrovamento di questo eranio completo dimostra poi, che, contrariamente a quanto ne scrisse il Pohlig, aveva ben ragione il Falconer nel ritenere, che il suo *Elephas antiquus* fosse strettamente affine al vivente elefante indiano, *Euelephas indicus*.

Se si proseguirà, com'è sperabile, lo scavo, si potrà allora dare una descrizione più esatta e completa del magnifico animale di Pignataro Interamna.

Biologia. — *Aspetti di lotta e di parassitismo nelle imitazioni di infusori.* Nota del Socio straniero L. HERRERA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia vegetale. — *Primi risultati della semina del Melo « senza fiori » (Pyrus apetala Münchb.).* Nota⁽¹⁾ del Socio B. LONGO.

Comunicai sei anni fa i risultati delle mie ricerche sull'interessante Melo detto « senza fiori » (*Pyrus apetala Münchb.*). È una pianta partenocarpica, che fruttifica abbondantemente, ma non porta semi. I suoi fiori (parte dei quali neppure si aprono) sono esclusivamente pistilliferi, non odorosi e non appariscenti, avendo petali piccoli e sepaloidei; perciò non eser-

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1926.

citano alcuna attrattiva sugli insetti pronubi e non vengono quindi impollinati naturalmente. Praticata nel 1920 l'impollinazione artificiale servendomi del polline dei fiori di due razze di Melo, il « rosa » e il « giugno », l'esito fu favorevole ed abbondante tanto che accennai fin d'allora che avrei poi riferito sull'esito della semina⁽¹⁾. Ma avendo conservato i semi, com'è consigliato, nella rena in attesa di seminarli alla primavera seguente, ebbi la sgradita sorpresa di constatare a suo tempo che essi avevano perduto il potere germinativo. Nella primavera del 1921 operai di nuovo l'impollinazione artificiale servendomi del polline di una pianta di altra razza di Mela detta « francesca paradisa » che potei avere a disposizione perchè coltivata in un orto a Pisa ed i cui frutti rossi contrastavano con quelli giallognoli del Melo « senza fiori ». L'esito fu anche questa volta positivo ed i semi furono subito messi in terra, in vasi, uno per uno. Germinarono regolarmente nel febbraio e nel marzo 1922. Delle piantine ottenute soltanto nove sopravvissero ed ai primi di marzo del 1923 le posi a dimora nel campo sperimentale di questo R. Orto Botanico di Pisa, disponendole in ordine di sviluppo e contrassegnandole con un numero progressivo da 1 a 9 (con 1 la più sviluppata e così di seguito in ordine di sviluppo individuale decrescente).

Le piante hanno preso tutte forte sviluppo e quest'anno, all'inizio della primavera, cioè nella terza decade di marzo, le prime sei, quelle più sviluppate, hanno cominciato a fiorire. I fiori, pur presentando qualche leggera differenza da un individuo all'altro, sono stati tutti monoclini, odorosi e provvisti di corolla vistosa. In altri termini in questa prima generazione le piante che hanno fiorito (cioè i $\frac{2}{3}$ di quelle ottenute) non hanno palesato nei fiori caratteri della pianta madre.

Tutte e sei le piante, dopo la fioritura, hanno fruttificato⁽²⁾: le prime cinque hanno maturato i frutti verso la fine di giugno e il principio di luglio, la sesta un po' più tardi verso il 20 luglio. Tutte e sei le piante hanno portato frutti più o meno grossi, buoni e profumati, più o meno diversi da quelli delle piante madre e padre. I frutti delle prime tre sono stati più larghi che lunghi, quelli delle altre tre più lunghi che larghi; quelli del n. 5 sono stati i più grandi di tutti, di colore giallastro, a coste, ricordanti nella forma quelli del Cotogno. Ma le mele che hanno superato in bontà e bellezza tutte le altre sono state quelle del n. 6 per la vivacità del colore (giallo e rosso), per la buccia lucida, per il sapore e il profumo. Per ora,

(1) LONGO B., *Ricerche sul Melo « senza fiori »* (*Pyrus apetala Münchh.*). « Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei », ser. 5^a, vol. XXIX, 2^o sem., fasc. 9^o, 7 nov. 1920.

Id., *Su la partenocarpia*, « Rivista di Biologia », vol. II, fasc. VI, novembre-dicembre 1920.

(2) Come si vede le prime sei piante hanno cominciato a portare frutti già nel quarto anno; mi pare quindi esagerata l'affermazione che occorran molti anni per ottenere da seme piante fruttifere.

come ho detto, ho contrassegnato le piante con un semplice numero progressivo; si vedrà poi quali, se non tutte, meritino di essere conservate e moltiplicate per i loro pregi.

Ho già seminato i semi ottenuti da questa prima generazione; a suo tempo riferirò sui risultati che otterrò dalla seconda generazione (tenendo però presente fin d'ora che non si tratta di monoibridi, ma certamente di poliibridi). Mi riservo pure di riferire al riguardo della fioritura e fruttificazione delle altre tre piante che non hanno ancora fiorito.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Ancora sulla geometria delle superficie nello spazio rigato.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

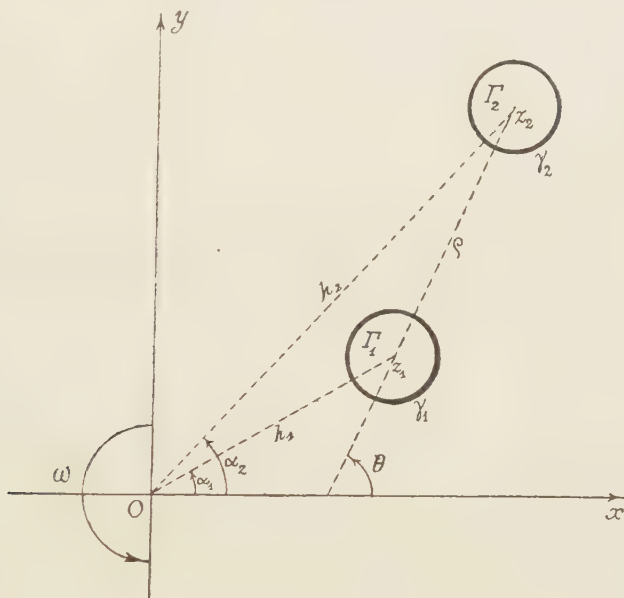
Idromeccanica. — *Rotazione uniforme di una coppia di sottili cilindri rotondi in un liquido perfetto indefinito.* Nota di ARNALDO MASOTTI, presentata⁽¹⁾ dal corrisp. U. CISOTTI.

1. Due cilindri rotondi paralleli, di raggi r_1 e r_2 , ruotano concordi in un liquido perfetto indefinito di densità μ soggetto a forze conservative; i loro assi si mantengono alla distanza p tra loro e alle distanze h_1 e h_2 dall'asse di rotazione, intorno al quale il sistema rota con velocità angolare costante ω . Si ammette che il moto (assoluto) irrotazionale indotto nel liquido si effettui per strati piani normali all'asse di rotazione e su ognuno di questi sia permanente rispetto ad un sistema cartesiano Oxy solidale colle sezioni dei cilindri, Γ_1 e Γ_2 . La determinazione del movimento è un problema di idromeccanica piana in un campo pluriconnesso, che si risolve senza difficoltà in prima approssimazione coll'ipotesi che i rapporti r_1/p e r_2/p si possano considerare come quantità di primo ordine⁽²⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1926.

(2) È di questo criterio di approssimazione che ha fatto uso recentemente il prof. Cisotti per la trattazione di un problema armonico che trova applicazioni interessanti in elettrostatica ed idrodinamica; il problema attuale si connette strettamente con quello ch'è oggetto della sua Nota *Azioni meccaniche di una corrente piana che investe due profili circolari convenientemente distanti tra di loro* (in questi « Rend. », vol. III, ser. 6^a, 1° sem. 1926, pp. 53-60)

Assunto il sistema mobile Oxy come indica la figura, chiamo u e v le componenti della velocità assoluta, φ il potenziale cinetico, ψ la funzione di corrente; è noto che $w = u - iv$ e $f = \varphi + i\psi$ sono funzioni analitiche di $z = x + iy$ legate dalla relazione $w = \frac{df}{dz}$. La w , in virtù del suo significato fisico, dev'essere regolare su tutto il piano fuori di Γ_1 e Γ_2 , ed annullarsi all'infinito (dove il liquido è in quiete); su γ_1 e γ_2 deve rendere soddisfatte le condizioni di continuità che esprimono l'eguaglianza delle componenti, secondo la normale esterna al profilo rigido, della velocità del solido



e del liquido; posto $V_1 = \omega h_1$, $V_2 = \omega h_2$ e dette λ_1 e λ_2 le anomalie dei punti di γ_1 e γ_2 rispetto al proprio centro, le condizioni accennate sono

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_1 \sin(\lambda_1 - \alpha_1), \text{ su } \gamma_1 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_2 \sin(\lambda_2 - \alpha_2), \text{ su } \gamma_2 \quad (1).$$

Mediante w le stesse condizioni si scrivono come segue

$$(2) \quad \begin{cases} \Re \left(w \frac{z - z_1}{r_1} \right) = V_1 \sin(\lambda_1 - \alpha_1), \text{ su } \gamma_1, \\ \Re \left(w \frac{z - z_2}{r_2} \right) = V_2 \sin(\lambda_2 - \alpha_2), \text{ su } \gamma_2, \end{cases}$$

(1) Cfr. la form. (3) della mia Nota *Rotazione uniforme di un solido cilindrico in un liquido perfetto indefinito. Estensione del teorema di Kutta e Joukowski* (in questi «Rend.», vol. III, serie 6^a, 1^o sem., 1926 pp. 233-237).

(dove $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ sono le affisse dei centri di γ_1 e γ_2 , e \Re indica « parte reale » ⁽¹⁾).

2. La funzione

$$(3) \quad w = -\frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{C_1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_1} + \frac{C_2}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_2} \right\} - \left\{ \frac{a_1 + ib_1}{(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_1)^2} + \frac{a_2 + ib_2}{(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_2)^2} \right\}$$

è regolare nel campo del moto e si annulla all'infinito; di più è possibile determinare le costanti a_1, b_1, a_2, b_2 in modo ch'essa soddisfi anche le (2): si trova precisamente ch'esse sono legate alle costanti V_1, V_2, C_1, C_2 dalle relazioni ⁽²⁾

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = r_1^2 \left(-\frac{C_2}{2\pi\rho} \sin \theta + V_1 \sin \alpha_1 \right), & b_1 = r_1^2 \left(-\frac{C_2}{2\pi\rho} \cos \theta - V_1 \cos \alpha_1 \right), \\ a_2 = r_2^2 \left(-\frac{C_1}{2\pi\rho} \sin \theta + V_2 \sin \alpha_2 \right), & b_2 = r_2^2 \left(-\frac{C_1}{2\pi\rho} \cos \theta - V_2 \cos \alpha_2 \right); \end{cases}$$

la (3) è dunque la richiesta velocità complessa e le costanti C_1 e C_2 che vi compaiono hanno il significato di circolazioni intorno a ciascun cilindro.

Dalla (3), che risolve il problema in modo completo, si deduce per integrazione il potenziale complesso:

$$(5) \quad f = -\frac{iC_1}{2\pi} \log(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_1) - \frac{iC_2}{2\pi} \log(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_2) + \frac{a_1 + ib_1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_1} + \frac{a_2 + ib_2}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_2}.$$

(1) Infatti su γ_1 è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \lambda_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \lambda_1 = u \cos \lambda_1 + v \sin \lambda_1 = \Re(we^{i\lambda_1})$$

e poichè $\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_1 = r_1 e^{i\lambda_1}$ si ha subito la prima delle (2); analogamente per la condizione su γ_2 .

(2) Si calcola w , mediante la (3), nei punti di γ_1 e γ_2 , osservando che in virtù del criterio di approssimazione adottato è

$$\begin{aligned} \text{su } \gamma_1: \quad \frac{1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_1} &= \frac{1}{r_1} e^{-i\lambda_1}, & \frac{1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_2} &= -\frac{e^{-i\theta}}{\rho} \left(1 + \frac{r_1}{\rho} e^{i(\lambda_1 - \theta)} \right), \\ \text{su } \gamma_2: \quad \frac{1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_1} &= \frac{e^{-i\theta}}{\rho} \left(1 - \frac{r_2}{\rho} e^{i(\lambda_2 - \theta)} \right), & \frac{1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_2} &= \frac{1}{r_2} e^{-i\lambda_2}; \end{aligned}$$

sostituendo nelle (2) i valori trovati di w (che sono

$$\begin{aligned} w &= -\frac{i}{2\pi r_1} \left(C_1 e^{-i\lambda_1} - \frac{r_1}{\rho} C_2 e^{-i\theta} \right) - \frac{a_1 + ib_1}{r_1^2} e^{-2i\lambda_1}, & \text{su } \gamma_1, \\ w &= -\frac{i}{2\pi r_2} \left(\frac{r_2}{\rho} C_1 e^{-i\theta} + C_2 e^{-i\lambda_2} \right) - \frac{a_2 + ib_2}{r_2^2} e^{-2i\lambda_2}, & \text{su } \gamma_2 \end{aligned}$$

si hanno le (4).

3. Per determinare la portata q scorrente tra i due cilindri si deducono ora dalla (5) i valori della funzione di corrente del moto assoluto ψ sui due profili γ_1 e γ_2 ; mediante la relazione $\psi' = \psi + \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)$ si ottengono i valori della funzione di corrente del moto relativo, che risultano naturalmente costanti sui due profili (che sono linee di flusso nel moto relativo)⁽¹⁾; per differenza si ha la portata richiesta che è:

$$(6) \quad q = \frac{C_1}{2\pi} \log \frac{r_1}{\rho} - \frac{C_2}{2\pi} \log \frac{r_2}{\rho} - \frac{\omega}{2} (b_1^2 + r_1^2 - b_2^2 - r_2^2) - \\ - \frac{V_1 r_1^2}{\rho} \cos(\theta - \alpha_1) - \frac{V_2 r_2^2}{\rho} \cos(\theta - \alpha_2).$$

4. Il calcolo delle azioni dinamiche si farà mediante le formule

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int w^2 dz - i\mu\omega \int w\chi d\bar{z} - i\mu\omega^2 \bar{\chi}_0 S, \\ M = -\frac{\mu}{2} \Re \int w^2 \bar{\chi} d\bar{z}, \end{array} \right.$$

nelle quali R_x, R_y, M sono le componenti della risultante ed il momento risultante (rispetto all'origine e sinistrorso) delle azioni dinamiche che il liquido esercita sull'unità di lunghezza del solido; S è la sezione di questo,

(1) Questi valori sono i seguenti

$$\psi' = -\frac{C_1}{2\pi} \log r_1 - \frac{C_2}{2\pi} \log \rho + \frac{\omega}{2} (b_1^2 + r_1^2) + \frac{V_2 r_2^2}{\rho} \cos(\theta - \alpha_2), \quad \text{su } \gamma_1, \\ \psi'' = -\frac{C_1}{2\pi} \log \rho - \frac{C_2}{2\pi} \log r_2 + \frac{\omega}{2} (b_2^2 + r_2^2) - \frac{V_1 r_1^2}{\rho} \cos(\theta - \alpha_1), \quad \text{su } \gamma_2.$$

Si controlla anche che la velocità relativa nei punti di γ_1 e γ_2 è tangente al profilo, ed ha i valori

$$V_r = \frac{C_1}{2\pi r_1} - \omega r_1 - \frac{C_2}{\pi \rho} \cos(\theta - \lambda_1) - 2 V_1 \cos(\alpha_1 - \lambda_1), \quad \text{su } \gamma_1, \\ V_r = \frac{C_2}{2\pi r_2} - \omega r_2 + \frac{C_1}{\pi \rho} \cos(\theta - \lambda_2) - 2 V_2 \cos(\alpha_2 - \lambda_2), \quad \text{su } \gamma_2.$$

Da queste formule si può dedurre o meno l'esistenza di prora e poppa su ogni profilo, nei vari casi.

ζ_0 è l'affissa del suo baricentro geometrico, s è il suo contorno percorso lasciando S a sinistra ⁽¹⁾. Si ottiene ⁽²⁾:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \text{su } \gamma_1: \quad R_x = \pi\mu\omega^2 h_1 r_1^2 \cos \alpha_1 - \mu V_1 C_1 \cos \alpha_1 - \mu \frac{C_1 C_2}{2\pi\rho} \cos \theta, \\ \quad \quad R_y = \pi\mu\omega^2 h_1 r_1^2 \sin \alpha_1 - \mu V_1 C_1 \sin \alpha_1 - \mu \frac{C_1 C_2}{2\pi\rho} \sin \theta, \\ \quad \quad M = -\mu \frac{C_1 C_2}{2\pi\rho} h_1 \sin (\theta - \alpha_1); \\ \text{su } \gamma_2: \quad R_x = \pi\mu\omega^2 h_2 r_2^2 \cos \alpha_2 - \mu V_2 C_2 \cos \alpha_2 + \mu \frac{C_1 C_2}{2\pi\rho} \cos \theta, \\ \quad \quad R_y = \pi\mu\omega^2 h_2 r_2^2 \sin \alpha_2 - \mu V_2 C_2 \sin \alpha_2 + \mu \frac{C_1 C_2}{2\pi\rho} \sin \theta, \\ \quad \quad M = \mu \frac{C_1 C_2}{2\pi\rho} h_2 \sin (\theta - \alpha_2). \end{array} \right.$$

Questi risultati esprimono che ogni cilindro è soggetto a tre azioni dinamiche distinte applicate al centro della sua sezione: una è la *forza di risucchio*, radiale e centrifuga, di modulo $\pi\mu\omega^2 h_1 r_1^2$ o $\pi\mu\omega^2 h_2 r_2^2$ rispettivamente; una è la *forza sostentatrice*, radiale, di modulo $\mu V_1 |C_1|$ o $\mu V_2 |C_2|$, centripeta o centrifuga a seconda del segno della circolazione, valendo ancora per essa la regola di Kutta e Joukowski; la terza è una *forza di attrazione o repulsione* rispetto all'altro cilindro, di modulo $\mu \frac{|C_1 C_2|}{2\pi\rho}$, che tende ad allontanare o avvicinare i due cilindri a seconda che le due circolazioni sono o no di egual segno.

Quando l'asse di rotazione va all'infinito mentre V_1 e V_2 tendono allo stesso limite finito V , oppure quando uno dei due cilindri si allontana indefinitamente, si ritrovano risultati già noti ⁽³⁾.

(1) V. la mia Nota, *Una estensione delle formule del Blasius* (in questi « Rend. », vol. III, ser. 6^a, 1^o sem., 1926, pp. 472-476); form. (2) e (3).

(2) In questo calcolo, oltre ad ottenere termini che sono visibilmente di ordine superiore al primo in r_1/ρ e r_2/ρ e che si devono trascurare, si ottengono termini in $\omega r_1^2/\rho$ e $\omega r_2^2/\rho$ che sono pure da trascurarsi; infatti essendo $\rho \leq h_1 + h_2$, e quindi $\omega\rho \leq V_1 + V_2$, risulta

$$\omega \frac{r_1^2}{\rho} \leq (V_1 + V_2) \left(\frac{r_1}{\rho} \right)^2, \quad \omega \frac{r_2^2}{\rho} \leq (V_1 + V_2) \left(\frac{r_2}{\rho} \right)^2;$$

poichè V_1 e V_2 sono quantità finite, i termini considerati sono di secondo ordine.

(3) V. le prime due pubblicazioni citate.

Idromeccanica. — *Formole generali per il calcolo dell'effetto di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita.* Nota di E. RAIMONDI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Calcolo approssimativo dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita.* Nota di E. RAIMONDI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Determinazione astronomica di latitudine ed azimut eseguita a Monte Settepani nel 1911.* Nota di UBALDO BARBIERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. GINO LORIA.

Successivamente alla stazione di Capo Noli, i cui risultati formarono oggetto di una Nota di recente pubblicazione in questi « Rendiconti », fu compiuta, nell'agosto-settembre 1911, una seconda stazione sul vertice di 1° ordine di Monte Settepani (1386 m. s. m.) a nord-ovest di Capo Noli, sullo spartiacque alpino fra la Liguria ed il Piemonte.

Il materiale strumentale adoperato, e le modalità dei metodi seguiti, furono gli stessi della stazione precedente; anche qui, non essendo possibile fare stazione sul vertice trigonometrico, a ragione degli spalti circostanti, che ne limitavano l'orizzonte, si costruì un pilastrino ex-centro, in posizione adatta e prossima al segnale.

Misurati gli elementi per la riduzione al centro, essi risultarono i seguenti

$$e = 15^m,710 \quad , \quad \epsilon = 179^{\circ} 55' 04''$$

essendo ϵ l'angolo formato, con la direzione al centro, dalla visuale diretta ad una mira luminosa disposta sull'ex-centro stabilito a Capo Noli, per le osservazioni relative a quella stazione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1926.

DETERMINAZIONE DELLA LATITUDINE.

Le operazioni di latitudine occuparono le sere dei giorni 30, 31 agosto e 2 settembre, il tempo poco stabile non avendo permesso di aggiungere altre osservazioni, a quelle compiute nelle dette sere.

Anche nella stazione di Settepani, si seguì il solito metodo di Sterneek, osservando i passaggi in meridiano di stelle fondamentali, ripartite in sei gruppi di otto stelle ognuno, togliendo, sempre che fu possibile, le posizioni apparenti dal B. A. J. e calcolando le stesse per quelle altre stelle di cui non erano date, nelle effemeridi, che le posizioni medie. Le distanze zenitali si tennero inferiori ai 30°, fatta eccezione per le due stelle

$$\alpha \text{ Ophiuci } \zeta = + 31^{\circ} 37' \quad ; \quad 73 \text{ Draconis } \zeta = - 30^{\circ} 23'.$$

La somma delle distanze zenitali dei varî gruppi, risultò poi la seguente

$$\begin{array}{ll} \text{Gruppo I, } \Sigma \zeta = + 1^{\circ} 42' & \text{Gruppo IV, } \Sigma \zeta = + 4^{\circ} 31' \\ \text{» II, » } = - 2^{\circ} 23' & \text{» V, » } = - 4^{\circ} 29' \\ \text{» III, » } = - 4^{\circ} 41' & \text{» VI, » } = + 1^{\circ} 19' \end{array}$$

Sorvolando sulle modalità seguite nello svolgimento del programma, accenneremo solo al fatto che lo strumento risultò perfettamente in meridiano, avendo utilizzato allo scopo l'azimut della mira a Capo Noli e le relative riduzioni in centro, calcolate preventivamente.

I risultati finali, ottenuti nelle diverse sere di osservazione, seguono nello specchio qui sotto riportato, dove le piccole cifre in parentesi indicano il numero delle stelle osservate in ogni gruppo:

Gruppo	30 agosto	31 agosto	2 settembre	Medie	Numero osservaz.
1°		44° 14' 44".0 (8)	44° 14' 44".6 (7)	44° 14' 44".28	15
2°	44° 14' 42".4 (8)		43 .2 (8)	42 .80	16
3°	43 .9 (8)	44 .6 (8)	44 9 (8)	44 .47	24
4°	41 .7 (8)		43 .3 (8)	42 .50	16
5°	42 .3 (8)	43 .2 (6)	43 .9 (6)	43 .05	20
6°	43 .2 (8)			43 .20	8
Medie	42".70	44".02	43".97	44° 14' 43".46	99

Dalla media ponderata dei valori elencati nella penultima colonna, ai quali si assegnino pesi uguali ai numeri delle osservazioni riportate nell'ultima, si ottiene, come risultato finale

$$\varphi = +4^{\circ} 14' 43''.46 \quad m = \pm 0''.34.$$

Applicando a questo valore la riduzione al centro del segnale

$$\Delta\varphi = + 0''.16$$

risulta in definitiva, per la latitudine di Monte Settepani (centro)

$$\varphi = +4^{\circ} 14' 43''.62 \quad m = \pm 0''.34$$

(Epoca 1911, 67).

DETERMINAZIONE DELL'AZIMUT DELLA DIREZIONE Monte Settepani-Capo Noli.

Le operazioni intese a questo scopo, furono compiute nei giorni 6 e 7 settembre, e cioè dopo quelle di latitudine.

Il segnale, costituito da una mira luminosa, fu disposto sullo stesso pilastro ex-centro di Capo Noli, che già aveva servito per sostegno dell'Universale, nella stazione eseguita in quel vertice trigonometrico.

Le modalità tenute furono le stesse di quelle adottate nella precedente stazione: misura dell'angolo fra la mira e la Polare, secondo la successione MPPM, MPPM metà col cerchio zenitale a sinistra, e metà col cerchio a destra; reiterazioni del circolo azimutale di 45° di ampiezza, ed inversione del cannocchiale sui suoi appoggi, a metà delle osservazioni.

La correzione dell'orologio fu sempre determinata col metodo di Döllén.

Nel quadro qui appresso riportiamo in succinto i risultati, già corretti per l'aberrazione diurna; nelle ultime colonne sono trascritte le collimazioni ottenute per la mira e per la Polare.

Data	Reitera- zione	Azimut	C_m	C_p	$C_m - C_p$
6 settembre . .	0°	108° 02' 51''.9	— 8''.8	— 14''.3	+ 5''.5
		50 .0	— 8 .4	— 14 .6	+ 6 .2
7 » . .	45°	48 .0	— 13 .0	— 21 .4	+ 8 .4
		49 .0	— 13 .3	— 20 .2	+ 6 .9
» . .	90°	49 .9	— 11 .5	— 20 .9	+ 9 .4
		50 .4	— 11 .7	— 21 .3	+ 9 .6
» . .	135°	49 .9	— 11 .0	— 20 .5	+ 9 .5
		50 .3	— 11 .2	— 21 .1	+ 9 .9

La media delle 32 osservazioni qui sopra riportate, dà in definitiva il valore

$$A = 108^{\circ} 02' 49''.93 \pm 0''.39.$$

Riduzione al centro trigonometrico.

Tenuto conto del valore già misurato per l'eccentricità, e dell'angolo ϵ fra la direzione al centro e la mira, e dedotto l'azimut α_0 della direzione SC al centro

$$\alpha_0 = A + \epsilon = 287^{\circ} 57' 54'',$$

ed essendo risultato, quale angolo al Settepani, fra mira e centro a Capo Noli

$$\delta_1 = 1''.43,$$

si ebbe

correzione per il centramento della direzione	$\left(= \frac{e \sin \epsilon}{s \operatorname{arc} 1''} \right)$	= — 0''.25
» per la convergenza dei meridiani fra S e C	$\left(= \frac{e \sin \alpha_0}{N \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg} \varphi \right)$		= — 0''.15
» per la riduzione al centro della mira a Capo Noli			= + 1''.43
			Δ A = + 1''.03

Apportando questa correzione al risultato precedentemente ottenuto ne consegue

Azimut astronomico della direzione Monte Settepani-Capo Noli

$$A = 108^{\circ} 02' 50''.96 \pm 0''.39.$$

Attrazione locale.

Ponendo in relazione i valori astronomici testè dedotti dalle determinazioni di cui è oggetto la presente Nota, coi valori geodetici comunicati dall'Istituto Geografico Militare per la latitudine di Monte Settepani e l'azimut della direzione Capo Noli, si ottiene

Latitudine di Monte Settepani . . .	{	astronomica $\varphi_a = 44^{\circ} 14' 43''.62$ geodetica $\varphi_g = 42''.60$	
		$\varphi_a - \varphi_g =$	+ 1''.02
Azimut della direzione a Capo Noli .	{	astronomico $A_a = 108^{\circ} 02' 50''.96$ geodetico $A_g = 38''.04$	
		$A_a - A_g =$	+ 12''.92

Di qui seguono le due componenti dell'attrazione locale

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g = + 1''.02 \quad \eta = (A_a - A_g) \cotg \varphi_a = + 13''.26;$$

e dalle formole

$$\operatorname{tg} A = \frac{\eta}{\xi} \quad , \quad \theta = \frac{\xi}{\cos A} = \frac{\eta}{\sin A}$$

l'azimut ellissoidico e il valore dell'attrazione locale

$$A = 85^{\circ} 36' 10''.44 \quad ; \quad \theta = 13''.30.$$

Geofisica. — *I risultati delle ricerche fisico-chimiche compiute nelle crociere della R. Nave « Marsigli » nello stretto di Messina.* Nota di M. PICOTTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Della dispersione rotatoria e rifrattiva delle soluzioni acquose dell'acido tartarico destrogiro.* Nota ⁽¹⁾ di MARIA LUGIA PAGLIARULO, presentata dal Socio CANTONE.

Continuando lo studio delle sostanze organiche dotate di potere rotatorio, ho preso in esame alcune soluzioni acquose di acido tartarico ordinario di varia concentrazione, ed, analogamente a quanto avevo già fatto per i due isomeri ottici dell'asparagina ⁽²⁾, ho studiato per ognuna di queste soluzioni la legge di variazione del potere rotatorio α e quella dell'indice di rifrazione n al variare della lunghezza d'onda.

Le esperienze sono state limitate anche qui allo spettro visibile e tutta la parte sperimentale del lavoro è stata eseguita con le stesse modalità riferite nel lavoro suaccennato, adoperando per la ricerca dell'angolo α relativo alle varie radiazioni monocromatiche o quasi (ottenute dalla decomposizione di sorgenti policromatiche con l'aiuto di uno spettroscopio ordinario) un polarimetro di Laurent, in cui è stata soppressa la lamina di quarzo di mezz'onda per la luce del sodio, e per la ricerca di n lo spettrometro.

Non ho trascurato di osservare bene le soluzioni prima di sottoporle alle esperienze, assicurandomi che fossero esenti da muffe od altre alterazioni.

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1926.

(2) M. L. PAGLIARULO, *Sulle leggi di variazione del potere rotatorio, ecc.*, «Nuovo Cimento», anno 1926.

In quanto alle sorgenti luminose mi sono attenuta essenzialmente a quelle stesse adoperate per il primo studio, ma, siccome le nuove soluzioni erano meno limpide di quelle di asparagina, sono stata costretta a portare qualche modificazione; così per es. non ho potuto tener conto della riga 4046 del mercurio nell'estremo violetto, perchè nel polarimetro non avevo una intensità sufficiente; in compenso ho cercato di aggiungere qualche altra sorgente, scegliendo le lunghezze d'onda in modo da avere sulle curve punti ad intervalli non troppo irregolari, cioè tali da individuare gli andamenti dei grafici con sufficiente approssimazione. Questo mi è riuscito naturalmente meglio per la soluzione di minore concentrazione, perchè la maggiore limpidezza di essa dava modo di poter fare determinazioni anche con righe d'intensità non troppo grande.

Le soluzioni adoperate erano rispettivamente di concentrazione gr. 47.659 ‰; gr. 39.037 ‰; gr. 28.286 ‰.

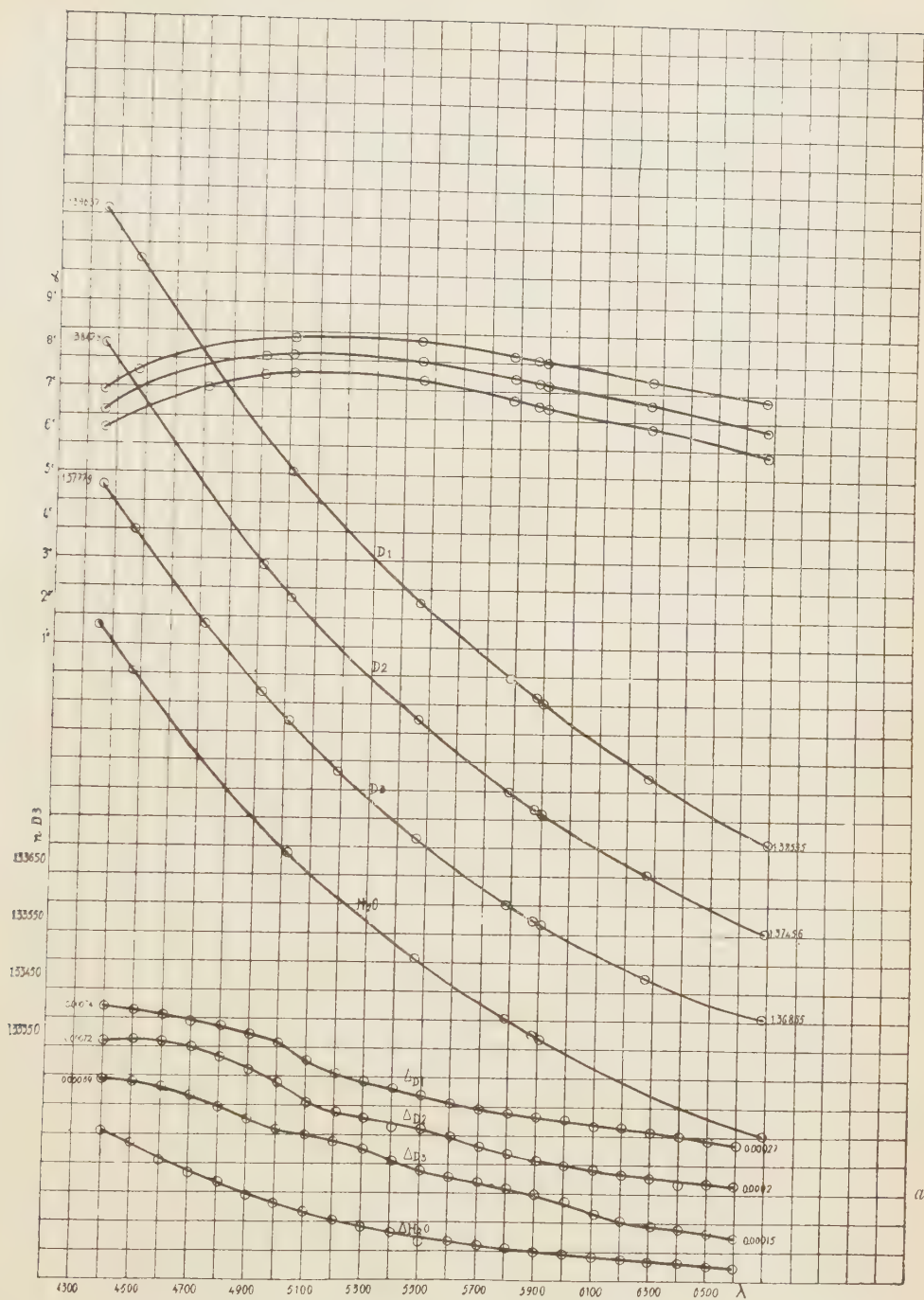
I valori numerici risultati dalla ricerca relativa alla dispersione rotatoria sono raccolti nella Tabella I, riportata in questa pagina.

Ogni α indicato nel quadro risulta dalla media di 15 letture; per le soluzioni di asparagina si fece un numero molto maggiore di letture, ma per l'acido tartarico il lavoro veniva agevolato dal fatto di avere per α valori di un ordine di grandezza parecchio più elevato.

TABELLA I.

λ in U. Å	Concentraz. 47.659 ‰		Concentraz. 39.037 ‰		Concentraz. 28.286 ‰	
	α	$[\alpha]$	α	$[\alpha]$	α	$[\alpha]$
6678	6° 49' 1	7° 1	6° 10' 0	7° 8	5° 34' 5	9° 8
6266	7° 16' 4	7° 6	6° 44' 4	8° 6	6° 12' 0	10° 9
5893	7° 43' 1	8° 1	7° 12' 9	9° 2	6° 39' 3	11° 7
5875	7° 44' 6	8° 1	7° 14' 4	9° 2	6° 42' 8	11° 8
5780	7° 52' 5	8° 2	7° 19' 9	9° 3	6° 52' 1	12° 1
5460	8° 9' 9	8° 5	7° 41' 0	9° 8	7° 16' 5	12° 5
5015	8° 13' 3	8° 6	7° 49' 5	10° 0	7° 25' 0	13° 1
4916	—	—	7° 45' 9	9° 9	7° 19' 7	12° 9
4713	—	—	—	—	7° 3' 7	12° 4
4471	7° 24' 6	7° 7	6° 56' 2	8° 8	6° 25' 7	11° 3
4358	6° 56' 5	7° 2	6° 28' 2	8° 2	6° 1' 5	10° 6

Le curve relative alla Tabella I sono le tre che nella figura si vedono più in alto; esse sono costruite nella stessa scala e riferite alla medesima



a. Invece di 00002, leggesi: 00022.

origine. In queste curve si delinea l'anomalia ben nota della legge di dispersione rotatoria dell'acido tartarico: abbiamo un massimo, che, al diminuire della concentrazione, subisce un piccolo spostamento verso le lunghezze d'onda minori.

Per gl'indici di rifrazione, dalle misure eseguite si è ottenuto il sistema di valori (riportati tutti a 15°) che si leggono nella Tabella II e i grafici che occupano il centro della figura. Questi grafici non sono stati riferiti alla stessa origine, altrimenti si sarebbero avuti troppo discosti l'uno dall'altro, dato che la scala adoperata è molto grande e le differenze fra i valori degli indici sono notevoli, perchè, fra una soluzione e l'altra, si ha variazione di concentrazione non piccola.

Come termine di paragone si è riportata in figura la curva di dispersione dell'acqua.

Le curve che sono disegnate nella regione più bassa della figura sono quelle ottenute dalle curve di dispersione rifrattiva col processo di derivazione analitica suggeritomi dal prof. Cantone, e da me già applicato nel lavoro precedente. I valori numerici in base ai quali si sono costruite le curve derivate (in una scala cinque volte più grande di quella delle curve di dispersione) sono stati ottenuti facendo due serie di calcoli: si son prima calcolate le Δn in corrispondenza ad uguali $\Delta \lambda$, per un ammontare di 100 U. Å, a partire dal valore di 4400 di λ , e si son poi interpolate fra

TABELLA II.

λ in U. Å	Valori di n		
	Concentrazione 47.659 %	Concentrazione 39.037 %	Concentrazione 28.286 %
6678	1.38535	1.37456	1.36856
6266	1.38653	1.37555	1.36927
5893	1.38779	1.37661	1.37016
5875	1.38789	1.37667	1.37020
5780	1.38824	1.37696	1.37052
5460	1.38955	1.37823	1.37164
5183	—	—	1.37284
5015	1.39180	1.38034	1.37368
4916	—	1.38090	1.37421
4713	—	—	1.37539
4471	1.39552	1.38397	1.37700
4358	1.39637	1.38479	1.37779

queste differenze altre analoghe, ottenute nella stessa maniera, ma a partire da un valore di λ spostato rispetto al primo di 50 U. Å. Si è ricorso a questo doppio sistema di valori per avere delineato con maggiore precisione l'andamento generale delle curve.

I risultati numerici del calcolo si omettono per brevità e si osserva che in figura sono segnati solo i cerchietti relativi ad una delle serie. L'origine per ogni curva è stata spostata, per evitare la quasi completa sovrapposizione di esse.

Il fatto interessante, rilevato per la prima volta nel caso delle soluzioni di asparagina, si manifesta anche qui. Mentre le curve di dispersione rifrattiva delle soluzioni studiate appaiono perfettamente normali (si confrontino con quella dell'acqua riportata allo scopo), applicando il processo di derivazione suddetto, si ottiene nelle curve delle derivate un'anomalia, si ha cioè in esse un ripiano e un evidente cambiamento di andamento; e il salto s'inizia anche qui, quasi esattamente in corrispondenza del massimo delle curve di dispersione rotatoria, mentre che nella curva derivata da quella di dispersione delle soluzioni o dell'acqua non c'è nessun cenno di salto e di variazione nell'andamento.

Le tre curve relative alle soluzioni di acido tartarico presentano press'a poco lo stesso andamento generale. Nei rami a destra del salto si osserva qualche variazione fra una curva e l'altra, ma da un esame accurato non risulta niente di sistematico che permetta di fare apprezzamenti quantitativi; quindi si è indotti a ritenere che le variazioni dipendano solo dalle imprecisioni ed incertezze sperimentali.

Un andamento sistematico si nota invece nella forma del salto; esso, infatti, per la soluzione più concentrata è piuttosto rapido, e poi, col diminuire della concentrazione, appare sempre più graduale e la curva va sempre più avvicinandosi nella forma a quella dell'acqua.

Lo studio delle soluzioni acquose di acido tartarico ordinario, fatto in base ai diagrammi costruiti coi dati delle esperienze, ai quali viene poi applicato un processo di derivazione di estrema semplicità, porta dunque a risultati che sono in perfetto accordo con quelli messi in rilievo nello studio precedente, eseguito con lo stesso metodo.

Rendo vivissime grazie al prof. Cantone, per i molti suggerimenti che mi ha gentilmente favoriti durante il corso delle esperienze.

Chimica. — *Analogia di comportamento e isomorfismo fra Cerio e Torio.* Nota di G. SCAGLIARINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. BOERIS.

W. Muthmann ⁽²⁾, R. J. Meyer ⁽³⁾, G. A. Barbieri ⁽⁴⁾ ed altri autori hanno dimostrato l'analogia esistente fra Th e Ce^{IV} in numerosi loro sali.

Il Tammann ⁽⁵⁾ in seguito interpretando i risultati delle analisi termiche del Vogel volle infirmare la posizione del Ce nel sistema periodico fra lo zirconio ed il torio. A parte le esperienze di Moseley e continuatori sul numero atomico che confermano definitivamente la posizione prevista e assegnata dal Mendeleeff al cerio nel sistema periodico, già prima G. A. Barbieri ⁽⁶⁾ brillantemente aveva controbattuto le idee del Tammann dimostrandole infondate poichè il sistema periodico si basa sulle analogie che gli elementi dimostrano nella loro forma limite di combinazione e non già allo stato di elemento.

Analogamente ai sali anche i due ossidi del torio e del Ce^{IV} hanno notevoli somiglianze nel loro comportamento.

L'ossido cerico allo stato di purezza è insolubile nell'acido nitrico anche concentrato; quando invece è impuro per altri ossidi delle terre rare (lantano, preseodimio, neodimio, samario, ittrio, itterbio ecc.) allora diventa solubile anche nell'acido nitrico diluito; ma bisogna che gli ossidi estranei siano presenti in un rapporto superiore al 50 % ⁽⁷⁾. Oltre che dagli ossidi degli elementi trivalenti le proprietà dell'ossido cerico sono fortemente influenzate da altri ossidi del tipo MeO₂ come per es. dal ThO₂.

L'ossido cerico inoltre allo stato puro trattato con acido jodidrico libera un atomo di jodio per ogni atomo di cerio trasformandosi in joduro ceroso. Quando l'ossido cerico sia mescolato con l'ossido di torio dà per trattamento con acido jodidrico una quantità di jodio notevolmente minore del teorico. R. J. Meyer ⁽⁸⁾ che ha osservato questo fenomeno ritiene che una parte dell'ossido cerico si trovi allo *stato passivo* e perciò non reagisca con l'acido jodidrico. Non si può pensare che si trovi allo stato ceroso perchè il peso degli ossidi risultanti dalla calcinazione dei nitrati misti di cerio e

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1926.

(2) «Ber.», 31 (1898) 1829.

(3) R. J. MEYER e R. JACOBI, «Z. An. Ch.», 27, 389 (1901).

(4) Questi «Rendiconti», 1907, I, p. 644; 19 II sem. (1910), p. 642; «Ber.», 43 2214 (1910).

(5) «Z. f. Elektrochemie», 17 (1911), 641.

(6) Questi «Rendiconti», 23 (I sem.), 1914, p. 805.

(7) AUER v. WELSCH, «Monatshefte f. Chemie», 5, 508 (1884),

(8) R. J. MEYER e A. ANSCHÜTZ, «Berichte», 40, 2640 (1907).

di torio è uguale al calcolato e non è minore come sarebbe se il cerio fosse allo stato ceroso. Intorno alla interpretazione da dare a questo fatto, nessuna ipotesi è stata finora ammessa, mentre la solubilità degli ossidi misti delle terre rare (con meno del 50 % di CeO_2) negli acidi diluiti è stata interpretata da Wyrubof e Verneuil⁽¹⁾ come dovuta ad un fenomeno chimico; gli ossidi misti sarebbero in realtà costituiti da ossidi salini, nei quali l'ossido cerico avrebbe funzione acida e gli ossidi degli elementi trivalenti funzione basica. Tale interpretazione venne in massima accettata da molti altri chimici e fra gli altri da R. I. Meyer.

Scopo delle ricerche descritte in questa Nota è quello di sottoporre alla prova sperimentale tale ipotesi cioè di accertare se i cosiddetti ossidi misti delle terre rare costituiscono un composto o non piuttosto una soluzione solida amorfa nella quale l'ossido cerico essendo suddiviso molecularmente in mezzo agli altri ossidi che sono solubili nell'acido nitrico diluito diventi, per l'enorme superficie che così viene a possedere, solubile negli acidi stessi. Le ricerche vennero guidate dalle seguenti considerazioni. Se l'ossido cerico possiede funzione acida esso dovrebbe manifestarla non soltanto cogli ossidi delle terre rare trivalenti che sono basi più deboli dell'ossido di calcio e dell'ossido di magnesio, ma anche colle basi forti. Fondendo per es. gli ossidi misti estratti dalla monazite con potassa caustica, gli ossidi trivalenti, dovrebbero venir spostati dalle loro combinazioni saline. Calcinando dell'ossalato ceroso puro con ossalato di calcio e ossalato di magnesio, l'ossido di cerio dovrebbe entrare in combinazione con CaO o MgO , dando origine ad un ossido salino che dovrebbe contenere il cerio in forma solubile. E a maggior ragione dovrebbe essere solubile negli acidi, l'ossido cerico preparato per ossidazione spontanea dal ceroso ottenuto trattando un sale ceroso anidro con potassa caustica fusa. Siccome lo zirconio precede il cerio nel quarto gruppo e in ogni gruppo col crescere del peso atomico aumentano i caratteri positivi, l'ossido di zirconio deve essere più negativo dell'ossido cerico, e l'ossido di torio, venendo il torio dopo il cerio, deve essere più positivo. Ora se la solubilità dell'ossido cerico quando fa parte degli ossidi misti, dipende dalla funzione acida, la stessa anomalia dovrebbe venir presentata dall'ossido di zirconio, ma non dall'ossido di torio. I risultati delle esperienze furono i seguenti:

1° Gli ossidi misti delle terre rare introdotti nella potassa caustica fusa non subiscono alcuna alterazione;

2° L'ossido cerico ottenuto in presenza di molto ossido di calcio e di magnesio o di potassa caustica è del tutto insolubile nell'acido nitrico;

3° L'ossido di torio in presenza di un grande eccesso di ossido delle terre rare trivalenti (dal 99 al 90 %) è solubile nell'acido nitrico diluito (analogia di comportamento con CeO_2);

(1) « Comptes Rendus », 127, 863 e 128, 501.

4° L'ossido di zirconio anche in presenza di un grandissimo eccesso di ossidi delle terre rare (99 %) è del tutto insolubile nell'acido nitrico.

Questi risultati non stanno in accordo con l'ipotesi che negli ossidi misti delle terre rare l'ossido cerico faccia parte di un ossido salino. Resta quindi verosimile l'altra supposizione che il cerio si trovi negli ossidi delle terre rare allo stato di soluzione solida amorfa e che la sua solubilità negli acidi dipenda dal suo stato di estrema suddivisione, o forse anche la sua solubilità è determinata dal fatto che allo stato di soluzione negli altri ossidi, l'ossido cerico non subisce quel processo di polimerizzazione che lo rende insolubile quando venga calcinato da solo o insieme ad ossidi coi quali non forma miscele omogenee. La medesima cosa può dirsi del ThO_2 di cui fino ad ora non era noto questo suo modo di comportarsi che lo ravvicina così al cerio tetravalente.

Queste analogie esistenti sia fra i sali sia fra gli ossidi potevano spingersi tanto oltre da determinare isomorfismo fra i due elementi.

Già da tempo L'Urbain⁽¹⁾ aveva ottenuto l'acetilacetato di torio incolore della formula $\text{Th}(\text{CH}_3\text{CO}\cdot\text{CH}\cdot\text{CO}\cdot\text{CH}_3)_4$ fondente a 171° . Lo

Job⁽²⁾ riprendendo gli studi di Urbain riuscì a preparare, agendo con eccesso di acetilacetone sull'ossido cerico, l'acetilacetato cerico della formula $\text{Ce}(\text{CH}_3\cdot\text{CO}\cdot\text{CH}\cdot\text{COCH}_3)_4 + 11\text{H}_2\text{O}$ e da questo per essiccamento nel vuoto il sale anidro di color rosso cupo quasi nero fondente a $171^\circ\text{--}172^\circ$ al blocco Maquenne. Era prevedibile che per le ragioni dette dianzi si avesse tra questi due sali isomorfismo, anche perchè i loro cristalli al microscopio si presentano assai simili. Mi parve interessante perciò tentare la preparazione dei cristalli di miscela dei due sali sopra menzionati. Difatti da soluzioni alcooliche dei due acetilacetati si possono avere dei cristalli colorati intensamente in rosso rubino cupo anche quando il sale di Cerio sia nelle proporzioni del 5 % rispetto a quello di Torio. Quantunque la regola di Retgers già dicesse che esisteva isomorfismo fra i due acetilacetati, tuttavia non si poteva stabilire colorimetricamente entro quali limiti si estendesse l'isomorfismo, e cioè, se si formasse fra i due acetilacetati soluzioni solide in tutti i rapporti o meno e ciò perchè l'intensità di colorazione dell'acetilacetato di Cerio è tale che già i cristalli di miscela anche diluiti di sale di Ce^{IV} sono colorati quasi altrettanto di quelli più concentrati.

Dato poi la facile alterabilità dei due sali e principalmente di quello di cerio non si poteva ricorrere all'analisi termica anche perchè sarebbero occorse notevoli quantità di composti e la resa in sale cerico è piccolissima. Si fecero perciò cristalli di miscela a diverse concentrazioni scio-

(1) « Bull. Soc. Chim. », 1896 [3], 15, 347-349.

(2) « Comptes Rendus », 157, 50 (1913).

gliendo i due sali in tetracloruro di carbonio in cui hanno pressochè la stessa solubilità. Alle diverse miscele corrispondono i sottoriportati punti di fusione:

Th(Ac) ₄	98 °	= P. F.	170°	Ce(Ac) ₄	98 °	= P. F.	169°
»	95 »	»	164-165°	»	95 »	»	162-163°
»	75 »	»	159-160°	»	75 »	»	157-158°
»	50 »	»	P. F. 144-145°	»	50 »	»	

Si vede cioè che se si riunissero in un sistema di coordinate cartesiane i diversi punti di fusione di queste miscele alle diverse concentrazioni, si potrebbe descrivere la classica curva di due corpi che fanno soluzione solida pressochè in tutti i rapporti. Esiste cioè un isomorfismo completo tra acetilacetato di Torio e di Cerio il che appunto è in relazione alla loro posizione nel sistema periodico.

PARTE SPERIMENTALE.

Il materiale di partenza che servì per preparare gli ossidi misti delle terre rare era costituito da sabbie monazitiche dell'America Settentrionale (Carolina del Nord). Esse vennero attaccate col solito metodo dell'acido solforico ed i solfati trasformati con acido ossalico in ossalati. Gli ossalati depurati per successive trasformazioni in nitrati e riprecipitazione con acido ossalico furono calcinati in muffola e diedero una polvere omogenea bruno-rossastra solubile tanto nell'acido cloridrico che nell'acido nitrico con colorazione rosso aranciata. Venne dosato di questa miscela l'ossigeno attivo per via iodometrica: grammi 0.3122 di sostanza trattati con acido cloridrico e joduro potassico liberarono gr. 0.0993 di jodio. Esprimendo l'ossigeno attivo in ossido cerico si calcola da questo risultato un contenuto in CeO₂ del 42.2 %. In realtà l'ossigeno attivo non è dovuto soltanto al CeO₂ ma anche a piccole quantità dell'ossido superiore di praseodimio cui è dovuto il color bruno della miscela.

Gli ossidi misti vennero levigati e sospesi in molta acqua in un recipiente cilindrico munito di rubinetti laterali a diverse altezze; venne dosato l'ossigeno attivo in un campione delle porzioni più leggere e delle porzioni più pesanti. Nel primo caso gr. 0.2246 diedero gr. 0.0694 di jodio da cui si calcola CeO₂ % 41.92; nel secondo caso gr. 0.1525 diedero gr. 0.0473 di jodio da cui si calcola CeO₂ % 42.08. La differenza tra i due dosamenti è troppo piccola per concludere che la miscela sia eterogenea. In un crogiuolo d'argento vennero fusi gr. 20 di potassa caustica e vi si introdusse a poco a poco gr. 5 degli ossidi misti; dopo raffreddamento la potassa venne sciolta in acqua e gli ossidi vennero separati per filtrazione. Non avevano modificato il loro aspetto ed erano rimasti solubili nell'acido nitrico come prima.

Esperienza con l'ossido cerico calcinato con ossido di calcio.

Ad una soluzione contenente gr. 1 di ossido cerico allo stato di nitrato ceroso, e gr. 9 di ossido di calcio pure allo stato di nitrato si aggiunse un eccesso di ossalato ammonico e la miscela degli ossalati separati alla pompa e seccati venne calcinata alla soffieria a lungo; una porzione degli ossidi ottenuti trattata con acido nitrico al 10 % non si sciolse completamente. Nella parte sciolta si ricercò il cerio con cloruro d'ammonio, ammoniaca e acqua ossigenata e sempre con risultato negativo. Dunque la presenza dell'ossido di calcio non favorisce come gli ossidi delle terre rare la solubilità dell'ossido cerico negli acidi. Temendo che il riscaldamento non fosse stato sufficiente per far reagire l'ossido cerico con l'ossido di calcio una porzione venne sottoposta all'azione della fiamma ossidrica; si ebbe lo stesso risultato.

Esperienza con ossido cerico calcinato con idrato potassico.

Dall'ossalato di cerio puro per trattamento con acido solforico concentrato e riscaldamento fino a cessazione dei fumi si preparò il solfato ceroso anidro: $Ce_2(SO_4)_3$, questo venne introdotto in piccole porzioni in potassa caustica fusa in un grande crogiuolo di argento. La reazione è vivissima e si ha sviluppo di idrogeno che si infiamma. La massa raffreddata e sciolta in acqua abbandonò dell'ossido cerico giallognolo insolubile nell'acido nitrico concentrato.

Solubilità dell'ossido di Torio e dell'ossido di Zirconio nell'acido nitrico in presenza degli ossidi degli elementi trivalenti delle terre rare.

La soluzione ottenuta sciogliendo gli ossalati misti delle terre rare con acido nitrico concentrato (che distrugge in presenza di cerio quantitativamente e rapidamente l'acido ossalico) venne neutralizzata con soda poi trattata con permanganato potassico col metodo di Drossbach e seguendo le indicazioni di R. J. Meyer. Il permanganato ossida il cerio che in ambiente lievemente alcalino precipita come idrato cerico assieme a $Mn(OH)_4$. Mantenendo il liquido sempre lievemente alcalino tutto il cerio viene eliminato assieme alle piccole quantità di torio presente. L'idrato cerico precipitato venne trasformato in nitrato cerico ammonico, col metodo di Plancher-Barbieri e servì, convenientemente purificato, nelle esperienze descritte precedentemente. Dall'acqua madre, resa debolmente acida per acido nitrico, con acido ossalico vennero precipitati gli ossalati delle terre rare esenti di cerio e di torio. Questi ossalati vennero calcinati alla soffieria. La decomposizione degli ossalati in assenza di cerio riesce molto meno facile che non quando il cerio è presente. Negli ossidi così ottenuti si ricercò il cerio con la reazione dell'acqua ossigenata in presenza di acetato

sodico operando sulla soluzione neutra dei nitrati. La ricerca diede risultato negativo. Il sale di Torio che si impiegò per preparare le miscele cogli ossidi delle terre rare esenti di cerio era purissimo. Non conteneva nè tracce di cerio (reazione dell'acqua ossigenata) nè delle altre terre rare (l'ossido era perfettamente bianco).

Preparazione di miscele di ossidi delle terre rare senza cerio e ossido di torio.

Miscela coll'1 % di ThO_2 - A 1 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondente a gr. 0.00545 di ThO_2 si aggiunsero gr. 0.5395 di ossidi delle terre rare esenti da cerio sciolti in acido nitrico ($0.00545 \times 99 = 0.5395$). La soluzione resa lievemente alcalina con ammoniaca viene precipitata con acido ossalico. Il precipitato venne filtrato e calcinato. Gr. 0.2 della miscela degli ossidi si sciolgono a freddo in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela col 2 % di ThO_2 - A 2 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondenti a gr. 0.0109 di ThO_2 si aggiunsero gr. 0.5341 ($0.00545 \times 98 = 0.5341$) di ossidi di terre rare esenti di cerio sciolti in acido nitrico. Precipitati e calcinati come all'analisi precedente, gr. 0.2 si sciolgono in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela con il 3 % di ThO_2 - A 3 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondente a gr. 0.01635 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.5286 ($0.00545 \times 97 = 0.5286$). Precipitati e calcinati come all'analisi precedente, gr. 0.2 si sciolgono in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela con il 4 % di ThO_2 - A 4 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondente a gr. 0.0218 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.5232 ($0.00545 \times 96 = 0.5232$). Precipitati e calcinati come all'analisi precedente gr. 0.2 si sciolgono in 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela col 5 % di ThO_2 - A 5 cc. di nitrato di torio corrispondente a gr. 0.02725 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.5177 ($0.00545 \times 95 = 0.5177$). Precipitati e calcinati come all'analisi precedente gr. 0.2 si sciolgono in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela con il 6 % di ThO_2 - A 6 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondenti a gr. 0.0327 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.5123 ($0.00545 \times 94 = 0.5123$). Precipitati e calcinati come all'analisi precedente, gr. 0.2 si sciolgono in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela con il 7 % di ThO_2 - A 7 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondenti a gr. 0.03815 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.5068 ($0.0545 \times 93 = 0.5068$). Precipitati calcinati come all'analisi precedente, gr. 0.2 si sciolgono in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela con l'8 % di ThO_2 - A 8 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondenti a gr. 0.0436 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.5014 ($0.00545 \times 93 = 0.5014$). Precipitati e calcinati come all'analisi precedente, gr. 0.2 si sciolgono in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1:3).

Miscela con il 9 % di ThO_2 - A 9 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondenti a 0.04905 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.4959 ($0.00545 \times 91 = 0.4959$). Precipitati e calcinati come all'analisi precedente, gr. 0.2 si sciolgono in circa 3 cc. di acido nitrico diluito (1 : 3).

Miscela con il 10 % di ThO_2 - A 10 cc. di soluzione di nitrato di torio corrispondenti a gr. 0.0545 di ThO_2 se ne aggiunsero gr. 0.4905 ($0.00545 \times 90 = 0.4905$). Gr. 0.2 non si sciolgono completamente nemmeno in 10 cc. di acido nitrico diluito (1 : 3).

Nella parte sciolta vi è presente torio e lo si dimostra mediante la reazione dell'acqua ossigenata in ambiente debolmente acido.

È da notarsi che mentre gli ossidi misti delle terre rare senza cerio e torio sono color bruno cannella, gli ossidi col torio sono colorati un poco più intensamente, e la miscela con il 10 % di ThO_2 è colorata in rosso bruno.

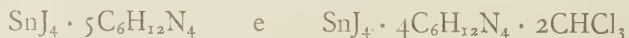
Preparazioni di miscele di ossidi delle terre rare senza cerio e torio e contenenti ossido di zirconio.

Miscela con il 3 % di ZrO_2 - A 10 cc. di nitrato di Zirconio corrispondenti a gr. 0.01825 di ZrO_2 si aggiunsero gr. 1.7702 ($0.01825 \times 97 = 1.7702$) di ossidi delle terre rare sciolti in acido nitrico. Con ammoniaca si precipitarono gli idrati che calcinati diedero gli ossidi.

Questa miscela non si scioglie in acido nitrico concentrato e caldo. Venne anche preparata la miscela contenente soltanto 1 % di ZrO_2 ma anche questa è insolubile in acido nitrico concentrato, e caldo.

Chimica. — *Composti di addizione fra alogenuri dello stagno e del titanio e basi organiche*⁽¹⁾. Nota II di G. SCAGLIARINI e M. MONTI, presentata⁽²⁾ dal Corresp. MARIO G. LEVI.

In un lavoro precedente uno di noi⁽³⁾ ha descritto dei complessi fra ioduro stannico ed esametilentetrammina ottenuti da soluzioni cloroformiche ai quali spettano rispettivamente le formole:



Il dinamismo degli joni e delle molecole presenti in un sistema, secondo l'odierno modo di vedere, dipende dalle attività delle molecole e degli joni stessi. Ora queste attività sono il prodotto della concentrazione per i

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1926.

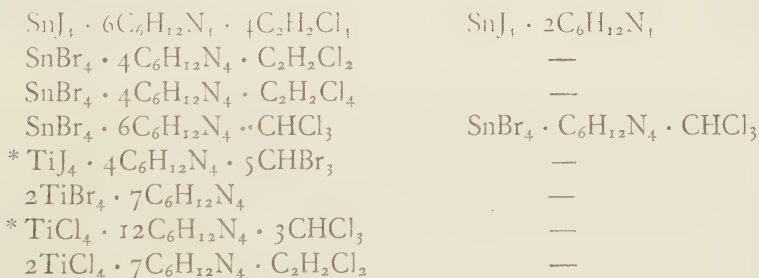
(3) Questi « Rendiconti », serie VI, vol. I, p. 582 (1925).

rispettivi coefficienti di attività, i quali, come funzione dell'energia intermolecolare delle varie particelle (ioni e molecole), dipendono dalle forze che fra queste si esercitano nella soluzione. Tali forze come hanno brillantemente dimostrato i recenti lavori di Debye e di Huckel⁽¹⁾, devono riguardarsi come forze elettrostatiche. Quindi le attività dei componenti del sistema reagente dipenderanno dai potenziali elettrici delle particelle stesse e cioè dalla loro carica, dai loro momenti elettrici e dalla *costante dielettrica* del mezzo. In conseguenza di ciò si poteva facilmente prevedere che variando opportunamente la qualità del solvente e per conseguenza la costante dielettrica del mezzo, doveva necessariamente variare l'insieme delle azioni intermolecolari a cui le dette attività sono legate e doveva aversi come conseguenza tangibile di tale fatto la formazione di sistemi finali (complessi) differenti.

Che ciò dovesse avvenire, già stavano a confermarlo i complessi, descritti in un lavoro successivo a quello sopracitato, ottenuti da uno di noi con E. Brasi⁽²⁾. Difatti sempre collo joduro stannico ed esametilentetrammina ma in soluzione bromoformica anzichè cloroformica si erano ottenuti i seguenti composti:



che sono differenti dai precedenti pei rapporti fra solvente alogenato e base organica. Sperimentando ora con altri solventi (tetracloruro di etano, dicloroetilene, bromoformio) ma cogli stessi alogenuri e le stesse basi organiche, si ottengono quasi sempre complessi differenti come lo stanno a provare i sotto elencati composti da noi preparati e pei quali, come già per altri precedentemente descritti (l. c.), la teoria werneriana non offre una soddisfacente interpretazione.



Si sono scelti di proposito solventi a bassa costante dielettrica che si dimostrarono i più favorevoli alla formazione di complessi elevati come già,

(1) « Physikalische Zeitschrift », 26, p. 96 (1925).

(2) Questi « Rendiconti », serie VI, vol. II, p. 269 (1925).

(*) I composti segnati con asterisco sono già stati preparati e descritti in una Nota precedente; questi « Rendiconti », serie VI, vol. II, p. 269 (1925).

in una Nota precedente, era stato da uno di noi messo in evidenza e come anche L. Cambi aveva in altro caso fatto rilevare (1).

Per questi nuovi composti si verifica ancora il fatto già notato in una precedente Nota (l. c.) che cioè, per lo stesso solvente, variando la concentrazione o dell'alogenuro o della base organica, si possono ottenere complessi differenti, e di questi in generale sono più colorati quelli nei quali predomina l'alogenuro o il solvente alogenato sulla base organica, e ciò sta pure in buon accordo con le vedute di Debye e Huckel (l. c.).

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione del composto d'addizione:

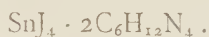


Ad una soluzione concentrata di joduro stannico in tetracloruro di etano se ne aggiunge un'altra satura a freddo di esametilentetrammina pure in tetracloruro di etano. Si ottiene dapprima un precipitato rosso che per aggiunta di un eccesso della soluzione della base passa a bianco. Il precipitato esaminato al microscopio appare formato da piccoli cristalli aghiformi. Spremuta alla pompa e lavato con tetracloruro di etano viene seccato fra carta di filtro:

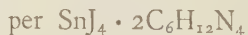


	Sn	Cl	N	C
Calcolato %	6.02	21.60	17.07	25.58
Trovato »	6.29	21.00	16.91	26.32

Preparazione del composto d'addizione:



Ad una soluzione di esametilentetrammina in tetracloruro di etano se ne aggiunge una satura ed in eccesso di joduro stannico nello stesso solvente finchè non si formi più precipitato. Deve sempre rimanere in soluzione un eccesso di joduro stannico. Il precipitato microcristallino di color rosso spremuto alla pompa si secca fra carta da filtro:



	Sn	J	N	C
Calcolato %	13.09	56.00	12.36	15.88
Trovato »	12.50	56.40	12.77	15.46

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 39, I, p. 361 (1909).

Preparazione del composto d'addizione:



Ad una soluzione satura a freddo di esametilentetrammina in dicloroetilene ed in eccesso si aggiunge una soluzione di tetrabromuro di stagno pure in dicloroetilene ma diluita e in difetto. Si ottiene un precipitato bianco che al microscopio appare formato di cristalli aghiformi. Il precipitato spremuto alla pompa e lavato con dicloroetilene viene seccato fra carta da filtro:



	Sn	N	C
Calcolato %	10.84	20.47	28.50
Trovato »	11.05	20.92	28.92

Preparazione del composto d'addizione:



Si prepara versando goccia a goccia una soluzione diluita di bromuro stannico in tetracloruro di etano, in una soluzione satura a freddo di esametilentetrammina in tetracloruro di etano e in eccesso rispetto alla prima. Si ottiene un precipitato microcristallino di colore bianco che filtrato alla pompa e lavato con tetracloruro di etano si secca fra carta da filtro. Bisogna evitare l'eccesso di tetrabromuro di stagno altrimenti si ottiene un composto giallo mal definito:



	Sn	N	C	H
Calcolato %	10.17	19.21	26.74	4.31
Trovato »	10.21	20.31	26.89	5.00

Preparazione del composto d'addizione:



Si prepara versando una soluzione molto diluita di tetrabromuro di stagno in cloroformio, in una soluzione satura a freddo di esametilentetrammina in cloroformio e in eccesso rispetto alla prima. Il precipitato microcristallino di color bianco filtrato alla pompa e lavato più volte con cloroformio, venne lasciato asciugare fra carta da filtro. La soluzione di bromuro stannico deve essere versata a poco a poco giacchè eccedendo si ottiene un composto giallo.



	Sn	N	C	H
Calcolato %	8.49	24.04	31.76	5.26
Trovato »	8.55	23.10	31.48	6.00

Preparazione del composto d'addizione:



Si prepara versando una soluzione diluita di esametilentetrammina in cloroformio in una soluzione concentrata e fredda di tetrabromuro in cloroformio. Si ottiene un precipitato costituito da piccoli cristalli giallo-citrini che filtrati alla pompa e lavati più volte con cloroformio vennero seccati fra carta da filtro:

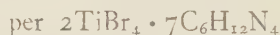


	S	N	C
Calcolato %	17.01	8.02	12.05
Trovato »	17.37	9.00	11.76

Preparazione del composto d'addizione:



Ad una soluzione satura a freddo di esametilentetrammina in dicloroetilene ed in eccesso, si aggiunge una soluzione diluitissima di bromuro di titanio pure in dicloroetilene e in difetto. Si ottiene un precipitato che al microscopio appare formato da piccolissimi cristalli aghiformi. Il precipitato spremuto alla pompa e lavato con dicloroetilene viene seccato fra carta da filtro:



	Ti	Br	N	C	H
Calcolato %	5.60	37.26	22.85	29.37	4.93
Trovato »	6.00	36.60	22.92	31.00	5.71

Preparazione del composto d'addizione:



Ad una soluzione concentrata di esametilentetrammina in dicloroetilene ed in eccesso, si aggiunge a poco a poco una soluzione diluitissima di cloruro di titanio pure in dicloroetilene e in difetto. Si ottiene un precipitato bianco microcristallino che filtrato alla pompa e lavato più volte con dicloroetilene si lascia asciugare fra carta da filtro:



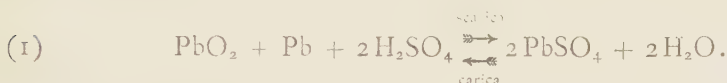
	Ti	Cl	N	C
Calcolato %	6.59	24.32	26.90	36.21
Trovato »	7.18	23.80	27.26	36.37

Elettrochimica. — *Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo.* Nota di LUIGI MAZZA presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. L. ROLLA⁽²⁾.

1. Le reazioni chimiche che si svolgono nell'accumulatore a piombo durante il processo di carica e di scarica non si possono considerare come perfettamente spiegate.

Delle varie teorie fino ad oggi proposte sono in maggior numero quelle che tendono a dimostrare che alcune delle sostanze (PbO_2 , PbSO_4) che si formano sugli elettrodi sono dovute a reazioni secondarie e fanno quindi dell'accumulatore a piombo un elemento irreversibile⁽³⁾.

La teoria chimica di Gladstone e Tribe⁽⁴⁾ conosciuta più comunemente sotto il nome di teoria della doppia solfatazione ammette che durante il funzionamento dell'accumulatore abbia luogo la reazione chimica reversibile



Questa teoria ha avuto molte verifiche sperimentali specialmente per opera di Streintz⁽⁵⁾, Ayrton⁽⁶⁾, Mugdan⁽⁷⁾ e Dolezalek⁽⁸⁾ che hanno confermato il buon accordo della equazione (1) con i fenomeni chimico-fisici che si manifestano durante la carica e la scarica dell'accumulatore.

In conseguenza la teoria di Gladstone e Tribe è generalmente considerata come la più soddisfacente.

A questa teoria sono state fatte alcune obiezioni dal punto di vista chimico. Molti autori hanno sostenuto che durante il processo di carica si formi sulla piastra positiva del biossido idrato (PbO_3H_2) e non del biossido (PbO_2)⁽⁹⁾. Inoltre specialmente per opera di Frankland⁽¹⁰⁾ è stata ammessa

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1926.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica-fisica della R. Università di Firenze.

(3) G. PLANTÉ, « Compt. Rend. », 50, 1860, pp. 640-642; *Recherches sur l'électricité*, Paris, 1883; DARRIEUS, « Lum. électr. », 44, 1892, p. 513; ELBS, « Zeitschr. f. Elektrochem. », 3, 1896, p. 70.

(4) « Elektrotech. Zeitschr. », 1882, p. 332.

(5) « Wied. Ann. » 38, 1889, pp. 344-46; 1892, p. 449.

(6) « Elektrotech. Zeitschr. », 1891, p. 66.

(7) « Zeitschr. f. Elektrochem. », 6, 1899, pp. 309, 320.

(8) *Die Theorie des Bleiakкумуляtors*, Halle, 1901.

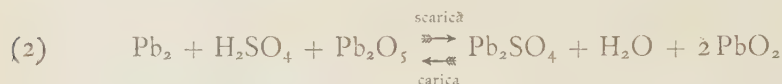
(9) Questa ipotesi è stata combattuta con misure di forze elettromotrici da STREINTZ (loc. cit.) e da AYRTON (loc. cit.) con ricerche analitiche.

(10) « Proc. Roy. Soc. », 46, pp. 304-308; « Journ. Chem. Soc. », 58, 1890, p. 842.

la formazione durante il periodo di scarica di composti come $Pb_5S_3O_{14}$ e $Pb_3S_2O_{10}$ tanto sull'elettrodo positivo che su quello negativo⁽¹⁾. Un punto sul quale i varii autori sono quasi generalmente d'accordo è quello della formazione di piombo spugnoso sulla piastra negativa durante la carica. Wade⁽²⁾ e Rosset⁽³⁾ pensano invece che i composti che si formano per elettrolisi, tanto sull'elettrodo positivo che su quello negativo dell'accumulatore, siano degli isomeri delle stesse sostanze ottenute per via chimica e che il piombo si trovi in uno stato allotropico.

Recentemente Féry⁽⁴⁾ ha sviluppato una teoria nuova con la quale pretende di spiegare il funzionamento dell'accumulatore a piombo in un modo più chiaro in confronto alle altre teorie e soprattutto a quella della doppia solfatazione ritenuta generalmente come la più accettabile.

Secondo questa teoria le reazioni complessive si possono scrivere con l'equazione reversibile



che secondo Féry sarebbe in accordo con i risultati delle analisi chimiche delle sostanze attive delle piastre. In un lavoro successivo Féry e Chêneveau⁽⁵⁾ credono di poter dimostrare, con misure mal condotte⁽⁶⁾ di variazioni di peso delle piastre durante la carica e la scarica, che la teoria della doppia solfatazione debba essere definitivamente scartata mentre l'equazione (2) deve essere completata da alcune reazioni secondarie che si svolgono durante la scarica.

2. In questo lavoro io mi propongo di indagare quali sono le sostanze chimiche che si formano durante la carica e la scarica sugli elettrodi dell'accumulatore a piombo utilizzando il metodo delle polveri cristalline di Debye-Hull.

L'analisi chimica delle sostanze che si originano sulle piastre dell'accumulatore presenta delle notevoli difficoltà ed ha dato generalmente risultati contradditori, soprattutto nei casi come questo in cui possa supporre l'esistenza

(1) Questi risultati sono in disaccordo con le ricerche di J. H. GLADSTONE e W. HIBBERT, «Phil. Mag.» (5), 31, pp. 42, 44 e di G. ROBERTSON, «Proc. Roy. Soc.», 50, pp. 105, 108, «Journ. Chem. Soc.», 64, 1893, p. 3.

(2) «Journ. of. Proc. of the Inst. of Electrical Engineers», XXIX, 1910.

(3) «Centralblatt f. Akkumulatoren-Technik», 1905, pp. 75-80.

(4) «Bull. Soc. Chim. France», 25, 1919, p. 223.

(5) «Compt. Rend.», 181, 1925, pp. 606, 608.

(6) Gli autori hanno opportunamente evitato le cause di errore dipendenti dalle variazioni di spinta da parte della soluzione di acido solforico, che si diluisce durante la scarica, ma hanno trascurato di considerare le variazioni di volume (e quindi di spinta) delle piastre, che si verificano in conseguenza delle trasformazioni chimiche su di esse durante il funzionamento.

di una mescolanza di più composti chimici. Inoltre le determinazioni di variazioni di peso delle piastre conducono parimente ad incertezze. Le altre ricerche chimico-fisiche quali la misura delle forze elettromotrici di vari composti del piombo in H_2SO_4 ⁽¹⁾, la determinazione della forza elettromotrice dal calore di reazione ⁽²⁾, la verifica delle reazioni chimiche con metodo indiretto basato sulla determinazione della variazione di densità dell'acido solforico in funzione della quantità di elettricità che attraversa l'elemento durante la carica e la scarica ⁽³⁾, o presentano delle notevoli difficoltà (ed è il caso delle prime due) oppure non sono molto probative. La possibilità di individuare, col metodo delle particelle irregolarmente orientate, dei composti chimici, sia separatamente sia in miscela, dipende da alcune condizioni. Nel caso attuale di un metallo pesante e di alcuni suoi composti occorre:

- 1° Che la sostanza non si modifichi sotto l'azione dei raggi X.
- 2° Che la sostanza non sia amorfa oppure non si trovi in uno stato di grande dispersione.
- 3° Le densità apparenti dei componenti della miscela non siano molto differenti.
- 4° Si possa determinare la presenza di una quantità sufficientemente piccola di uno dei componenti della miscela.

Ciò posto è possibile stabilire per confronto la posizione delle righe del fotogramma del campione in esame per rapporto a fotogrammi di determinate sostanze che si vogliono ricercare e dedurre così la loro presenza.

3. Ho studiato col metodo di Debye alcuni campioni di biossido di piombo (PbO_2), solfato di piombo e piombo metallico e numerosi campioni di sostanze opportunamente prelevate da piastre positive e negative di accumulatori a piombo.

Alcune indagini preliminari mi hanno permesso di stabilire che l'applicazione del metodo di Debye-Hull si presenta come molto adatto per tale ricerca.

Le sostanze in studio, sottoposte a radiazioni di tubi con anticatodi di rame e di ferro eccitati con tensioni rispettivamente di 65 e 60 KV max., anche con esposizioni assai lunghe, non hanno in nessun caso mostrato delle modificazioni apprezzabili delle loro proprietà e caratteri distintivi (proprietà elettrochimiche, densità, colore, ecc.).

Tutti i prodotti risultano costituiti da polveri, talune molto suddivise, i cui granuli appaiono ben cristallizzati come si può facilmente stabilire dalle linee dei fotogrammi, che sono assai fini e presentano dei massimi assai marcati. In qualche caso le fotografie mostrano delle punteggiature,

(1) STREINTZ, loc. cit.

(2) STREINTZ, « Wied. Ann. », 53, 1894, p. 698; TSCHELTZOW, « Compt. Rend. », 100, 1885, p. 1458.

(3) W. KOHLRAUSCH e C. HEIM, « Elektrotech. Zeitschr. », 1889, p. 327.

segno evidente di particelle cristalline assai sviluppate. Il numero assai grande di linee che appaiono sulle fotografie in dipendenza sia del basso grado di simmetria (PbSO_4 , PbO_2), sia delle dimensioni delle celle elementari, rende più difficile e laboriosa questa analisi con raggi X.

Ciononostante è possibile, quando in special modo si tien conto della posizione di talune righe più intense, determinare la presenza, in un miscuglio binario di PbO_2 e PbSO_4 , di quantità relativamente piccole di uno dei componenti. In linea generale si può affermare che usando radiazioni di grande lunghezza d'onda (anticatodi di ferro e di rame) e con esposizioni assai lunghe (15, mA 5 h.) si può svelare la presenza di una quantità di circa il 5 % di uno dei componenti.

4. Le sostanze esaminate si possono così raggruppare:

1° Piombo in polvere e massiccio, solfato di piombo e biossido di piombo puri.

2° Mescolanze in varii rapporti dei prodotti sopra indicati (1°).

3° Sostanze prelevate dagli elettrodi positivi e negativi di accumulatori carichi, parzialmente scarichi e scarichi.

Cristallografia. — *Studio cristallografico di alcuni nitroderivati aromatici.* Nota ⁽¹⁾ di G. RESEGOTTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio C. F. PARONA.

Le sostanze di cui è oggetto la presente Nota vennero preparate e cortesemente inviatemi in esame dal prof. M. Giua che vivamente ringrazio. Trattandosi di sostanze nuove credetti utile eseguirne lo studio cristallografico ed illustrarne brevemente i risultati ottenuti.

I.

5. metil. 2,6 dinitro metilidrazobenzene ⁽³⁾ $\text{C}_{14}\text{H}_{14}\text{O}_4\text{N}_4$.

P. f. 147° C.

Ottenuto trattando il trinitrotoluene β disciolto in alcool metilico assoluto con metilfenilidrazina as.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1926.

(3) M. GIUA, *Ricerche sopra i nitroderivati aromatici*. XII. *Azione della metilfenilidrazina as. sopra i trinitrotolueni β e γ* . «Gazz. chim. ital.», anno L, parte II, Roma 1920, p. 328.

Sistema monoclinico, classe prismatica:

$$a : b : c = 1,27507 : 1 : 1,37644$$

$$\beta = 93^{\circ} 30' 30''.$$

Forme osservate {110}, {001}, {011}, {012}, {111}, {111}.

I cristalli aranciati da me ottenuti per ripetute cristallizzazioni da alcool assoluto o da miscuglio di etere acetico ed alcool, leggermente allungati secondo l'asse x , hanno abito bipiramidale pseudorombico per lo sviluppo eguale dei due prismi {111} {111}. Le altre forme sono pure sempre presenti salvo la {012} che osservai su un solo individuo. La fig. 1 rappresenta la combinazione più completa.

Sfaldatura facile e perfetta secondo {001}.

La sostanza è pseudorombica ma i caratteri ottici sono invece nettamente in accordo con la simmetria del sistema monoclinico.

Pleocroismo notevole dal giallo albicocca al rosso ranciato.

La bisettrice acuta positiva⁽¹⁾ forma un angolo di 28° circa con l'asse z dalla parte di x positivo. Il piano degli assi ottici è normale al piano di simmetria.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	Numero	Limiti delle osservazioni	Medie	
001 • 111	9	58° 34' — 58° 50'	58° 42'	58° 36'
001 • 111	11	61° 40' — 61° 59'	61° 50'	61° 51'
001 • 011	9	53° 46' — 54° 8'	53° 58'	53° 57'
001 • 012	2	33° 36' — 34° 42'	34° 19'	34° 19'
001 • 110	12	87° 20' — 88° 10'	87° 50'	—
001 • 110	12	91° 38' — 92° 50'	92° 12'	92° 10'
011 • 011	7	72° 1' — 72° 12'	72° 6'	—
011 • 111	12	32° 23' — 33° 20'	32° 54'	33° 1'
011 • 111	13	31° 40' — 32° 25'	31° 57'	31° 50'
012 • 011	2	19° 17' — 19° 39'	19° 38'	19° 28'
110 • 110	7	103° 31' — 103° 46'	103° 41'	—
111 • 111	14	64° 24' — 65° 15'	64° 54'	64° 51'
111 • 111	4	84° 12' — 84° 41'	84° 25'	84° 23'
111 • 111	4	87° 50' — 88° 4'	87° 56'	87° 56'
111 • 111	16	59° — 59° 45'	59° 26'	59° 33'
111 • 110	14	28° 41' — 29° 38'	29° 10'	29° 15'
111 • 110	12	30° — 30° 45'	30° 18'	30° 18'

$$P. \text{ sp. } ^{(2)} = 1,415 \quad P. M. = 302,14 \quad N. = 213,52$$

$$Z = 6,3220 \quad \psi = 1,9582 \quad \omega = 6,8246$$

(1) L'esame a luce convergente per tutte le sostanze venne eseguito per mezzo dell'apparato di Klein.

(2) I pesi specifici vennero determinati colla soluzione del Thoulet e mediante la bilancia di Westphal alla temperatura media di 16° C.

II.

5. metil 2-4 dinitro metilidrazobenzene ⁽¹⁾ $C_{14}H_{14}O_4N_4$.

P. f. $141^{\circ}C$.

Ottenuto trattando il trinitrotoluene γ disciolto in alcool metilico assoluto con fenilidrazina as.

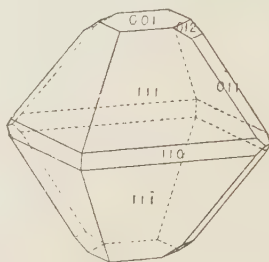


Fig. 1.

Sistema monoclinico, classe prismatica.

$$a : b : c = 0,81915 : 1 : 0,96209$$

$$\beta = 93^{\circ} 37'.$$

Forme osservate $\{100\}$, $\{110\}$, $\{001\}$, $\{011\}$, $\{021\}$, $\{101\}$.

I cristalli rosso aranciati da me ottenuti facilmente da alcool o da miscuglio di alcool ed etere acetico sono tabulari secondo la base ed allungati secondo l'asse x .

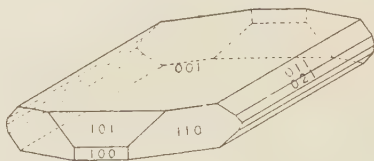


Fig. 2.

Immagini buonissime danno le facce di $\{100\}$ e $\{110\}$, meno buone le altre. Le facce della zona $[100]$ salvo $\{001\}$ sono generalmente curve. Nella fig. 2 è rappresentata la combinazione più completa.

Sfaldatura come nel caso precedente ma meno facile.

Pleocroismo notevole dal giallo ranciato al rosso.

(1) M. GIUA, op. cit.

Probabilmente la bisettrice acuta negativa fa un angolo di 73° circa con l'asse delle χ dalla parte di x positivo. Piano degli assi ottici normali al piano di simmetria.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	Numero	Limiti delle osservazioni	Medie	
100 · 110	18	$39^\circ 2' - 39^\circ 33'$	$39^\circ 16'$	—
110 · $\bar{1}10$	9	$101^\circ 17' - 101^\circ 48'$	$101^\circ 28'$	$101^\circ 28'$
110 · 001	7	$87^\circ 7' - 87^\circ 16'$	$87^\circ 12'$	—
001 · 011	12	$42^\circ 41' - 43^\circ 45'$	$43^\circ 11'$	$43^\circ 34'$
001 · $\bar{1}00$	7	$93^\circ 13' - 93^\circ 53'$	$93^\circ 34'$	$93^\circ 37'$
001 · 100	6	$86^\circ 14' - 86^\circ 52'$	$86^\circ 28'$	$86^\circ 23'$
001 · 101	8	$47^\circ 11' - 47^\circ 37'$	$47^\circ 30'$	$47^\circ 15'$
100 · 101	6	$38^\circ 27' - 38^\circ 59'$	$38^\circ 45'$	$39^\circ 8'$
$\bar{1}10$ · 101	1		$52^\circ 52'$	$53^\circ 6'$
011 · 101	1		$60^\circ 57'$	$60^\circ 32'$
$\bar{1}10$ · 011	2	$66^\circ 1' - 66^\circ 30'$	$66^\circ 15'$	$66^\circ 22'$
001 · 021	13	$61^\circ 37' - 62^\circ 50'$	$62^\circ 16'$	—
021 · $\bar{0}21$	8	$55^\circ 3' - 55^\circ 53'$	$55^\circ 23'$	$55^\circ 28'$
001 · 111	1		$55^\circ 6'$	$54^\circ 26'$
111 · 110	1		$37^\circ 7'$	$38^\circ 22'$

$$P. \text{ sp.} = 1,354$$

$$\chi = 5,3826$$

$$P. \text{ M.} = 302,14$$

$$\psi = 6,5709$$

$$V. = 223,15$$

$$\omega = 6,3218$$

III.

α . metil α . fenil 2,4 dinitro 5. clorofenilidrazina $C_{13}H_{11}O_4N_4Cl$ (1).

P. f. $120^\circ - 121^\circ C$.

Ottenuta trattando il clorotrinitrobenzene 1, 3, 4, 6 disciolto in alcool etilico con metilfenilidrazina as.

Sistema monoclinico, classe prismatica.

$$a : b : c = 2,8747 : 1 : 1,4563$$

$$\beta = 128^\circ 3'.$$

(1) M. GIUA, *Sopra alcune nitroarilidrazine*, « Gazz. chim. ital. », anno LIII, fasc. XII, Roma, 1923, p. 848.

Forme osservate $\{100\}$, $\{110\}$, $\{310\}$, $\{010\}$, $\{001\}$, $\{201\}$, $\{\bar{1}11\}$.

I cristalli rosso scuri da me ottenuti da alcool assoluto sono nettamente allungati secondo l'asse y . Per lo più compaiono le forme $\{201\}$, molto sviluppata, $\{100\}$ $\{001\}$ $\{110\}$ e $\{\bar{1}11\}$, più raramente le $\{310\}$ e $\{010\}$ sempre piccolissime (fig. 3).

Le facce della zona $[001]$ danno immagini assai buone, le rimanenti meno nette.

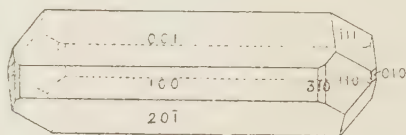


Fig. 3.

Pleocroismo notevole dal giallo ranciato al rosso ranciato cupo.
Bissettrice acuta positiva sensibilmente normale a $\{201\}$.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	Numero	Limiti delle osservazioni	Medie	
$100 \cdot 001$	11	$51^{\circ} 30' - 52^{\circ} 24'$	$51^{\circ} 57'$	—
$100 \cdot 310$	10	$36^{\circ} 32' - 37^{\circ} 12'$	$36^{\circ} 53'$	$37^{\circ} 2'$
$310 \cdot 110$	11	$29^{\circ} 5' - 29^{\circ} 42'$	$29^{\circ} 23'$	$29^{\circ} 8'$
$110 \cdot 010$	7	$23^{\circ} 41' - 24^{\circ} 3'$	$23^{\circ} 49'$	$23^{\circ} 50'$
$110 \cdot \bar{1}10$	10	$47^{\circ} 30' - 47^{\circ} 53'$	$47^{\circ} 40'$	—
$001 \cdot 201$	10	$64^{\circ} 27' - 65^{\circ} 9'$	$64^{\circ} 46'$	$64^{\circ} 48'$
$201 \cdot 110$	9	$62^{\circ} 53' - 63^{\circ} 33'$	$63^{\circ} 13'$	$63^{\circ} 15'$
$110 \cdot 001$	4	$74^{\circ} 59' - 75^{\circ} 43'$	$75^{\circ} 15'$	$75^{\circ} 35'$
$\bar{1}10 \cdot 201$	5	$78^{\circ} 46' - 79^{\circ} 48'$	$79^{\circ} 21'$	$79^{\circ} 31'$
$\bar{1}11 \cdot 010$	2	$34^{\circ} 40' - 34^{\circ} 42'$	$34^{\circ} 41'$	$34^{\circ} 44'$
$\bar{1}11 \cdot \bar{1}11$	9	$110^{\circ} 11' - 111^{\circ} 5'$	$110^{\circ} 32'$	—
$\bar{1}10 \cdot \bar{1}11$	4	$43^{\circ} 59' - 44^{\circ} 15'$	$44^{\circ} 4'$	$43^{\circ} 57'$
$001 \cdot \bar{1}11$	4	$60^{\circ} 20' - 61^{\circ} 12'$	$60^{\circ} 45'$	$60^{\circ} 28'$
$110 \cdot \bar{1}11$	5	$38^{\circ} 22' - 38^{\circ} 45'$	$38^{\circ} 33'$	$38^{\circ} 25'$
$201 \cdot \bar{1}11$	6	$61^{\circ} 41' - 62^{\circ} 51'$	$62^{\circ} 6'$	$62^{\circ} 4'$

$$\begin{array}{lll} P. \text{ sp.} = 1,483 & P. M. = 322,58 & V. = 217,51 \\ \chi = 11,6160 & \psi = 4,0408 & \omega = 5,8846 \end{array}$$

Cristallografia. — *Studio cristallografico del [Di-Metilidrossigliossimo] Nichelato di sodio.* Nota di M. FENOGLIO, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Ottica cristallografica. — *Sur le dédoublement anormal de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow.* Nota di M. PHILIBERT, presentata dal Socio F. ZAMBONINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Ricerche sopra alcune notevoli sublimazioni vesuviane.* Nota di G. CAROBBI, presentata dal Socio F. ZAMBONINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

»

Zoologia. — *Altri fatti sopra le migrazioni dei tonni, accertati per mezzo degli ami.* Nota di M. SELLA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

In una Nota precedente (« Rend. R. Acc. Lincei », 3 giugno 1926), esponevo alcuni risultati relativi agli spostamenti dei tonni, a cui ero giunto identificando il luogo d'origine di un certo numero di ami trovati entro il corpo di questi pesci. In modo speciale dimostravo, con la testimonianza di ami provenienti da Tarifa, località situata nel sud della Spagna al di là dello Stretto di Gibilterra, e ritrovati in Sardegna, Sicilia, Tunisia e sulla costa spagnuola fra lo Stretto ed il Portogallo, che i tonni del Mediterraneo non costituiscono una popolazione separata dai tonni di quella parte dell'Atlantico che bagna la costa sud della penisola iberica, dove sono situate le grandi tonnare spagnuole e portoghesi, e che anzi un numero certamente rilevante di tonni entra nel Mediterraneo attraverso lo Stretto di Gibilterra; che quindi è da escludere la loro appartenenza a due distinte razze o sottospecie di tonni.

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1926.

Accennavo inoltre che questi ed altri fatti deponevano parimenti contro l'opinione che nel Mediterraneo stesso esistano zone con popolazioni proprie e indipendenti di tonni, sebbene non possedessi ancora le prove di rapporti fra i tonni del Mediterraneo occidentale ed orientale e dell'Adriatico, zone supposte da alcuni indipendenti.

In questo frattempo ho potuto raccogliere altro materiale, accertarne la provenienza e stabilire così dei nuovi percorsi compiuti da tonni, alcuni dei quali presentano un'importanza notevole sia perchè ci permettono di definire la precedente questione, sia perchè ci arrecano la sorpresa dell'arrivo di tonni nel Mediterraneo da assai più lontane regioni dell'Atlantico.

Debbo alla cortesia del Direttore Generale dell'Iscrizione Marittima di Algeri, dott. Lacoste, tre ami trovati nei tonni ad Arzeu (Orano): uno di essi è un amo del genere di quelli usati sul luogo per la pesca dei tonni, ed il suo stato di consunzione dimostra che il tonno che lo portava ritornò sullo stesso posto, ove fu ripreso, dopo un periodo piuttosto lungo, sicuramente dopo più di un anno; un altro di questi ami, ancora armato, proviene da Messina; il terzo non ha potuto finora essere identificato.

Dal Rais della tonnara di Gargaresch in Tripolitania mi è stato consegnato un amo, trovato nel 1921 in un tonno pescato in quella tonnara, relativamente piccolo (6 cm. di lunghezza) e con paletta di forma particolare, cioè tagliata inferiormente ad angolo retto con il gambo. Per molto tempo mi fu impossibile giungere alla identificazione di questo amo, che i miei corrispondenti dichiararono sconosciuto, in base alle fotografie e descrizioni inviate, ai pescatori italiani, dalmati e greci, di Costantinopoli e dell'Asia Minore, dell'Egitto e dei successivi paesi del nord Africa fino al Marocco, del Golfo di Marsiglia, del Portogallo e costa spagnuola oltre Gibilterra. Recentemente ho avuto la soddisfazione di riconoscerlo identico al campione di amo del tipo usato per la pesca del tonno a Malaga, cortesemente fattomi pervenire dal nostro R. Agente Consolare di quella città.

Dal comm. A. Schiano, direttore delle tonnare tunisine, ho ricevuto, per il tramite del Consòle italiano a Mahdia, un piombo allungato di forma speciale, munito di foro ad una delle estremità e recante nell'altra un pezzo ricurvo di amo; esso fu trovato l'anno scorso in un tonno della tonnara di Bordj-Kadidjia. Fu facile identificarlo per una delle « dandinettes » impiegate a Costantinopoli per la pesca delle Palamide, grazie alle figure ed alla descrizione che di esse fornisce il dott. Karekin Dévedjian nel suo bel trattato: *Pêche e Pêcheries en Turquie*, Costantinopoli, 1926. Per maggior garanzia inviai il piombo al signor Dévedjian, il quale confermò pienamente la sua provenienza dal Bosforo.

La stessa origine turca potè essere dimostrata, dopo laboriose ricerche in vari paesi, per un altro piombo del peso di oltre 500 grammi, che mi fu consegnato dal signor cav. G. Carpaneto, e fu estratto anni fa da un tonno catturato nella tonnara di Porto Paglia in Sardegna. Il signor Dé-

vedjian mi scrive, a proposito di esso: « Le plomb trouvé dans l'estomac d'un thon en Sardaigne, n'est qu'un *skandil* (sonde) qu'on fixe chez nous à l'extrémité d'une palangrote à Maquereaux. Les pêcheurs turcs fondent eux-mêmes cette forme de sonde en plusieurs calibres. La trace d'un coup d'épée d'espadaon que l'on remarque sur ce plomb ne laisse aucun doute sur son origine turque (voir dans mon livre page 5, première annotation) ».

Il signor I. Skomerža di Crikveniča mi ha procurato un gancio, trovato anni or sono in un tonno pescato dalla tonnarella di S. Martino di Cherso (alto Adriatico), che i pescatori siciliani hanno riconosciuto per uno di quei ganci di forma speciale, detti « corchigli », adoperati un tempo nella tonnara di Sidi-Daud in Tunisia, ed in altre tonnare, per sospendere (ammuscellare) la leva al momento della mattanza. Il tonno portatore del gancio in parola, proveniva dunque dai mari della Tunisia o della Sicilia, se non da più lontano.

Ma il reperto più importante è quello di due ami originari del Golfo di Biscaglia, trovati quest'anno in Sardegna ed in Sicilia: il primo fu scoperto in un tonno catturato dalla tonnara dell'Isola Piana e a me gentilmente rimesso per esame dal Marchese S. di Villamarina; il secondo fu estratto da un tonno pescato nella tonnara di Brucoli presso Augusta e lo debbo alla premura del Com.te Ruffini, Capitano di Porto a Siracusa.

L'amo dell'Isola Piana porta ancora attaccato un pezzo del filo di ottone, a cui è unito mediante un breve tratto di corda o più esattamente mediante una matassina di filo di cotone. Sulla matassina e sull'ultima parte del filo di ottone sono ancora legate, in piani sovrapposti, le fibre di mais usate per adescare il pesce. I dettagli della legatura e della guarnizione, la tipica forma dell'amo ad angolo pronunciato in basso, perfino i minimi particolari dei colpi di lima su questo amo forgiato, corrispondono in modo perfetto ai campioni ricevuti da Santander e da San Sebastiano degli ami usati nel nord di Spagna per la pesca del « cimarron » (tonno) e del « bonito » (alalunga); neppur l'ombra di dubbio, quindi, che l'amo trovato in Sardegna non provenga dal nord della Spagna, poichè ivi soltanto sono impiegati ami di questo tipo.

L'amo di Brucoli porta attaccati solo pochi residui della matassina e qualche fibra di mais; nel resto è identico al precedente

Un altro amo consimile, andato perduto, già mi risultava essere stato trovato, anni addietro, in un tonno della tonnara di Sidi-Daud in Tunisia. Per la descrizione che spontaneamente me ne aveva fatto il Rais che l'aveva tenuto presso di sè per due anni, confermata da altri che lo videro, e per la sicurezza con cui era stato da essi dichiarato identico ai campioni del nord Spagna loro mostrati, ero rimasto convinto dell'attendibilità dell'informazione e dell'attribuzione. Ed ora che gli ami trovati in Sardegna ci garantiscono della possibilità di tali arrivi, non esito a considerare anche quello come un'altra testimonianza del passaggio dei tonni dal Mare Cantabrico nel Tirreno.

Riassumendo, i percorsi recentemente determinati sono i seguenti (indicando prima il punto di partenza e poi quello di arrivo):

Arzeu-Arzeu (Algeria).

Messina-Arzeu.

Malaga-Gargaresch (Tripolitania).

Costantinopoli-Sidi Daud (Tunisia).

Costantinopoli-Porto Paglia (Sardegna).

Sicilia o Tunisia-S. Martino di Cherso (Alto Adriatico).

Costa spagnuola del Golfo di Biscaglia-Isola Piana (Sardegna).

» » » » » » Brucoli (Sicilia).

Quali nuove illazioni questi reperti ci permettono di fare?

1. Non esistono popolazioni indipendenti e distinte di tonni in diverse località del Mediterraneo, ed in particolare nell'Adriatico, nel bacino occidentale ed in quello orientale fino a Costantinopoli, poichè tutto il Mediterraneo è visitato, nelle loro migrazioni, dagli stessi tonni. (Abbiamo infatti accertato, riferendoci anche alla Nota precedente, gli spostamenti Tarifa-Sicilia, Sardegna e Tunisia; Messina-Algeria e Sardegna; Sicilia-Sicilia; Adriatico-Mare della Sicilia; Costantinopoli-Tunisia e Sardegna).

2. Le migrazioni e l'habitat del nostro tonno mediterraneo (*Orcynus thynnus* L.) si estendono, nell'Atlantico, non solo alla zona al sud della penisola iberica, ma anche alla zona di nord di detta penisola, cioè ad una regione molto più vasta, che probabilmente non è che una piccola parte di quella in cui in realtà il nostro tonno si sposta.

La presenza nel Mare del Nord, e particolarmente in Norvegia, di tonni che non sembrano differire morfologicamente dai nostri (Q. Heldt, *Off. Sc. Techn. Pêches Mar.*, « Notes et Mémoires », n. 22, 1923), rende lecita, ormai, l'ipotesi che il nostro tonno si spinga fin lassù e viceversa.

Stiamo perciò estendendo le ricerche anche a questa regione; di esse ha voluto incaricarsi il dott. Ove Hög del Museo di Trondjem.

Osserviamo che nessuna testimonianza, fin'ora, ci hanno offerto i tonni, la quale indichi l'arrivo di alcuni di essi nel Mediterraneo, dalle Canarie e da Madera, ove pure la pesca del tonno all'amo è praticata su larga scala e con ami che si prestano ad un riconoscimento sicuro. Sono queste isole situate fuori della zona frequentata dal tonno mediterraneo? È noto, invero, che il tonno di Madera è stato descritto come una specie a sè dal Lowe, sotto il nome di *Thynnus obesus*. Ulteriori ricerche sarebbero necessarie.

Quanto ai tonni del Mare Cantabrico, non mi risulta che abbiano formato oggetto di ricerche di ordine sistematico, ma in seguito al nostro reperto possiamo attenderci di ritrovarlo identico al nostro.

I limiti dell'habitat dell'*O. thynnus*, e ciò, in senso più o meno lato, può dirsi per tutti i pesci pelagici, essendo determinati da fattori fisici e loro regime (e gli spostamenti anche dal fattore nutrimento), è chiaro che

detti fattori non possono essere studiati e individuati, se prima non si conoscono i limiti della distribuzione geografica del pesce.

L'esame morfologico, e specialmente somatometrico, ci fornisce un valido ausilio per questa conoscenza, ma essenzialmente di genere negativo, nel senso che si raggiunge la certezza nell'escludere l'identità di due o più gruppi di pesci, quando delle differenze vengono constatate, ma non si raggiunge la stessa certezza nell'affermare che dei gruppi apparentemente corrispondenti, per i caratteri considerati, siano assolutamente identici in tutto il resto e non possano essere adattati ad ambienti sensibilmente diversi e quindi non si trovino isolati l'uno dall'altro.

Per contro, lo studio della distribuzione di un pesce mediante la determinazione dei suoi spostamenti da un luogo all'altro, con un metodo diretto, come quello da noi impiegato, consente solo degli accertamenti di ordine affermativo, la mancanza delle prove di rapporti fra località potendo sempre dipendere dal solo fatto di non averle trovate. I due metodi si integrano dunque reciprocamente.

Biologia. — *Influenza dello stimolo radio-ormonico, diretto verso i testicoli e le ovaie, sui caratteri dei discendenti.* — Nota⁽¹⁾ del dottor ANTONINO PAIS, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

L'inizio delle ricerche sperimentali, che brevemente riassumo, risale ai primi mesi del 1917, allorquando dominava incontrastata la dottrina radio-distruttiva.

Contro la classica concezione, che pone i raggi X nella zona abiotica o mortale delle radiazioni, e nega allo stimolo radico la normale, costante fase di eccitamento, scevra da successivi fenomeni metamorfoci o non caratterizzata da forme di perversimento funzionale (i raggi X a piccole dosi eccitano, secondo la classica concezione distruttiva, il perversimento cariocinetico e determinano forme di gigantismo e di mostruosità) contro siffatta dottrina, ripeto, su cui poggia la moderna radioterapia, opposi nell'inizio dell'anno 1917 la ipotesi del radioeccitamento.

In via provvisoria dirò come sulla guida dei risultati sperimentali ottenuti, successivamente esponessi la seguente mia personale concezione: «I raggi X non occupano la zona *abiotica* ma la zona *eubiotica* delle «radiazioni. Lo stimolo radico determina nelle cellule viventi una fase di «eccitamento caratterizzata dalla sua costanza e dalla sua normalità. Nes-«suno stimolo conosciuto esercita una così netta, salutare influenza eccita-«trice, come l'energia radiante. Anche la terapia così detta radiodistruttrice,

(1) Pervenuta all'Accademia in busta chiusa il 5 agosto 1925, ed aperta il 21 febbraio 1926, in seguito a domanda dell'Autore.

« inconsapevolmente, si vale della ignorata benefica fase di eccitamento, che
« le metamorfosi e le forme mortali sottraggono all'occhio dell'osservatore,
« prevenuto dai preconconcetti distruttivi e attratto verso la ricerca della forma
« più che all'esame della funzione ».

*
* *

Provai l'ipotesi del radioeccitamento alla pietra di paragone dei tessuti di più elevata radiosensibilità: organi ematopoietici, ghiandole sessuali.

Gli esperimenti sugli organi ematopoietici mi condussero rapidamente alla conferma del presupposto concetto eubiotico.

In luogo della leucopenia da raggi, o della leucocitosi fugace, seguita da distruzioni leucocitarie, per mezzo di opportuna tecnica giunsi ad ottenere una iperleucocitosi primitiva, pura, fisiologica, senza conseguente ipo-leucocitosi, senza forme di metamorfosi.

L'aumentato numero di globuli bianchi nel sangue si accompagnava ad un esaltamento delle reazioni immunitarie cellulari ed umorali.

Su tali esperienze fonda il mio metodo di radioeccitamento nelle malattie infettive.

Più complesse e difficili furono le esperienze sulle ghiandole sessuali, iniziate in parallelo alle prime.

Fin dagli albori della radiobiologia il tessuto germinale servì di mirabile palestra allo studio delle leggi della radiosensibilità.

I testicoli in modo speciale si prestano alla ricerca delle leggi radiobiologiche per le seguenti ragioni:

- a) perchè infinitamente radiosensibili;
- b) perchè presentano una serie di forme degradanti dallo spermatozoo maturo alle cellule madri, e tale da offrire una gamma di forme intermedie utilizzabili nella ricerca differenziale delle metamorfosi da raggi.

Le leggi della fragilità cellulare ai raggi X basano, infatti, sullo studio e sulla cognizione delle forme necrobiotiche ottenute, con dosi opportune di raggi X, sul tessuto germinale.

Le ricerche su questi organi presentano le seguenti caratteristiche:

- 1° conducono concordemente alla conferma della dottrina abiotica;
- 2° presentano come caratteristica essenziale la ricerca morfologica; mirano, cioè, alla ricerca della forma, trascurando la funzione;

3° furono condotte seguendo il presupposto abiotico, quindi con tecnica adatta a provocare modificazioni metamorfiche. Gli autori, in altri termini, stimando che la radiosensibilità avesse inizio colà dove appaiono modificazioni della forma, fissarono la soglia dello stimolo in dosi mortali, trascurarono l'esame delle dosi minori incapaci di indurre modificazioni microscopiche.

Parziali tentativi di allargare la sfera di tali ricerche morfologiche culminano nelle esperienze dei fratelli Hertwig. Gli H., pur sempre

ispirandosi ai principî distruttivi su cui basavano le esperienze precedenti, seguirono però il processo delle metamorfosi nelle cellule discendenti da spermatozoi e da uova irradiate prima e poi avvicinate.

Giunsero alla conclusione che le alterazioni radiche non si arrestano alle cellule irradiate, ma si trasmettono alle cellule discendenti, a guisa di una malattia infettante.

Le esperienze menzionate non si sottraggono, ripeto, al presupposto abiotico ed alla tecnica strettamente morfologica. Gli H., come i radiobiologi che li precedettero, non si domandarono quali modificazioni funzionali non visibili microscopicamente le radiazioni potessero determinare nei discendenti da cellule germinali irradiate con minori dosi, incapaci di alterare la forma cellulare.

Tale invece fu il punto di partenza delle mie ricerche fisiologiche sulla influenza dei raggi X verso i testicoli e le ovaie.

*
* *

Le mie prime esperienze in questo campo ebbero di mira la ricerca delle modificazioni della motilità e della vitalità degli spermatozoi provenienti da testicoli precedentemente irradiati.

I risultati di tali esperienze furono assolutamente negativi.

Solo di poi, e precisamente dopo che io ebbi conoscenza delle ricerche dell'Amantea e del Krzyszkowsky (1921) sulla motilità e sulla vitalità degli spermatozoi mi resi conto della impossibilità di giungere a risultati conclusivi per mezzo della tecnica elementare da me allora usata.

Avrei disertato il campo di tali ricerche se contemporaneamente i risultati ottenuti sugli organi ematopoietici non mi avessero infuso nuova fede.

Proseguì le ricerche in altra direttiva: i raggi X a tenui dosi, incapaci di ledere gli elementi dell'albero spermatico, avrebbero mai potuto eccitare la spermatogenesi? Il numero degli spermatozoi, sotto l'influenza delle radiazioni, sarebbe aumentato?

Su questo campo mi furono di guida le ricerche che l'Amantea pubblicava negli « Atti della Reale Accademia dei Lincei » fin dall'anno 1914.

Da tali pregevoli esperienze emerge, fenomeno di grande valore, che *per ogni individuo, ogni condizione di vita rimanendo immutata, soprattutto il ritmo sessuale individuale, il numero degli spermatozoi rimane molto costante per ogni eiaculazione.*

L'opportunità di indagare in questo campo si presentò eccezionalmente favorevole a causa delle speciali condizioni di ambiente in cui si svolgevano le mie ricerche.

Ero, allora, ufficiale medico in un grande reparto specializzato del Genio. La nostra vita trascorreva sedentaria e protetta da ogni stimolo sessuale esterno. La funzione sessuale, anche a causa del ritmo regolare del

lavoro tecnico peculiare del reparto, si svolgeva normale, uniforme, ritmica. L'intelligenza dei colleghi numerosi che si prestarono come soggetti in questi esperimenti, per attitudine del loro spirito rivolti essi stessi alla ricerca ed alla speculazione intellettuale (sebbene in campo diverso) fu di prezioso ausilio in ricerche tanto delicate, nelle quali ogni elemento, anche subiettivo, ha grande valore.

Adottai la tecnica della scuola del Baglioni integralmente. Essa tecnica, come è noto, è d'altronde di una semplicità assai grande. Curai soprattutto i ritmi sessuali. Dopo le prime indagini e i primi tentativi curai di fissare il coefficiente spermatico individuale di ciascun soggetto, coefficiente, che al pari d'Amantea, riscontrai assai stabile, costante.

Successivamente intrapresi l'irradiazione dei testicoli, prendendo come base le dosi radio-ormoniche usate nell'eccitamento degli organi ematopoietici.

I primi dati raccolti furono contraddittori e tali da suggerirmi, in qualche momento, l'abbandono delle esperienze.

L'ipotesi che mi guidava nelle ricerche, ed il ravvicinamento dei fenomeni leucocitari, mi indusse a proseguirero.

Aumentando il numero delle osservazioni, e queste opportunamente disciplinando, il fenomeno generale del radioeccitamento balzò dalla incertezza contraddittoria dei primi dati, nitido e sicuro.

Delle esperienze eseguite in questo campo dissi già nel XXI Congresso della Società Italiana di Ginecologia tenuto a Trieste nel 1921.

Espongo qui schematicamente i più importanti risultati ottenuti:

1. Le alte dosi di raggi X determinano una diminuzione temporanea nel numero degli spermatozoi.

2. Tale diminuzione è preceduta da un aumento degli spermatozoi, fugace e non sempre controllabile, specialmente se le dosi impiegate furono molto elevate.

3. Anche in pieno periodo di oligozoospermia si hanno improvvise e fugaci elevazioni nel numero degli spermatozoi.

4. Le dosi di raggi tenuissime, con opportuna frequenza ripetute, determinano un aumento nel numero degli spermatozoi, senza che ne segua una rapida diminuzione. Con oscillazioni, il cui valore si aggira entro la norma, l'aumento numerico degli spermatozoi si mantiene per alcune eiaculazioni successive (naturalmente in ritmo sessuale normale) e discende poi lentamente alla norma.

Trassi da questa esperienza la conclusione *che i raggi X, opportunamente usati a piccole dosi determinano un eccitamento alla spermatogenesi, stimolando la produzione di elementi nuovi ed affrettando il ritmo di maturazione degli spermatozoi.*

Agli esperimenti sui testicoli fecero riscontro gli esperimenti clinici sulle ovaie di donne in amenorrea.

Di tali esperienze che conclusi negli anni successivi, ho riferito al menzionato Congresso ginecologico del 1921 e a quello tenuto a Napoli dalla stessa Società Italiana di Ginecologia nel 1924.

Le conclusioni furono le seguenti :

1. I raggi X a dosi eccitanti, diretti verso le ovaie delle giovanette prossime alla pubertà, affrettano la maturazione della funzione ovarica.
2. Nelle donne in amenorrea per pura ipofunzione ovarica ristabiliscono il flusso mestruale.
3. Nelle donne sterili, per pura ipofunzione ovarica, rendono possibile il concepimento.
4. Nelle donne colpite da adiposi ipogenitale determinano un rinvigorisce-mento organico generale con diminuzione dell'adiposi ⁽¹⁾.

*
* *

L'evidente eccitamento alla spermatogenesi determinato dai raggi X, dando una conferma alla mia ipotesi, imponeva logicamente il seguente quesito : « poichè le radiazioni usate a dosi eccitatrici si dimostrano capaci di aumentare il numero degli spermatozoi, sono esse ugualmente atte a conferire agli spermatozoi stessi od agli ovuli più elevato il potere di trasmettere ai discendenti le virtù proprie i caratteri dominanti dell'individuo o della razza ? ».

Gli esperimenti iniziati verso il declinare del 1917 furono condotti a sbalzi come l'opportunità me ne offriva il destro.

Mancò allora, e mancò in seguito, quella continuità di ricerca e di osservazioni che solo possono essere assicurate, in tale campo, da ricchezza illimitata di mezzi, e da opportunità di ambiente.

D'altro canto se le difficoltà furono assai rilevanti nell'indagine della spermatogenesi, maggiori furono in questo campo.

Solo dopo molti insuccessi, o meglio dopo risultati contraddittori, e dopo molto speculare sull'argomento, giunsi a comprendere e sino ad un certo punto ad eliminare le cause di errore e a perfezionare la tecnica, secondo l'esigenza di esperienze tanto complesse e delicate.

Servirono in seguito di guida alle mie esperienze le seguenti norme :

1. È indispensabile curare che l'eccitamento radico sia quanto è più possibile uniforme, in modo che tutti gli elementi germinali, nelle loro diverse fasi, vengano eccitati. Occorre graduare, per conseguenza, la qualità, l'intensità delle radiazioni, e opportunamente disporre le sedute nel tempo. Sono diminuite, in tal modo, le probabilità che alla fecondazione concorrano elementi troppo duramente stimolati o nati fuori del benefico eccitamento radico. (Minor valore ha questa norma per le ovaie).

(1) Tali mie conclusioni trovarono conferma, nell'anno successivo, nelle esperienze di Thaler e Flatau, esposte al 17° Congresso della Società tedesca di Ginecologia.

2. È indispensabile, prima del coito sperimentale, provocare opportune eiaculazioni a fine di eliminare gli spermatozoi formatisi fuori dello stimolo radico.

L'ignoranza di tutte queste norme e di molte altre di non minor peso, inerenti alla scelta della intensità dello stimolo e del ritmo di irradiazione, turbarono dapprima l'esperimento.

Alcuni casi nella contraddittoria serie di risultati apparvero tuttavia così nettamente probativi da non lasciar dubbio sul loro significato.

Le leggi della ereditarietà erano state evidentemente influenzate dallo stimolo radico.

Il materiale sperimentale traeva allora da un ricchissimo e ben condotto allevamento di conigli, che l'opportunità mi offriva generosamente. Usai di varietà ben definite. Successivamente esperimentai su varietà del mus decumanus.

L'esame dei risultati si limitò essenzialmente all'osservazione del manto e della pigmentazione degli occhi.

I risultati ottenuti possono così schematicamente riassumersi:

a) Se si irradiano a dosi eccitanti i testicoli dei conigli e dei topi, opportunamente graduando l'irradiazione nel tempo, e si provoca in precedenza la eliminazione degli spermatozoi maturati fuori dell'influenza delle radiazioni, l'accoppiamento di tali soggetti irradiati con femmine non irradiate assicura discendenti che hanno in prevalenza i caratteri del maschio irradiato.

La reciproca avviene per le femmine irradiate avvicinate a maschi non irradiati.

b) La conferma della opposta influenza distruttrice delle alte dosi di raggi X si trova nel fenomeno seguente: irradiando le ghiandole sessuali degli animali sopra menzionati con dosi *terapeutiche* i discendenti presentano i caratteri del compagno non irradiato ⁽¹⁾.

c) La prevalenza dei caratteri peculiari dell'animale irradiato a dosi ormoniche si accentua se esso animale venga accoppiato con altro le cui ghiandole sessuali siano state invece irradiate a dosi distruttive.

d) Dagli animali irradiati discendono sovente individui che presentano caratteri non evidenti nei genitori.

Come la dominanza dei caratteri artificialmente conferiti persista nei discendenti, non ho potuto nitidamente stabilire.

I dati raccolti risultano, come in precedenza ho detto, da esperimenti condotti attraverso difficoltà molto grandi, con scarshezza di materiale e saltuariamente ⁽²⁾.

(1) L'influenza negativa delle radiazioni X, usate secondo i concetti e la tecnica distruttiva su alcuni caratteri dominanti dell'animale irradiato sembra trovare una parziale conferma in recenti esperienze di J. W. Mavor.

(2) Attratto dal miraggio di larghi mezzi d'indagine, e seguendo il proposito di rendere più complete queste ricerche ho ritardato, per lunghi anni la comunicazione dei

Le presenti ricerche proseguono anche in un campo affine. Da qualche tempo ho intrapreso lo studio del seguente problema: « se dosi ormoniche « di raggi X, dirette verso particolari tessuti ed organi, esclusa la irradiazione delle ghiandole sessuali, possano determinare una trasmissione nei discendenti di peculiari caratteri degli individui in tal modo irradiati ».

Ho iniziato anche la ricerca sperimentale della influenza dello stimolo radio-ormonico sulla determinazione del sesso nei discendenti.

Nel condurre le esperienze che ho brevemente enunciate, ho avuto costante la visione dell'importanza che queste sono destinate, in un giorno non lontano, ad esercitare nel campo della zootecnica, ed in un più lontano avvenire nel campo della eugenetica, per la perfezione e la selezione della razza umana.

resultati ottenuti. Oggi, che men viva è in me la speranza di ottenere finalmente i larghi mezzi di studio indispensabili, mi appare doveroso aprire finalmente alla ricerca scientifica un campo, a mio credere, tanto fecondo di possibili risultati biologici e sociali.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

(Ferie 1926).

- ALBERTARIO E. — A proposito di « Interpolationenjagd ». Pubblicazione della Università Cattolica del Sacro Cuore. Milano, 1926, 8°, pp. 1-19.
- BALP S. — La missione igienica e sociale delle Scuole di Bergamo. Ciriè, 1926, 8°, pp. 1-15.
- BALP S. — La scuola per infermiere religiose dell'ospedale di S. Giovanni - Sezione di S. Vito. Torino. Ciriè, 1926, 8°, pp. 1-14.
- BATTAGLIA M. — Altri casi di tubercolosi pseudoneoplastica come contributo allo studio dei blastomi. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana di Chirurgia ». XXXII Congresso, 1925). Roma, 1925, 8°, pp. 1-5.
- BATTAGLIA M. — Calcolo in glandola linfatica tubercolare. Nota di casistica e di patologia sperimentale. (Estr. dagli « Annali Italiani di Chirurgia ». Anno V, fasc. V, pp. 455-458). Napoli, 1926, 8°.
- BATTAGLIA M. — Degenerazione grassa e necrosi acuta del fegato e del rene da Trypanosoma Brucei. Genova, 1926, 8°, pp. 1-2.
- BIANCHINI G. — Per la introduzione in Italia della revisione aziendale (Estr. dagli « Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale ». Maggio 1926). Roma, 1926, 8°, pp. 1-17.
- BRIGANTI G. — L'arboricoltura come mezzo ausiliario per aumentare la disponibilità di legname occorrente ai bisogni del paese. (Estr. dagli « Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale ». Maggio 1926). Roma, 1926, 8°, pp. 1-20.
- CANIZZARO STANISLAO. — Scritti vari e lettere inedite nel centenario della nascita. Roma, 1924, 8°, pp. 1-485.
- CISOTTI U. — Lezioni di analisi matematica svolte nel R. Politecnico di Milano. Edizione III. Milano, 1926, 8°, pp. I-XXI, 1-576.
- DEL VALLE G. — Ritmi cosmici nelle oscillazioni climatiche con speciale riferimento alla serie pluviometrica Patavina. (Estr. da « Atti e Memorie » della Regia Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova. Vol. XLII, 1926). Padova, 1926, 8°, pp. 1-16.
- DISPENSA I. — Il postulato del raggio e il teorema della rettificazione. Palermo, 1926, 8°, pp. 1-35.
- GINORI-CONTI P. — La produzione dell'aluminio e del magnesio in Italia. (Estr. dagli « Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale ». Maggio, 1926). Roma, 1926, 8°, pp. 1-18.
- LASAREFF P. — The kursk magnetic anomaly. (From « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity ». March, 1925, pp. 11-13). S. d. t. 8°.
- LEONE S. — Tracoma e profilassi visiva nella provincia di Siracusa; XXI relazione, 1925-1926. Siracusa, 1926, 4°, pp. 1-20.
- MATTIROLO O. — I vegetali scoperti nella tomba dell'architetto Khà e di sua moglie Mirit nella necropoli di Tebe, dalla missione archeologica italiana diretta dal senatore E. Schiaparelli. (Estr. dagli « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXI, 1926, pp. 545-568). Torino, 1926, 8°.
- MAZZA A. — Saggio di algologia oceanica. Voll. I, II, III, IV. Padova, 1905-1926, 8°, pp. 1-528, 529-1056, 1057-1584, 1585-2096.

- MORANDI E. — Aspetti più immediati dell'industrializzazione dell'agricoltura italiana e possibili iniziative statali. (Estr. dagli « Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale ». Maggio 1926). Roma, 1926, 8°, pp. 1-29.
- PATERNÒ E. — La Società italiana delle Scienze detta dei XL, il suo passato ed il suo avvenire. Roma, 1926, 4°, pp. 1-7.
- PICCIONE M. — Lotta ad oltranza per la aeronautica da guerra e per la difesa nostra. Roma, 1926, 12°, pp. 1-54.
- SALVATORE L. — Profilassi del tracoma e visiva in provincia di Catania. 1ª relazione; 1925-26. Siracusa, 1926, 4°, pp. 1-33.
- SILVESTRI F. — Descrizione di particolari individui (*Myiagenii*) di *Termes gilvus* Hag. parassitizzati da larva di Dittero. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XIX, Portici, 1926, 8°, pp. 1-18.
- TASSINARI G. — Saggio intorno alla distribuzione del reddito nell'agricoltura italiana. Piacenza, 1926, 8°, p. 179.
- TIMPANARO S. — L'analisi spettrale quantitativa. (Estr. da « Il Nuovo Cimento ». N. VIII). Pisa, 1926, 8°, pp. 1-10.
- Id. — Deduzione della formola di Cardani. (Estr. da « Il Nuovo Cimento ». N. VI). Pisa, 1926, 8°, pp. 1-5.
- VIGLIANI A. — La visita medica d'assunzione delle maestranze operaie negli stabilimenti industriali. Torino, 1926, 8°, pp. 1-22.
- VOLCA P. — La registrazione automatica dei segnali radiotelegrafici e un nuovo metodo per la eliminazione degli errori di registrazione nelle determinazioni di longitudine. (Estr. dagli « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXI, 1926, pp. 325-343). Torino, 1926, 8°.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1926.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Meccanica. — *Inversione delle formule di Poisson sui moti rigidi.* Nota del Corrisp. U. CISOTTI⁽¹⁾.

I. CONDIZIONE CARATTERISTICA DEI MOTI RIGIDI. — In un moto rigido per qualunque coppia di punti P e O, che partecipano al moto, rimane costante la distanza $|P - O|$ dei punti stessi e quindi il suo quadrato $(P - O)^2$. Ne segue, derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt} (P - O)^2 = 0,$$

ovvero:

$$(P - O) \times \left(\frac{dP}{dt} - \frac{dO}{dt} \right) = 0.$$

Ponendo

$$(1) \quad P - O = \mathbf{a},$$

la precedente si può scrivere:

$$(2) \quad \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1926.

È questa condizione caratteristica per i moti rigidi e si può esprimere dicendo che *durante un moto rigido il vettore determinato da una qualunque coppia di punti mobili si mantiene normale al suo vettore derivato rispetto al tempo.*

2. LE FORMULE DI POISSON. — L'ortogonalità tra i vettori \mathbf{a} e $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ si può esprimere anche scrivendo:

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a},$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore indipendente dal vettore \mathbf{a} , è funzione arbitraria del tempo ed ha il significato cinematico di *velocità angolare* ⁽¹⁾.

Se \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} sono tre vettori unitari trirettangoli, partecipanti a un moto rigido, applicando a ognuno d'essi la formula (3) si ottengono le relazioni:

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} \quad , \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} \quad , \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k},$$

che riassumono, in forma vettoriale, le classiche nove formule scalari di Poisson.

3. FORMULE INVERSE. — Com'è noto, quando $\boldsymbol{\omega}$ non è nullo, l'asse istantaneo di rotazione è la retta contenente O e parallela a $\boldsymbol{\omega}$. Sia Q il punto comune alla retta di P, parallela a $\boldsymbol{\omega}$, e al piano normale a $\boldsymbol{\omega}$ contenente il punto O; ponendo

$$(5) \quad \mathbf{b} = \mathbf{Q} - \mathbf{O} \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{P} - \mathbf{Q},$$

si ha:

$$(6) \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c};$$

\mathbf{b} e \mathbf{c} risultano in tal modo i componenti di \mathbf{a} secondo il piano normale a $\boldsymbol{\omega}$ e secondo l'asse istantaneo di rotazione.

Essendo paralleli i vettori \mathbf{c} e $\boldsymbol{\omega}$ è nullo il loro prodotto vettoriale, $\mathbf{c} \wedge \boldsymbol{\omega}$, per cui, portando l'espressione (6) di \mathbf{a} nella (3), si ottiene:

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b}.$$

Da questa, per la triortogonalità dei vettori \mathbf{b} , $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, $\boldsymbol{\omega}$, si può porre \mathbf{b} sotto la forma seguente:

$$(8) \quad \mathbf{b} = h \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega},$$

(1) Cfr. ad es. le mie *Lezioni di Meccanica razionale* [Milano (1926); Tamburini, Cap. III].

ove b è uno scalare che si determina tosto moltiplicando scalarmente entrambi i membri per \mathbf{b} ; si ottiene infatti:

$$\mathbf{b}^2 = b \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b};$$

ma, per la (7) e per il fatto che l'ortogonalità di $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{b} implica che sia $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} = 0$, si ha:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b}) \wedge \boldsymbol{\omega} = \omega^2 \mathbf{b} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}) \boldsymbol{\omega} = \omega^2 \mathbf{b},$$

per cui

$$\mathbf{b}^2 = b \omega^2 \mathbf{b}^2$$

e quindi

$$b = \frac{1}{\omega^2}.$$

Per ciò la (8) si può scrivere:

$$(9) \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

Per questa e per la (6) si ha:

$$(10) \quad \mathbf{a} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{c},$$

essendo \mathbf{c} parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ si può scrivere

$$(11) \quad \mathbf{c} = \alpha \boldsymbol{\omega},$$

con α quantità scalare.

Si ha dunque, in definitiva,

$$(12) \quad \mathbf{a} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega} + \alpha \boldsymbol{\omega},$$

formula notevole che esprime l'inversione della formula (3).

Essa soddisfa alla condizione caratteristica (2), come facilmente si constata, qualunque sia lo scalare α .

Sieno \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} tre vettori unitari trirettangoli partecipanti al moto rigido; applicando la (12) a ciascuno di essi si ottengono le relazioni

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{i} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathbf{i}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega} + \alpha \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{j} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathbf{j}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega} + \beta \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{k} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathbf{k}}{dt} \wedge \boldsymbol{\omega} + \gamma \boldsymbol{\omega}, \end{cases}$$

dove α , β , γ sono scalari.

Sono queste formule inverse delle formule (4) di Poisson.

4. OSSERVAZIONI. — Riferendosi alla (6) si rilevi che, mentre il vettore \mathbf{a} muta di posizione nello spazio (cioè rispetto a un riferimento fisso) e quindi varia col tempo t e mantiene invece immutata la sua posizione rispetto alla terna di vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (riferimento mobile rigidamente col sistema), lo stesso non ha luogo per i suoi componenti \mathbf{b} e \mathbf{c} , nel senso che non solo \mathbf{b} e \mathbf{c} variano nello spazio con t , ma variano pure, col tempo, rispetto alla terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. È noto anzi che tra la derivata assoluta $\frac{d\mathbf{b}}{dt}$ e la derivata relativa $\frac{d'\mathbf{b}}{dt}$ ha luogo la relazione (1):

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d'\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b}.$$

Pel vettore \mathbf{c} si ha pure la relazione

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{d'\mathbf{c}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{c},$$

che, per essere \mathbf{c} parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ e quindi nullo l'ultimo termine, si semplifica nella seguente

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{d'\mathbf{c}}{dt}.$$

È essa suscettibile di una notevole interpretazione. Infatti, per la seconda delle (5), la precedente relazione si può scrivere:

$$\frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \frac{d'P}{dt} - \frac{d'Q}{dt}.$$

Nel primo membro si legge: differenza delle velocità assolute dei punti P e Q, e nel secondo: differenza delle velocità relative degli stessi punti; ma la velocità relativa del punto P, cioè $\frac{d'P}{dt}$, è nulla perchè P partecipa al moto rigido; si ha dunque:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{d'Q}{dt}.$$

Ora il secondo membro esprime la differenza tra la velocità assoluta e la velocità relativa del punto Q, è quindi la sua velocità di trascinamento.

Da ciò la seguente interessante conclusione: *in ogni istante la velocità di un punto P, che partecipa al moto rigido, coincide colla velocità di trascinamento*

(1) Cfr. loc. cit., p. 298, formula (3).

mento della sua proiezione Q sul piano normale all'asse istantaneo di rotazione (corrispondente a quell'istante) contenente il polo O .

Ne segue che tutti i punti della retta passante per Q e parallela all'asse istantaneo hanno (nell'istante che si considera), la medesima velocità.

5. CORRISPONDENZE TRA CONFIGURAZIONE E ATTO DI MOVIMENTO. — Se nella (3) si sostituisce ad α il corrispondente vettore $P - O$ come risulta dalla (1), si ottiene la relazione

$$(14) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{dO}{dt} + \omega \wedge (P - O)$$

fondamentale della cinematica dei moti rigidi e che serve a definire la distribuzione delle velocità ω , con felice denominazione introdotta dal Maggi⁽¹⁾, l'atto di movimento.

Una volta prescelto il punto O ed assegnati i vettori $\frac{dO}{dt}$ e ω (caratteristiche del moto rigido) la (14) stabilisce una corrispondenza univoca tra i punti P e le corrispondenti velocità $\frac{dP}{dt}$.

La corrispondenza però non è biunivoca, cioè a un determinato atto di movimento non corrisponde un'unica configurazione di punti P . Infatti, dalla (10), per le (1) e (5) si ricava:

$$(15) \quad P - O = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{dP}{dt} \wedge \omega + \frac{dO}{dt} \wedge \omega \right\} + P - Q,$$

da cui

$$(16) \quad Q - O = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{dP}{dt} \wedge \omega + \frac{dO}{dt} \wedge \omega \right\}.$$

Scende da questa che vi è corrispondenza univoca tra l'atto di movimento e i punti Q ossia la retta (determinata da Q e) parallela a ω .

Se il punto O viene prescelto sull'asse di moto, essendo allora $\frac{dO}{dt}$ e ω paralleli è nullo il secondo prodotto vettoriale e la (16) si semplifica nella seguente:

$$(17) \quad Q - O = \frac{1}{\omega^2} \frac{dP}{dt} \wedge \omega.$$

(1) *Geometria del movimento* [Pisa, Spoerri, 1919, p. 129].

Matematica. — *Sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito.* Nota del Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica celeste. — *Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema di due corpi di masse variabili.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Sopra la differenza tra la grandezza visuale e la grandezza bolometrica delle stelle, in relazione alla temperatura assoluta.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Osservazioni sui moti dei vapori metallici nelle macchie solari.* Nota del Corrisp. GIORGIO ABETTI ⁽¹⁾.

Le ricerche sul così detto moto radiale dei vapori metallici nelle macchie solari sono state eseguite, per quanto è a mia conoscenza, soltanto da Evershed, a cui se ne deve la scoperta, e da St. John. Evershed ⁽²⁾ eseguendo spettrografie dell'insieme di tutta la macchia, cioè comprendendo l'ombra e la penombra, ha misurato gli spostamenti delle righe fra gli orli della penombra e le immediate regioni vicine indisturbate della fotosfera per le righe di varia intensità, a varie longitudini, con la fessura dello spettroscopio sia situata radialmente, cioè lungo il raggio congiungente il centro del disco solare e la macchia, sia con fessura tangenziale, cioè a 90° dalla prima posizione. St. John ⁽³⁾ ha invece confrontato in varie macchie direttamente i due orli della penombra, quello verso il centro e l'altro verso l'orlo del disco solare escludendo il nucleo. Poteva misurare così il doppio spostamento dovuto al movimento dei vapori per righe di varia intensità, cioè di diversi livelli, riunendo in una sola media i risultati ottenuti per varie macchie.

Ora l'esame degli importanti risultati ottenuti da questi investigatori dimostra subito, che il fenomeno è molto complesso e che sono necessarie delle osservazioni sistematiche su macchie di varia grandezza e attività a

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1926.

(2) « Monthly Notices R. A. S. », vol. 69, p. 454; vol. 70, p. 217, 1909-1910, e « Bulletin Kodaikanal Observatory », n. 51, 1916.

(3) « Astrophys. Journal », vol. 37, p. 322; vol. 38, p. 341, 1913.

diverse longitudini, su molte righe spettrali, per poter mettere in evidenza e spiegare le varie sue apparenze. A questo scopo ho iniziato nel corso di quest'anno una serie di osservazioni sullo spettro delle macchie con lo spettrografo della Torre solare di Arcetri usando il reticolo di Rowland ⁽¹⁾ nel secondo ordine, generalmente nella regione da λ 4670 a λ 4900 con una dispersione di 1 mm. = 1.30 Å. Lo spettro delle macchie venne fotografato puntando queste sulla fessura dello spettrografo con apposito schermo in modo da comprendere l'ombra e la penombra e poi al disopra e al di sotto di esso veniva preso lo spettro di confronto puntando il centro del disco solare. In questo modo si possono dedurre, supposto che in quel dato istante al centro del sole non esistano particolari perturbazioni, gli spostamenti assoluti delle righe dovuti all'effetto Doppler tenendo conto della parte dovuta alla rotazione del sole per quel particolare punto del disco in cui si trovava la macchia. Una prima posa veniva fatta con fessura radiale, una seconda con fessura tangenziale. Come risulta dalle suddette ricerche queste sono le posizioni di massimo e minimo degli spostamenti e possono dire altresì se, oltre alle componenti del moto radiale, esistano componenti di un moto vorticoso o di un moto di rotazione.

Dal marzo all'agosto 1926 potei ottenere i seguenti spettrogrammi:

TABELLA I.

Nr. lastra	Data 1926	Long. eliogr.	Lat. eliogr.	Passaggio al Mer. centr.	Note
T 101	17 marzo	— 15° E	— 19°	18 marzo	Nucleo attraversato da un ponte.
134	28 »	— 60 E	— 21	1 giugno	Piccola macchia.
135	10 giugno	+ 7 W	+ 9	9 »	Gruppo di 2 macchie A e B abbastanza regolari.
137	12 »	+ 37 W	+ 9	9 »	
139	12 »	+ 41 W	+ 9	9 »	
141	22 »	+ 5 W	+ 25	22 »	Nucleo molto complesso.
145	24 »	+ 32 W	+ 25	22 »	» » »
145	24 »	— 70 E	+ 22	29 »	Macchia precedente di un gruppo comparso al bordo est il 23 giugno, presenta notevoli variazioni nel nucleo.
146	27 »	— 27 E	+ 22	29 »	
148	30 »	+ 12 W	+ 22	29 »	
149	30 »	+ 12 W	+ 22	29 »	Macchia isolata con notevoli variazioni nel nucleo.
152	1 luglio	+ 29 W	+ 22	29 »	
163	30 »	+ 11 W	— 12	29 luglio	
165	2 agosto	+ 45 W	— 12	29 »	

(1) «Pubbl. Osserv. Arcetri», fasc. 43 (in corso di stampa), 1926.

L'esame e la misura di queste lastre dimostrano che nelle sue linee generali il moto dei vapori metallici sulle macchie ha le caratteristiche note che possiamo brevemente indicare col nome di effetto Evershed di prima e seconda specie ⁽¹⁾. Ma altre particolarità del fenomeno si notano in queste lastre, principale quella che i massimi delle velocità radiali non si notano ai confini della penombra, ma ai confini dell'ombra. L'andamento delle righe spettrali attraverso l'ombra e la penombra delle macchie non presentano una inclinazione costante rispetto alle righe indisturbate della fotosfera, ma sono incurvate, con i massimi di curvatura corrispondenti all'incirca agli orli dell'ombra. Se si confronta il chiaro diagramma dato da Evershed nelle « Monthly Notices » ⁽²⁾ si vede che le righe, quali si presentano in queste lastre di Arcetri, mostrano un andamento simile a quello disegnato per la riga H_β e non quello della riga del ferro. Anche nella riproduzione della lastra T 148 ⁽³⁾ è visibile il detto andamento. Con questa apparenza delle righe il moto sarebbe accelerato verso i bordi delle ombre andando a diminuire verso gli orli della penombra. La presenza poi dell'effetto Evershed di seconda specie rende plausibile l'ipotesi avanzata da Mancinelli che il moto radiale dei vapori dello strato invertente nelle macchie avvenga secondo direzioni inclinate sull'orizzonte solare.

Un'altra particolarità è la notevole variazione del valore assoluto delle velocità radiali per le diverse macchie. Le maggiori velocità misurate da Evershed per righe di debole intensità, cioè di basso livello, ammontano a circa 3 km. per secondo. Minori sono quelle misurate da St. John in causa, come avverte Evershed, delle pose più lunghe richieste dallo strumento di Monte Wilson e la conseguente diffusione dell'immagine delle macchie. Le lastre di Arcetri presentano una notevole variazione da macchia a macchia, in parte certo dipendente dalle condizioni di definizione e tranquillità delle immagini, ed in un caso, per esempio (lastra T 148), raggiunge il notevole valore di 6,5 km. per secondo, che è notevolmente maggiore, per quel che è a mia conoscenza, di quante sieno state finora misurate.

Per alcune delle lastre elencate nella tabella I è stato misurato da Mancinelli un certo numero di righe con lo spettrocomparatore. A questo venne adattato per le dette misure un micrometro per modo da poter sempre esattamente puntare una determinata zona sulla striscia di spettro dovuta alla macchia e su quelle dovute al centro del sole.

Per le due lastre 134 e 148 egli ha ottenuto i seguenti risultati:

Lastra T 134 - fessura radiale. Distanza centrale (raggio del sole = 1) = 0.864 est. Regione: da λ 4729 a λ 4790.

(1) Cfr. R. MANCINELLI, questi « Rendiconti ».

(2) Vol. 70, p. 220, 1910.

(3) Cfr. « Pubbl. Osserv. Arcetri », loc. cit.

Numero righe	Intensità delle righe (Rowland)	Lembo est velocità Km/sec.	Lembo ovest velocità Km/sec.
10	1 a 2	+ 1.00	— 0.68
9	3	+ 1.15	— 0.44
9	4 a 7	+ 0.86	— 0.39

Lastra T 148 - fessura radiale. Distanza centrale (raggio del sole = 1) = 0.380 ovest. Regione da λ 4679 a λ 4746.

12	2 a 3	— 2.12	+ 2.48
7	4 a 6	— 1.91	+ 2.63

Ora se l'andamento generale conferma di massima la diminuzione di velocità all'aumentare dell'intensità delle righe, come bene ha dimostrato St. John, è altrettanto vero che questo andamento non è regolare e che le deviazioni date da singole righe sono notevoli, in relazione probabilmente, non soltanto con l'intensità delle righe, ma col loro livello d'origine e la serie a cui appartengono. Sorge quindi la necessità di scegliere e separare le righe secondo i moderni criteri spettroscopici per una più esatta interpretazione delle particolarità di questi movimenti.

Se consideriamo inoltre per queste due macchie, che indico con 2 e 3, e per l'altra studiata da Evershed (Nr. 7223) di Greenwich) che indico con 1, le pendenze calcolate da Mancinelli, si trova un aumento di velocità con diminuzione di pendenza:

Macchia	Inclinazione media	Velocità media Km/sec.
1	12°	2.0
2	29	1.0
3	2	6.6

Se tale andamento sia effetto del caso per queste tre macchie o se corrisponda ad una vera condizione esistente nelle macchie, soltanto ulteriori e più estese ricerche potranno dirlo. Noto soltanto che la macchia 3, passata al meridiano centrale il 29 giugno 1926, era molto attiva e da un giorno all'altro il nucleo cambiava notevolmente di forma. Certo, attività e dimensioni della macchia, come forse pure la sua età, sono in relazione con questi

moti, come lo sono i moti propri in longitudine ⁽¹⁾, che possono venire interpretati con variazioni di livello.

Sulle stesse lastre sopra elencate, gli spettrogrammi presi sulle macchie con fessura tangenziale, mostrano in generale dei piccoli spostamenti inferiori al chilometro per secondo: così ad esempio sulla lastra 146 la stessa macchia attiva di cui si è parlato, trovandosi a -27° di longitudine all'est del meridiano centrale, presenta tutte le righe leggermente incurvate verso il rosso, mentre dopo il meridiano centrale (lastra 148) a $+12^\circ$ di longitudine ovest, le righe presentano un notevole allargamento (effetto Zeemann) ed un lieve spostamento verso il violetto. Infine sulla lastra 165 la macchia passata al meridiano centrale il 29 luglio 1926, trovandosi a $+45^\circ$ di longitudine ovest, con nucleo irregolare, mostra lievi spostamenti al bordo nord di allontanamento, al bordo sud di avvicinamento, probabili componenti di un moto vorticoso. Simili risultati sono stati trovati anche da Evershed ⁽²⁾, ma è necessario estendere anche in questo caso le osservazioni su più vasta scala per decidere se essi siano del tutto irregolari o presentino qualche carattere sistematico e in relazione con i campi magnetici ⁽³⁾.

(1) « Monthly Notices », vol. 85, p. 553, 1925.

(2) « Kodaik. Obser. Bulletin », n. 51, p. 178, 1916.

(3) Cfr. HALE, *The law of sun-spot polarity*, « Proceed. Nat. Ac. Sc. », vol. 10, p. 54, 1924.

Patologia. — *L'azione del radio sul sarcoma del ratto (tipo Jensen).* Memoria del Socio G. TIZZONI e G. DE ANGELIS.

Sarà pubblicata nel vol. II delle Memorie.

Biologia. — *Chemiotattismo e fagocitosi nelle imitazioni dei leucociti.* Nota⁽¹⁾ del Socio straniero L. A. HERRERA⁽²⁾.

Uno dei fenomeni considerato soprattutto come vitale, la fagocitosi, è stato imitato con un'approssimazione sufficiente nel mio laboratorio.

Esperienze. Avendo osservato che le gocce di acido acetico anidro hanno un effetto attrattivo sulle amebe imitate colla gasolina e l'olio d'olivo addizionate di soda caustica (vedi Memoria precedente)⁽³⁾, ho eseguito le seguenti esperienze:

N. 5235, 17 dicembre 1925.

Acido acetico anidro: 25 cm.³; acqua 25 cm.³; violetto di metile: tracce. Questa soluzione si aggiunge a gocce alle amebe imitate con gasolina 100 cm.³; olio d'olivo 50 cm.³; da una parte e dall'altra soda caustica in cilindri 14 gr.; acqua 100 cm.³; nero per sapone 1 gr. Si versano 60 cm.³ della prima in una bacinella di porcellana di 17 × 4 con una lastra di porcellana nel fondo di 10 × 12.5 × 0.3.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio degli Alti Studi biologici di Messico.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1926.

(3) « Memorie fisiche », vol. II, n. VII.

Ac. acetico anidro	Risultati
Acqua aggiunta 5 cm. ³	Id. con una grande goccia le palpitazioni hanno una grande ampiezza.
» » cm. ³ 10 (0.7 %)	Id. Le amebe artificiali vengono attirate e riprecipitano sulla goccia colla velocità del lampo.
» » 10	La velocità diminuisce.
» » »	Id. id.
» » »	Id. id.
» » »	Quasi niente.

A 0.5 % d'acido acetico l'assorbimento delle amebe è quasi nullo: la soluzione arrossa ancora il tornasole. Si aggiungono poco a poco 70 cm.³ di acqua; a 0.3 % di acido acetico non vi è più alcun assorbimento delle amebe. Questo coefficiente è forse il primo che trovo in una ricerca di plasmodia, lavorando con esseri imitati, mentre che simili dati numerici sono stati sempre segnalati per cellule od organismi naturali. La contrazione dei vacuoli di queste amebe è pure misurabile ma di una grande irregolarità.

Bisogna osservare che la soda produce anche delle palpitazioni coll'acido acetico a causa della produzione di correnti di diffusione. Col microscopio si osserva un'agitazione assai intensa delle palpitazioni delle gocce ameboidi e sparizione improvvisa di ogni movimento appena che esse sono inghiottite dall'acido nel quale si disciolgono istantaneamente per una specie di fagocitosi e nutrizione, tutto ciò avviene come se la goccia fosse formata da un protoplasma, acqua, ed un fermento o diastase digestiva, l'acido acetico.

Ho fatto allora altre esperienze con altre sostanze.

- N. 5237. Acido cloridrico . . . Attrazione e palpitazione meno intense. Si fa una fotografia. (fig. 4).
- N. 5388. Acido nitrico colorato col nero da sapone . . . Attrazione senza palpitazione.
- N. 5389. Acido solforico . . . Attrazione assai intensa ed evidente di tutte le amebe imitate vicine e lontane, con produzione di una corrente di questi artefatti verso l'acido, che, come è noto, è molto più energico dell'acido acetico (fig. 1).
- N. 5240, 23 dicembre 1925.
Acido cromico 1 % . . . Attrazione intensa senza palpitazione.
- N. 5241, 23 dicembre 1925.
Acido borico soluzione satura Id. id.

N. 5242, 23 dicembre 1925.

Acqua distillata (per confronto) Le amebe entrano nella goccia d'acqua, si muovono nel suo interno. Non sono attratte così presto.

N. 5245. Acido citrico. Attrazione assai intensa come nelle esperienze di W. Pfeffer (1).

Qui debbo pur notare che il metodo del tubo capillare nel quale dovrebbero penetrare i microrganismi non dà alcun risultato evidente colle mie amebe ed infusori imitati, poichè essi sono più densi dei liquidi esterni e per conseguenza incapaci di salire sulle pareti interne del tubo che è immerso nella gasolina. Malgrado tutti i miei sforzi non riesco a farli penetrare. Inoltre essi sono spesso animati di un'eccessiva velocità e passano rapidamente davanti a tale trappola senza entrarvi.

ESPERIENZE CON DIVERSI SALI N. 5244.

Acetato di sodio. Niente. La causa è che non vi è alcuna combinazione tra la soda delle amebe ed il sale.

N. 5245

Acetato di zinco Alcune imitazioni globulari con infusori entrano nella goccia senza disciogliersi e proseguono i loro movimenti come nell'acqua.

N. 5246

Ac. carbonico (acqua di Seltz) . Attrazione e soluzione poco intense. Si dovrà provare l'acqua di mare e le variazioni del PH.

N. 5247

Acido metafosforico Assorbimento assai intenso anche da 1 cm. di distanza. Ciò è molto interessante per la funzione biologica dell'acido fosforico.

Gasolina 50 (100 per 50 di olio)

Ac. metafosforico 5 gr. in 50

di acqua Assorbimento assai intenso.

Si diluisce con acqua.

250 cm.3 Id. id. id.

250 cm.3 Id. id. id.

250 cm.3 Assorbimento. La goccia acida assorbe da principio una parte dell'infusorio artificiale e poi l'altra.

250 cm.3 Assorbimento assai intenso.

250 cm.3 Id.

(1) *Lokomotorische Richtungsbewegungen der chemische Reize*. Unter. aus dem Bot. Inst. zu Tübingen, I, 1884.

250 cm. ³	Assorbimento meno. Ancora si osservano palpitazioni e soluzione.
250 cm. ³	Assorbimento.
250 cm. ³	Id.
250 cm. ³	Le amebe si muovono nella goccia acida e vi si disciolgono assai lentamente.

A 0.2 % vi è ancora una piccola attrazione.

N. 5248. A 100 gr. di questa soluzione acida si aggiunge della gomma arabica per ritardare il movimento delle amebe gr. 31.

Indi vi si aggiungono 10 cm.³ della soluzione di soda al 14 % e successivamente 15 cm.³. I movimenti ameboidi sono lenti e si osserva la formazione di pseudopodi ascendenti come nelle amebe naturali.

L'aggiunta della gomma ritarda le correnti osmotiche e dà delle forme d'amebe più nette con pseudopodi più lunghi.

N. 5249. Si tenta di aggiungere proteina, bianco d'ovo p. es., per completare lo studio del chemiotattismo, ma le amebe si paralizzano immediatamente, forse per la formazione del sapone calcareo col calcio del bianco, dato che questo sapone è impermeabile alla gasolina oleosa.

N. 5250. La gomma dà dei risultati migliori e le amebe gommose e oleose fagocitano i piccoli cristalli d'acido bórico.

Soluzione di soda al 14 %: 25 cm.³; acqua 100 cm.³; gomma arabica 20 gr. Si discioglie all'ebullizione. Gasolina 100 cm.³; olio 50 cm.³.

Alcuni pezzettini di carbone vegetale vengono impregnati di acido acetico, e se ne depositano alcuni frammenti con una pinza presso le amebe oleose.

Il carbone ha il vantaggio di essere assorbente e di dare delle immagini nette alla fotografia. Le amebe furono ottenute con la seguente formula: acqua 100; gomma arabica 80 gr.; soda caustica 14 gr.; gasolina 100 gr.; olio 50 gr. I piccoli frammenti di carbone sono attirati, e poi producono delle figure mitosiche esercitando delle trazioni, nel senso opposto in ciascuna ameba. Ciò conferma i miei risultati col collodio ed un'aspirazione bipolare con una pompa di acqua (1).

N. 5254. Si aggiungono 16 gr. di gomma.

Un frammento di carbone da 7 mm. impregnato di acido acetico e posato alle 4^h e 40' pomeridiane a 1 cm. dal bordo della lastra di porcellana. Fotografia a 4^h 45' (fig. 2); alle 5^h il frammento si trova a 1.5 cm. dal bordo.

In un altro caso la fagocitosi è stata completa. Il fagocita artificiale era globuloso e si è prolungato col bordo sul carbone (fig. 3). Col microscopio vi si osserva in maniera evidente che vi è una corrente di granulazione che va dal carbone al fagocita e che in parte si riflette. La gomma densa (96 % di gomma e 14 di soda) dà dei risultati ottimi.

Un altro globulo si allungò assai e si impadronì del carbone acetico: è evidente che la chemiotassi è dovuta a correnti.

Le gocce senza un frammento vicino non si deformano durante lo stesso tempo: ai bordi non vi sono correnti, ma là dove vi sono dei frammenti la produzione di turbini è intensa e la goccia si avvicina al frammento fino a toccarlo. In una goccia di 15 mm. vi sono delle figure mitosiche assai nette, dei filamenti vanno da un frammento all'altro, imitando i frammenti le sfere attrattive.

Colla gelatina queste figure si conservano. La gomma dragante dà delle magnifiche amebe in movimento ed è preferibile alla gomma arabica. Vedi fig. 5 e 6.

(1) Questi « Rendiconti », 1925, I, p. 158.



Fig. 1.

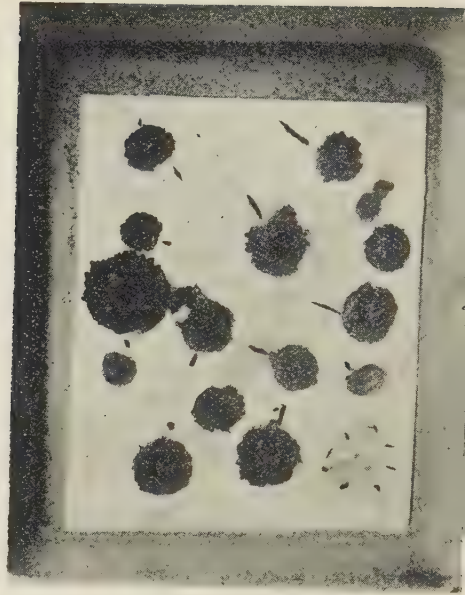


Fig. 2.

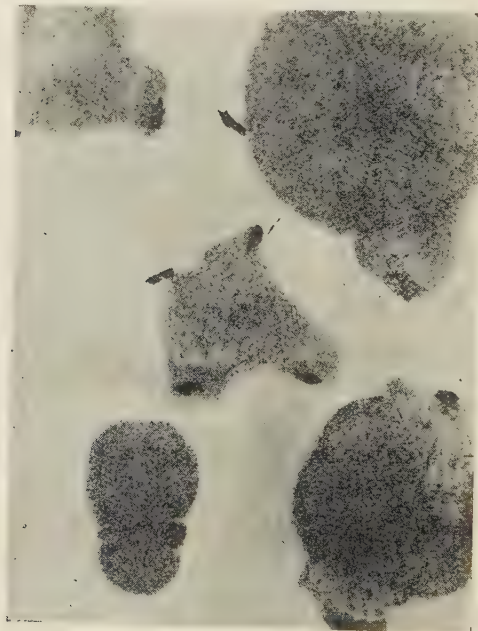


Fig. 3.

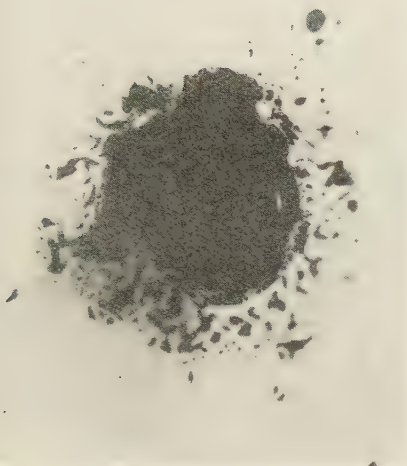


Fig. 4.

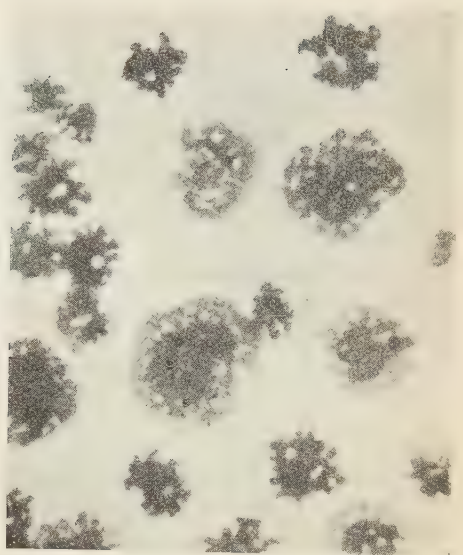


Fig. 5.

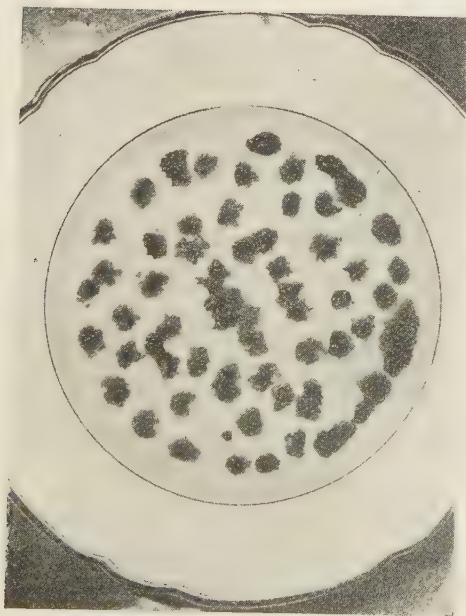


Fig. 6.

CONSIDERAZIONI FINALI.

Queste esperienze con quelle ben note di Rhümbler mostrano la funzione importante della tensione superficiale e le sue modificazioni nel movimento delle amebe e nella fagocitosi: mentre precedentemente si affermava semplicemente che questa tensione più o meno modificata era la causa dei fenomeni, ora sappiamo invece senza alcun dubbio che la tensione superficiale viene modificata dalla pressione delle correnti di diffusione e combinazione chimica che si producono tra l'olio, fluidificato colla gasolina o altro solvente, e la soda caustica delle gocce di acqua alcalina, ricoperte da una membrana di sapone. Queste correnti premono contro la membrana come un dito sopra una membrana elastica, rompendola anche spesso, per quanto essa si riformi successivamente.

La fagocitosi dovrà essere considerata d'ora in avanti come un fatto meccanico-chimico-fisico. L'acido acetico agisce come *anticorpo* o *opsonina* che determina la chemiotassi delle amebe oleose, sensibili alle tracce di acidi. Probabilmente nel caso dei leucociti naturali si producono delle correnti simili fra essi ed i batteri.

Per ciò che si riferisce ai mezzi di difesa dell'organismo e la batteriologia queste esperienze hanno una grandissima importanza e bisognerà ora più che mai cercare di conoscere ed isolare le sostanze dei leucociti e dei microbi e studiare in vitro *tutte le sostanze capaci di produrre delle correnti attive e delle deformazioni delle amebe, per applicarle in seguito nella terapia umana*. Potrebbe essere questa un'applicazione inattesa delle esperienze di plasmogenia.

Per ciò che si riferisce ai movimenti del protoplasma, ai movimenti ameboidi e dei leucociti, ed alle correnti osservate nei peli della *Tradescantia* p. es. io credo che la spiegazione sia che delle correnti premendo sulla membrana, o l'ectoplasma, produrranno dei movimenti, delle retrazioni anche delle contrazioni, segmentazioni, fecondazioni e divisione cellulari. Tuttavia tutto non è qui dimostrato; però è molto probabile che noi ci troviamo vicini alla verità, e che io ho avuto ragione proclamando che la vita consiste nelle correnti osmotiche determinate da cause diverse⁽¹⁾.

La spiegazione delle magnifiche amebe microscopiche prodotte colla gasolina e l'olio per iniezioni di gocce d'acqua alcalina, va ricercata nel fatto che l'olio fluidificato dalla gasolina e penetrando rapidamente nelle tasche osmotiche produce le correnti, ed i movimenti. Ciò dovrà anche essere utilizzato in future applicazioni terapeutiche, in quanto che l'eccipiente dei medicamenti favorirà la loro penetrazione attraverso le membrane cellulari.

(1) HERRERA, *Biologie et plasmogénie*, W. Junk, Berlin, 1906, p. 3.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sullo scostamento geodetico.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nell'ultimo fascicolo del « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » (aprile 1926), è apparso un breve articolo del prof. Levi-Civita, collo stesso titolo del presente scritto, ove sono esposti i principali risultati a cui è pervenuto in una Memoria in corso di stampa nel vol. 97 dei « Mathematische Annalen ».

Avendo cercato di ritrovare i risultati enunciati dal Levi-Civita, mediante i metodi vettoriali, coi quali si opera direttamente sullo spazio curvo effettivo, invece che sullo spazio euclideo rappresentativo (come si fa abitualmente), metodi che ho esposto già alcuni anni addietro ⁽²⁾ e che si trovano sviluppati ampiamente, con varie applicazioni, nell'opera: C. Burali-Forti et T. Boggio, *Espaces courbes; Critique de la Relativité* (Sten Editrice, Torino, 1924), ho rilevato che i risultati in questione si possono, coi metodi accennati, ritrovare immediatamente, e anzi si può stabilire per lo scostamento geodetico negli spazi curvi una importante relazione, analoga a quella stabilita da Jacobi per le geodetiche di una superficie dello spazio ordinario.

Dovendo citare spesso, nel seguito, l'opera sopra ricordata, la indicherò brevemente con *Espaces*.

1. Consideriamo una varietà, o spazio curvo, C_n ad n dimensioni (la quale può sempre immaginarsi immersa in uno spazio euclideo E_N a un numero N di dimensioni sufficientemente grande) e su di essa si abbia una geodetica B , che supponiamo descritta da un punto generico Q ; indicheremo con s l'arco di B e porremo $t = dQ/ds$.

(1) Nella seduta del 20 giugno 1926.

(2) T. BOGGIO, *Geometria assoluta degli spazi curvi*, Nota I e II, « Rendiconti » di questa Accademia, serie 5^a, vol. XXVIII, 1^o sem. 1919; T. BOGGIO, *Sulla geometria assoluta degli spazi curvi*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LIV, a. 1918-19.

Come è noto (*Espaces*, p. 142), l'equazione differenziale di tale geodetica è espressa da

$$(1) \quad d\mathbf{t} = 0,$$

ove $d\mathbf{t}$ è il differenziale primo, relativo allo spazio curvo, del vettore \mathbf{t} , cioè è la proiezione sullo spazio curvo, dell'ordinario differenziale primo, calcolato nello spazio euclideo E_N (*Espaces*, p. 125).

Indichiamo poi con g un'altra geodetica di C_n , infinitamente vicina alla geodetica B (*base*) e sia stabilita una corrispondenza fra i punti Q di B e i punti Q_1 di g , tale che il vettore

$$(2) \quad \mathbf{u} = \delta Q = Q_1 - Q$$

sia pure infinitesimo e precisamente *normale* al vettore \mathbf{t} , cioè:

$$(3) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{t} = 0.$$

Vogliamo trovare l'equazione (equazione alle variazioni) a cui deve soddisfare il vettore \mathbf{u} ; la cosa è subito fatta, perchè dalla (3) si ha differenziando e badando alla (1): $d\mathbf{u} \times \mathbf{t} = 0$, cioè: $d\delta Q \times dQ = 0$, e poichè (*Espaces*, p. 69) $d\delta Q = \delta dQ$, essa equivale alla $\delta(dQ)^2 = 0$, cioè $\delta ds = 0$; perciò ds può ritenersi costante ($d^2s = 0$), nel qual caso la (1) equivale alla $d^2Q = 0$, che porge $\delta d^2Q = 0$. Dopo ciò, dalla (2) si ha: $d^2\mathbf{u} = d^2\delta Q$, che possiamo scrivere, tenendo conto della $\delta d^2Q = 0$:

$$(4) \quad d^2\mathbf{u} = d^2\delta Q - \delta d^2Q;$$

questa è la cercata equazione alle variazioni e, come vedremo appresso, equivale alle equazioni (I) assegnate dal Levi-Civita nella sua Nota citata.

2. Dalla (4) si può dedurre agevolmente una conseguenza molto notevole.

Facciamo il prodotto interno della (4) per $\mathbf{u} = \delta Q$ ed avremo:

$$\mathbf{u} \times d^2\mathbf{u} = \delta Q \times (d^2\delta Q - \delta d^2Q),$$

ma se K è la curvatura riemanniana dello spazio curvo C_n in Q e secondo la giacitura dei vettori dQ e δQ è noto (*Espaces*, p. 153) che il secondo membro vale $-K \{ (dQ)^2 (\delta Q)^2 - (dQ \times \delta Q)^2 \}$, perciò avremo:

$$\mathbf{u} \times d^2\mathbf{u} = -K \{ (dQ)^2 (\delta Q)^2 - (dQ \times \delta Q)^2 \};$$

ora, poichè s è l'arco della geodetica B , si ha $(dQ)^2 = ds^2$, e essendo inoltre lo spostamento δQ *normale* alla geodetica B in Q , cioè $dQ \times \delta Q = 0$, risulta, ricordando anche la (2), la relazione semplicissima:

$$(a) \quad \mathbf{u} \times d^2\mathbf{u} = -K \mathbf{u}^2 ds^2.$$

Trasformiamo ancora questa formula. Poniamo

$$(b) \quad \mathbf{u} = y \mathbf{t}_1,$$

ove \mathbf{t}_1 è un vettore unitario tangente in Q all'arco QQ_1 , che ora supponiamo essere arco di geodetica; allora è chiaro che y è la lunghezza del vettore $\mathbf{u} = Q_1 - Q$, cioè dell'arco QQ_1 , ossia lo *scostamento* geodetico normale, fra la geodetica base B e la geodetica infinitamente vicina g . Ricordando poi che lungo l'arco di geodetica QQ_1 si ha, analogamente alla (1), $d\mathbf{t}_1 = 0$, si conclude prendendo il differenziale, relativo allo spazio curvo, della (b), e notando che per esso vale la regola ordinaria di differenziazione:

$$d\mathbf{u} = dy \cdot \mathbf{t}_1,$$

e differenziando ancora:

$$d^2\mathbf{u} = d^2y \cdot \mathbf{t}_1;$$

sostituendo nella (a) risulta:

$$d^2y = -Ky ds^2,$$

ossia

$$(\alpha) \quad \frac{d^2y}{ds^2} + Ky = 0.$$

Questa è l'equazione che volevamo ottenere e che ha ovviamente importanza preponderante nello studio della stabilità della geodetica g .

Nel caso di una superficie dello spazio ordinario la curvatura di Riemann coincide, com'è ben noto (*Espaces* ⁽¹⁾, p. 158), colla curvatura di Gauss, e allora la (α) risulta identica all'equazione data da Jacobi per lo scostamento geodetico normale sopra una superficie ordinaria ⁽²⁾.

3. Essendo \mathbf{t} il vettore unitario definito da $\mathbf{t} = dQ/ds$, è facile vedere che un integrale primo della (4) è dato da:

$$(5) \quad \mathbf{t} \times d\mathbf{u}/ds = l, \quad (l = \text{costante}).$$

(1) In quest'opera è anzi mostrato (p. 159) che le espressioni della curvatura di Riemann e di Gauss derivano da una *unica* formula, contenente differenziali di 3° ordine, secondochè tali differenziali sono relativi alla superficie considerata, oppure allo spazio ordinario ambiente.

(2) Il prof. Levi-Civita mi fa gentilmente osservare che, concettualmente, la (α) si può ritenere inclusa nell'equazione di Jacobi, perchè date le geodetiche B e g si può considerare la striscioline (di 2° ordine) formata dagli ∞^1 archetti QQ_1 normali a B , come una superficie ordinaria σ , la quale contiene dunque B e g , e ad essa è quindi applicabile la formula di Jacobi, in quanto B e g seguitano ad essere geodetiche anche su σ ; e la curvatura di Gauss della superficie σ lungo B coincide colla curvatura di Riemann di C_n in Q secondo la giacitura determinata da dQ e δQ .

Infatti, sviluppando l'identità $d\delta(dQ)^2 - \delta d(dQ)^2 = 0$, si ha:

$$dQ \times (d^2\delta Q - \delta d^2 Q) = 0,$$

cioè, per la (4), $dQ \times d^2 u = 0$, che può scriversi:

$$t \times d^2 u = 0 \quad ; \quad \text{d'altra parte} \quad dt \times du = 0,$$

perciò sommando si ha: $d(t \times du) = 0$, da cui segue la (5).

La (5), a sua volta, può integrarsi e si ha:

$$(6) \quad t \times u = ls + c \quad , \quad (c = \text{costante}).$$

Infatti, si osservi che $u \times dt/ds = 0$, e sommando colla (5) risulta $d(t \times u) = lds$, di qui si deduce senz'altro la (6).

La (3) mostra quindi che si deve ritenere qui $l = c = 0$.

Le (5), (6) equivalgono, come ora vedremo, agli integrali (II) e (III) della Nota del prof. Levi-Civita.

4. Le formule (4), (5), (6) sono relative allo spazio curvo *effettivo*. Se ora le trasformiamo, con noti ed ovvii procedimenti, facendo figurare gli elementi dello spazio euclideo *rappresentativo*, si ottengono le citate formule del prof. Levi-Civita.

Se P è il punto dello spazio euclideo E_n , corrispondente al punto Q di C_n , e si considera (*Espaces*, p. 117) l'omografia invertibile $\beta = dQ/dP$, si ha:

$$\beta dP = dQ \quad , \quad \beta^{-1} dQ = dP \quad , \quad \beta^{-1} \delta Q = \delta P,$$

perciò se si pone $\beta^{-1} u = \xi$, è chiaro che $\xi = \delta P$ è un vettore (infinitesimo) ben determinato di E_n ; ne segue $u = \beta \xi$, da cui, per formule note (*Espaces*, p. 64):

$$(7) \quad du = \beta d\xi + d\beta \cdot \xi = \beta(d\xi + \lambda_2 dP \cdot \xi),$$

ove λ_2 è una omografia di 2° ordine, che riassume i simboli di Christoffel, a 3 indici, di 2ª specie (*Espaces*, p. 101).

Consideriamo ora il vettore **b** definito da

$$(8) \quad b = \frac{dP}{ds} = \beta^{-1} \frac{dQ}{ds} = \beta^{-1} t;$$

questo vettore non è però unitario, perchè $t = \beta b$, quindi $\beta b \times \beta b = 1$, da cui $b \times \alpha b = 1$, avendo posto $\alpha = K\beta \cdot \beta$.

Poichè $dP = b ds$, la (7) si scrive:

$$(9) \quad du = \beta \left(\frac{d\xi}{ds} + \lambda_2 b \xi \right) ds,$$

e se si pone, per brevità,

$$(10) \quad D\xi = \frac{d\xi}{ds} + \lambda_2 \mathbf{b}\xi = \frac{d\xi}{ds} + \lambda_2 \xi \mathbf{b},$$

avremo:

$$(11) \quad d\mathbf{u} = \beta D\xi \cdot ds.$$

Il vettore $D\xi$ definito dalla (10) coincide con quello definito dalle (1) del Levi-Civita; la (11) mette in chiaro che tale vettore non è una derivata, ma applicando ad esso l'omografia β si ottiene una derivata. Tale vettore, dipende da λ_2 e quindi da α , e perciò dalla rappresentazione che si fa dello spazio curvo sullo spazio rappresentativo.

La (11) mostra ancora la maggiore semplicità che si ha operando nello spazio curvo effettivo, anzichè su quello rappresentativo; infatti l'espressione $\beta D\xi ds$ che proviene dall'uso dello spazio rappresentativo è assai più complicata della $d\mathbf{u}$, che è il differenziale nello spazio curvo effettivo.

La (11) può scriversi: $d(\beta\xi) = \beta D\xi \cdot ds$, quindi:

$$d^2(\beta\xi) = d(\beta D\xi) \cdot ds = \beta D^2\xi \cdot ds^2,$$

ossia:

$$(12) \quad d^2\mathbf{u} = \beta D^2\xi \cdot ds^2;$$

anche di qui risulta la maggiore semplicità di $d^2\mathbf{u}$ (che è il differenziale secondo nello spazio curvo) rispetto alla $\beta D^2\xi ds^2$ relativa allo spazio rappresentativo.

Ciò premesso, se ci si riferisce allo spazio rappresentativo, la (4) può scriversi, per note formule (*Espaces*, p. 70):

$$d^2\mathbf{u} = -\beta (k^* - 1) \lambda_3 dP \cdot \delta P \cdot dP,$$

ove $(k^* - 1)\lambda_3$ è un'omografia di 3° ordine, che riassume i simboli di Riemann, a 4 indici, di 2ª specie (*Espaces*, p. 102), e allora dalla (12) si trae, ricordando la (8):

$$(13) \quad D^2\xi = -(k^* - 1) \lambda_3 \mathbf{b}\xi \mathbf{b},$$

la quale coincide colla (I) stabilita dal Levi-Civita; essa ha forma assai meno semplice della corrispondente (4) relativa allo spazio effettivo.

Dalla (8) si deduce, come si è già osservato, $\mathbf{t} = \beta \mathbf{b}$, perciò sostituendo nella (5) si ottiene, in virtù della (11):

$$\beta \mathbf{b} \times \beta D\xi = l, \quad \text{cioè} \quad \alpha \mathbf{b} \times D\xi = l,$$

che coincide colla (II) del Levi-Civita.

Analogamente, dalla (6) si trae:

$$\alpha \mathbf{b} \times \xi = l s + c,$$

che è identica alla (III) del Levi-Civita.

Osservazione. — Dalla (7) si deduce ancora:

$$d\mathbf{u} = \beta \left(\frac{d\xi}{dP} + \lambda_2 \xi \right) dP,$$

ma:

$$d\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{dQ} dQ = \frac{d\mathbf{u}}{dQ} \beta dP,$$

perciò risulta:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dQ} = \beta \left(\frac{d\xi}{dP} + \lambda_2 \xi \right) \beta^{-1};$$

l'omografia entro parentesi corrisponde all'ordinario sistema doppio derivato controvariante del vettore ξ . Come ben si vede, tale omografia equivale all'omografia assai più semplice $d\mathbf{u}/dQ$, che è l'ordinaria derivata considerata nello spazio curvo.

Analogamente per le derivate covarianti, ecc.; quando si opera nello spazio effettivo esse non intervengono affatto, perchè si presentano solo le derivate ordinarie.

5. In ciò che precede si è supposto che la corrispondenza fra i punti Q della geodetica base B e i punti Q_1 della geodetica g fosse determinata dalla legge (3) di normalità del vettore $Q_1 - Q$ alla base B .

Vediamo brevemente come si modifica la (4) se la corrispondenza accennata si determina con legge diversa dalla normalità espressa dalla (3).

Poniamo:

$$(14) \quad l = (\delta ds)/ds.$$

cioè sia l l'allungamento unitario di un arco elementare della geodetica g rispetto all'omologo della base B ; si ha facilmente: $l = \mathbf{t} \times d\mathbf{u}/ds$, come risulta differenziando col simbolo δ la relazione $ds^2 = dQ^2$.

Ne segue, in virtù della (1): $l = d(\mathbf{u} \times \mathbf{t})/ds$, quindi, se $\mathbf{u} \times \mathbf{t}$ non è costante, si ha $l \neq 0$, e viceversa.

Si ha poi:

$$\delta d^2s = d(\delta ds) = d(l ds),$$

quindi:

$$(15) \quad \delta d^2s = dl \cdot ds + l d^2s;$$

ne viene che se $d^2s = 0$, si ha $dl = 0$, e viceversa.

Inoltre osserviamo che per una funzione generica f si ha:

$$(16) \quad \delta \frac{df}{ds} = \frac{d\delta f}{ds} - l \frac{df}{ds};$$

basta infatti sviluppare l'identità $\delta df = d\delta f$, e badare alla (14).

Ciò premesso, osserviamo che la (1) può scriversi:

$$d^2Q - (dQ/ds) d^2s = 0,$$

da cui, per la (16):

$$\delta d^2Q - \left(\frac{d\delta Q}{ds} - l \frac{dQ}{ds} \right) d^2s - \frac{dQ}{ds} \delta d^2s = 0,$$

ovvero, per la (15):

$$\delta d^2Q - (d\mathbf{u}/ds) d^2s - dl \cdot dQ = 0,$$

quindi, invece della (4), avremo:

$$(17) \quad d^2\mathbf{u} - (d\mathbf{u}/ds) d^2s = d^2\delta Q - \delta d^2Q + dl \cdot dQ,$$

ove il 1° membro equivale ad $\mathbf{u}''_l ds^2$, essendo \mathbf{u}''_l la proiezione sullo spazio curvo della ordinaria derivata seconda $d^2\mathbf{u}/ds^2$, calcolata nello spazio euclideo E_N .

Riferendoci allo spazio rappresentativo, si conclude senz'altro che al 2° membro della (13) va aggiunto il termine $(dl/ds)\mathbf{b}$, il quale risultato pure concorda con quello enunciato dal Levi-Civita.

Procedendo come nel n. 3 si deduce facilmente che la (17) ammette un integrale primo dato da

$$\mathbf{t} \times d\mathbf{u}/ds = l + h, \quad (h = \text{costante}),$$

e confrontando col valore di l trovato poc'anzi, si vede che si deve ritenere $h = 0$, ecc.

Geometria. — *Ancora sulla geometria delle superficie considerate nello spazio rigato.* Nota di E. BOMPIANI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Riprendiamo ⁽²⁾ la rappresentazione di una superficie σ di S_3 sulla iperquadrica Q di S_5 che rappresenta le rette di S_3 .

Siano u, v le asintotiche (non rettilinee) di σ ; le coordinate $x_i(u, v)$, ($i = 1, \dots, 4$), di un punto P di σ soddisfino al sistema

$$x_{uu} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + \alpha x \quad , \quad x_{vv} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + \nu x.$$

Alla tangente asintotica u ($dv = 0$) in P corrisponde su Q un punto p : il suo luogo è una superficie Φ con un doppio sistema coniugato (u, v) ; analogamente la tangente asintotica v ($du = 0$) in P si rappresenta in un punto p^* di Q e il suo luogo Φ^* è la trasformata di Laplace di Φ secondo le linee u .

Lo spazio S_4 2 — osculatore in p a Φ (cioè contenente gli intorni del 1° e del 2° ordine di p su Φ) è tangente a Q in p^* ; e lo S_4^* 2 — osculatore a Φ^* in p^* è tangente a Q in p .

2. LE FORME INVARIANTI PER APPLICABILITÀ PROIETTIVE. — Sia p' un punto di una curva di Φ uscente da p in direzione du/dv ; e p'_1 (o p'_2) il punto d'intersezione della linea u (o v) uscente da p con la linea v (o u) uscente da p' (sicchè p, p'_1, p', p'_2 sono i vertici di una maglia formata con le linee u e v).

La retta $p'_1 p'_2$ tagli S_4 ed S_4^* rispettivamente in T e T^* .

Il termine principale del birapporto (p'_1, p'_2, T^*, T) , quando $p' \rightarrow p$ sulla curva, dipende soltanto dalla sua direzione in p e vale $1/24$ della forma quadratica normale di Fubini $\varphi_2 = 2 \beta \gamma du dv$.

Passo a costruire la forma cubica normale di Fubini, o meglio le due FORME ELEMENTARI $\beta du^2/dv$ e $\gamma dv^2/du$, dalle quali si ottengono subito le forme normali di Fubini ⁽³⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1926.

(2) Vedi la mia Nota: *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato*, « Rend. Acc. dei Lincei », s. VI, vol. III, 1926.

(3) Una genesi di queste forme in S_3 e la deduzione degli invarianti per applicabilità proiettive delle superficie e delle curve su di esse vedasi nella mia Nota: *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie*, in corso di stampa nel « Boll. Unione Matem. Italiana », 1926.

La retta $p'_1 p'$ tagli S_4^* in T_1^* e sia M un punto arbitrario di essa (non tendente a p con p').

Il termine principale del birapporto $(p'_1 p' T_1^* M)$, quando $p' \rightarrow p$ come sopra, vale $1/12$ del quadrato di $\beta du^2/dv$.

Scambiando p con p^* , e in conseguenza gli altri elementi che intervengono nella costruzione, si ha $\gamma dv^2/du$: la somma delle due forme elementari è l'elemento lineare proiettivo di Fubini.

Infine: se la retta $p'_1 p'$ incontra S_4 in T_1 ed M è un punto di essa si ha, indipendentemente dalla posizione limite di M (purchè $\neq p$)

$$\lim_{p' \rightarrow p} (T_1 p'_1 p'_1 M) = -\beta du^3/\gamma dv^3.$$

Questi risultati si enunciano facilmente nello S_3 di σ .

3. SISTEMI PLANARI DI CURVE SULLE SUPERFICIE A PUNTI PLANARI. — Per dare un altro esempio della fecondità del metodo iperspaziale mi propongo di trovare il significato geometrico di certi sistemi molto generali di curve invarianti di σ dei quali nulla si conosce fuorchè l'equazione (scritta da Fubini).

Occorre richiamare una nozione relativa alle superficie che posseggono, come Φ e Φ^* , un doppio sistema coniugato (superficie a punti planari non parabolici, secondo E. E. Levi ⁽¹⁾).

Per ogni punto della superficie ed entro lo S_4 — osculatore ivi sia dato un piano (piano d'appoggio) non incidente in una retta il piano ivi tangente alla superficie.

Esiste allora sulla superficie un sistema planare ∞^2 di curve tali che i piani osculatori a quelle passanti per un punto incidono, in rette, il relativo piano d'appoggio.

Si applichi ciò a Φ (e a Φ^*). Al piano d'appoggio in p corrisponde, nello S_3 di σ , una quadrica d'appoggio Q_1 contenente le due tangenti asintotiche di σ in P . Ad una curva di Φ corrisponde la rigata delle tangenti asintotiche u uscenti dai punti di una curva di σ ; al piano a quella osculatore in p corrisponde il regolo osculatore a questa rigata in P (cioè lungo la generatrice per P): la quadrica cui esso appartiene si dirà quadrica asintotica osculatrice in P alla curva (un'altra quadrica asintotica osculatrice, che si dirà del 2° sistema, si ottiene scambiando le tangenti asintotiche u con le v).

Ad un sistema planare su Φ corrisponde su σ un sistema ∞^2 di curve così definito:

Sia data in ogni punto P di σ una (generica) quadrica Q_1 contenente le tangenti asintotiche in P . Le quadriche asintotiche (del primo sistema) oscula-

(1) Vedi la mia Nota: Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari, « Boll. Un. Mat. Ital. », a. IV, 1925.

trici in P alle curve del sistema che vi passano segano ulteriormente (cioè fuori delle tangenti asintotiche in P) Q_1 in rette.

In altri termini: ciascuna di queste quadriche sega Q_1 in un quadrilatero d'appoggio di cui fan parte le tangenti asintotiche in P.

4. SISTEMI INVARIANTI DI CURVE SOPRA UNA SUPERFICIE DI S_3 . — Una proprietà notevole dei sistemi ora definiti è la seguente:

Le quadriche asintotiche del 2° sistema osculatrici in P alle curve ora definite tagliano in quadrilateri sghembi una stessa quadrica Q_2 , completamente individuata da Q_1 .

Insomma nella definizione di questi sistemi di curve si possono scambiare i due sistemi di asintotiche purchè alla quadrica d'appoggio Q_1 (in ogni punto) se ne sostituisca un'altra, ben determinata, Q_2 .

L'equazione differenziale dei sistemi di curve ora definiti è del tipo

$$(*) \quad \beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) = \theta_1 \beta^2 \gamma du^3 + \theta_2 \beta \gamma^2 dv^3 + (lh_1 du - lh_2 dv) \varphi_2$$

ove δ^2 indica differenziali secondi controvarianti rispetto a φ_2 e θ_1, θ_2 sono invarianti finiti ed $lg_1 = lh_1 du - lh_2 dv$ è una forma differenziale invariante del 1° ordine (1).

Sicchè assegnare il sistema (*) equivale a dare una quadrica Q_1 (o Q_2) in ogni punto P di σ .

Ora vogliamo renderci chiara la costruzione di Q_1 a partire da θ_1, θ_2, lg_1 ; e, costruita Q_1 , assegnare per ogni tangente in P la costruzione della quadrica asintotica osculatrice (del 1° sistema) alla curva di (*) che ha quella tangente, cioè la costruzione del quadrilatero d'appoggio di questa quadrica osculatrice su Q_1 .

Ci gioveremo delle posizioni:

$$T = |X, x, x_u, x_v| \quad , \quad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}| \quad , \quad N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}| \quad , \\ \Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|$$

ove i secondi membri indicano determinanti costruiti con le coordinate x_i di P e con quelle X_i di un punto generico di S_3 ;

$$H = - \left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma \right) / \beta\gamma \quad ; \quad \psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \quad ; \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}.$$

Consideriamo subito i casi $\theta_1 = \pm 1$ nei quali Q_1 si spezza (o anche $\theta_2 = \pm 1$ nei quali si spezza Q_2).

(1) L'equazione (*) è stata considerata da FUBINI, *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie*, « Atti Acc. Scienze di Torino », vol. LIII, 1918; vedi anche la mia Nota: *Le forme di Fubini nella teoria proiettiva delle superficie*, « Rend. Istit. Lombardo », vol. LVII, 1924.

5. I SISTEMI PER I QUALI $\theta_1 = -1$ (o $\theta_2 = +1$). — Se $\theta_1 = -1$, Q_1 si spezza nel piano tangente $T = 0$ e nel piano

$$(**) \quad -2(lb_2 + \psi_2)N_1 + 2\left(lb_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)N_2 + \\ + \left[2\left(lb_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)(lb_2 + \psi_2) - \beta\gamma(H + \theta_2)\right]T = 2\Omega.$$

Si costruisca la *retta invariante*, determinata soltanto da lg_1 , di equazioni

$$(***) \quad N_1 = \left(lb_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)T, \quad N_2 = -(lb_2 + \psi_2)T$$

(che separatamente rappresentano i piani per essa e per le tangenti asintotiche in P); indi il cono (per essa) di equazione

$$\left[\left(lb_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)T - N_1\right]^2 + \beta T[(lb_2 + \psi_2)T + N] = 0.$$

Le quadriche asintotiche (del 1° sistema) osculatrici alle curve (*) in P toccano il piano (**) nei punti della conica sezione di esso col cono. Il punto di contatto della quadrica osculatrice relativa alla direzione du/dv col piano appartiene alla generatrice del cono complanare con la retta invariante e con la coniugata armonica della tangente du/dv .

Così la quadrica osculatrice è completamente determinata. Ancora:

La traccia del piano (**) su $T = 0$ è la polare della retta invariante rispetto alla quadrica di Lie, e non dipende da θ_2 ; sicchè fissato lg_1 , al variare di θ_2 il piano (**) descrive il fascio intorno ad essa e il luogo delle coniche di contatto è il cono trovato (1).

6. I SISTEMI PER I QUALI $\theta_1 = +1$ (o $\theta_2 = -1$). — Per $\theta_1 = 1$, Q_1 si spezza nei due piani (***) per la retta invariante.

Tutte le quadriche asintotiche osculatrici (del 1° sistema) passano per uno stesso punto (dipendente da θ_2) della retta invariante; e viceversa se quelle quadriche passano tutte per un punto è $\theta_1 = 1$. Il punto appartiene alla quadrica di Lie se e solo se $\theta_2 = 0$.

(1) Se $\theta_1 = -1$ o $\theta_2 = 1$ il cono di 3° classe involupato dai piani osculatori alle curve (*) in P si spezza in un piano e in un cono quadrico (vedi la mia Nota dell'« Ist. Lombardo », n. 3); se $\theta_1 = -1$ e $\theta_2 = 1$ si hanno i sistemi assiali (per i quali quei piani osculatori formano fascio) di cui qui risultano nuove proprietà. Altre si trovano raccolte nell'Appendice II, *I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie* del vol. II della *Geometria Proiettiva Differenziale* di G. FUBINI ed E. ČECH (Bologna, Zanichelli, 1926).

I piani ivi tangenti a queste quadriche inviluppano un cono la cui traccia su $T = 0$ non dipende affatto da θ_2 ed è la conica di equazione

$$4(lh_2 + \psi_2)N_1^2 - 4\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)N_1N_2 + \beta N_2^2 + 4\Omega N_1 = 0$$

passante per P. E precisamente la traccia del piano tangente alla quadrica osculatrice in direzione du/dv è la tangente a detta conica nel punto (\neq P) in cui essa è incontrata dalla quarta armonica dopo la tangente asintotica u , la tangente data du/dv e la tangente asintotica v .

7. IL CASO GENERALE. — Per un punto dello spazio passano le quadriche osculatrici a curve (*) in P relative a tre direzioni du/dv .

Il luogo dei punti per cui queste direzioni costituiscono una terna apolare alle tangenti asintotiche in P è la retta invariante (***) . La corrispondenza fra i punti di questa retta e le terne di quell'involuzione è proiettiva.

Il punto ove questa retta incontra la quadrica d'appoggio Q_1 dipende solo da lg_1 e da θ_2 ; o anche: tutte le quadriche d'appoggio Q_1 relative agli infiniti sistemi (*) che si ottengono variando θ_1 (fissi θ_2 e lg_1) passano tutte per uno stesso punto: esso corrisponde alla terna $du^3 = 0$ dell'involuzione detta.

Il luogo dei punti ora determinati al variare di lg_1 è una nuova quadrica invariante, caratterizzata da θ_2 ,

$$N_1N_2 = \left\{ \Omega + \frac{1}{2}\beta\gamma(H + \theta_2)T \right\} T$$

(per $\theta_2 = 0$ è la quadrica di Lie).

S'intende che ad un'altra quadrica invariante, caratterizzata solo da θ_1 , si arriva operando su Q_2 .

Queste due quadriche invarianti coincidono per i sistemi caratterizzati da $\theta_1 = -\theta_2$ (e coincidono con la quadrica di Lie se $\theta_1 = 0$)⁽¹⁾.

Invece i sistemi per i quali $\theta_1 = \theta_2$ sono caratterizzati dal fatto che una retta arbitraria per P taglia la quadrica di Lie e le due quadriche invarianti in punti formanti con P un gruppo armonico.

Perciò dati θ_1, θ_2, lg_1 ecco come si costruisce Q_1 .

Noto lg_1 si costruisca la retta invariante e su di essa il punto (determinato da θ_2) per cui deve passare Q_1 . La quadrica invariante (vedi l'ultima equazione) appartiene al fascio individuato dalla quadrica di Lie e dal piano tangente contato due volte e passa per quel punto. Poi nel fascio determinato

(1) Ai sistemi caratterizzati da $\theta_i = 0$ appartengono le estremali delle forme elementari, e le curve anarmoniche (vedi la mia Nota dell'« Ist. Lombardo », n. 4); per esse basta quindi costruire la retta invariante.

dai piani (***) e dalla quadrica invariante si costruisca la quadrica avente con essa l'invariante di contatto ⁽¹⁾ $\frac{\theta_1 + 1}{\theta_1 - 1}$: questa è Q_1 .

8. Non rimane che a dare la costruzione della quadrica asintotica (del 1° sistema) osculatrice alla curva di (*) uscente da P in direzione du/dv , cioè il quadrilatero d'appoggio su Q_1 , o, ciò che fa lo stesso, il punto di contatto di queste due quadriche non appartenente alle tangenti asintotiche in P. Servono a ciò i teoremi:

Il luogo dei punti di contatto con Q_1 delle quadriche asintotiche osculatrici in P alle curve di () è la cubica sghemba intersezione residua (tolta la retta invariante) di Q_1 con il cono*

$$\left[\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2} \right) T - N_1 \right]^2 + \frac{\beta}{2} (1 - \theta_1) [(lh_2 + \psi_2) T + N_2] T = 0$$

dipendente solo da lg_1 e θ_1 (su di esso stanno quindi le ∞^1 cubiche analoghe ottenute variando solo θ_2 ; mentre le ∞^2 cubiche ottenute variando θ_1 e θ_2 si distribuiscono sopra un fascio di coni bitangenti ecc.).

Il punto di contatto relativo alla tangente du/dv si ottiene segnando la cubica col piano della retta invariante e della tangente coniugata armonica di quella data (rispetto alle tangenti asintotiche).

Geometria. — *Sull'elemento lineare proiettivo di una superficie.* Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrispondente GUIDO FUBINI.

1. Dell'elemento lineare proiettivo di una superficie dello spazio ordinario, introdotto da Fubini, soltanto più tardi furono date, da parte di Čech e di Bompiani, varie interpretazioni geometriche ⁽³⁾, quali più quali meno semplici; ma, a parer mio, nessuna di esse raggiunge un grado di semplicità tale, che emerga, anche dal lato geometrico, il carattere per così dire di necessità che presenta la considerazione di quell'elemento lineare: si pensi per esempio al ds^2 della geometria metrica. A un tale requisito mi pare invece risponda la seguente nuova interpretazione.

(1) Due superficie aventi in un punto le stesse tangenti asintotiche hanno un *invariante proiettivo di contatto* (limite di un birapporto); se i loro sviluppi sono $\chi = axy + \dots$ e $\chi = a'xy + \dots$, esso vale a/a' . Vedi la mia Nota: *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie ecc.*, «Atti Acc. di Torino», vol. LIX, 1924; nota (7) a p. 417.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1926.

(3) Vedine l'esposizione in FUBINI e ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, Zanichelli. Nel seguito ci serviamo delle notazioni di questo Trattato.

Se a, b sono due rette di un fascio (col centro x e nel piano ξ), e analogamente a', b' sono due rette di un altro fascio (col centro x' e nel piano ξ'), chiamiamo, come è naturale, *birapporto delle due coppie di rette* $a, b; a', b'$ il birapporto - nel medesimo ordine - dei quattro punti segati da quelle quattro rette sulla retta $\xi\xi'$ intersezione dei piani dei due fasci; oppure, ciò che è lo stesso, dei quattro piani secondo cui le quattro rette sono proiettate dalla retta xx' congiungente i centri dei due fasci. In altre parole, si calcola quel birapporto *trasportando* a' e b' nel fascio $x\xi$, come ci esprimeremo brevemente per indicare, p. es. per la a' , l'operazione che consiste nel segarla con ξ e proiettare l'intersezione da x .

Ebbene, il quadrato dell'elemento lineare proiettivo di una superficie in un suo punto x non è che il birapporto delle coppie delle tangenti asintotiche in x e in un punto della superficie ad esso infinitamente vicino - prese le rette della seconda coppia nell'ordine non omologo di quello della prima - moltiplicato per un fattore numerico (9/4).

Per verificarlo, facciamo il calcolo per un caso più generale, allo scopo di desumerne qualche altra conseguenza. Adottate coordinate asintotiche u, v , consideriamo sulla superficie S un sistema Σ semplicemente infinito di linee definito dalla $du = p(u, v) dv$; e chiamiamo Γ la congruenza delle rette involuppati il sistema Σ . Proponiamoci anzitutto di trovare il punto dove la retta di Γ uscente da un punto y della superficie infinitamente vicino al punto $x(u, v)$ sopra una linea lungo la quale indichiamo d'ora in poi i differenziali con d , trasportata nel fascio $x\xi$, incontra la retta dei due punti $x_u(u, v), x_v(u, v)$ ⁽¹⁾. Designandolo con $x_u + \rho x_v$ e indicando p. es. con $\{x_u, x, y\}$ il determinante formato con la seconda, la terza e la quarta coordinata dei punti indicati fra graffe, si ha

$$\rho = - \frac{\{x_u, x, (qy_u + y_v, \xi) y - (y, \xi) (qy_u + y_v)\}}{\{x_v, x, (qy_u + y_v, \xi) y - (y, \xi) (qy_u + y_v)\}},$$

dove q indica il valore assunto dalla p nel punto y . Ora sviluppiamo il secondo membro tenendo conto, a numeratore e a denominatore, dei termini fino a quelli di terzo grado nei differenziali primi inclusi, e ricordando che

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x,$$

$$x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x,$$

(1) Dove $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, ecc. Adoperiamo naturalmente coordinate proiettive omogenee,

e, secondo una notazione ormai diffusa, indichiamo un punto (o piano) con la sua prima coordinata x (risp. ξ). Un'espressione del tipo (x, ξ) designerà poi la somma $\Sigma x\xi$ estesa alle quattro coordinate omologhe di punto e piano.

cosicchè

$$\begin{aligned}(x_{uu}, \xi) &= (x_{vv}, \xi) = 0; \\ (x_{uuu}, \xi) &= \beta (x_{uv}, \xi) \quad , \quad (x_{uuv}, \xi) = \theta_u (x_{uv}, \xi), \\ (x_{uuv}, \xi) &= \theta_v (x_{uv}, \xi) \quad , \quad (x_{vvv}, \xi) = \gamma (x_{uv}, \xi).\end{aligned}$$

Si ha così

$$(1) \quad \rho = \frac{p dv^2 + p dv d^2 v + \frac{\beta}{3} du^3 + (p \theta_u + p_u) du dv^2 + \left(p_v + p \theta_v + \frac{\gamma}{3} \right) dv^3}{du^2 + du d^2 u + \left(\frac{p \beta}{3} + \theta_u \right) du^3 + \theta_v du^2 dv + \frac{p \gamma}{3} dv^3} \quad ;$$

da cui, se il sistema Σ è quello delle asintotiche $u = \text{costante}$, vale a dire per $p = 0$, e assumendo a numeratore e a denominatore i termini principali ⁽¹⁾

$$(2) \quad \rho_1 = \frac{1}{3} \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{du^2}.$$

Analogamente per l'altro sistema di asintotiche

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{3} \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{dv^2};$$

cosicchè si ha per il birapporto di tangenti principali di cui nel precedente enunciato

$$(\rho_1, \rho_2, 0, \infty) = \frac{4}{9} \left(\frac{F_3}{F_2} \right)^2.$$

2. Se invece non si presuppone che il sistema Σ sia di asintotiche, si ha dalla (1) - limitandoci sempre ad assumere a numeratore e a denominatore i termini principali, e posto $p = \frac{m}{n}$ -

$$(3) \quad \rho = \frac{m}{n} \frac{dv^2}{du^2}.$$

(1) Un'altra interpretazione dell'elemento lineare proiettivo di una superficie è suggerita dalla (2). Chiamando birapporto di tre rette di un fascio (in un certo ordine) e di un'ulteriore retta r non appartenente al fascio il birapporto formato da quelle tre e dal raggio del fascio che si ottiene *trasportandovi* la r , l'elemento lineare proiettivo di una superficie in un suo punto è il birapporto delle due tangenti asintotiche in quel punto, di un'ulteriore retta a ivi tangente, e della prima tangente asintotica in un punto infinitamente vicino al primo sopra una curva tangente alla a , moltiplicato per il fattore numerico $3/2$.

Considerando insieme con esso un analogo sistema Σ' (dove m/n sia sostituito da m'/n') ne viene per il birapporto delle coppie di tangenti dei due sistemi uscenti rispettivamente da $x(u, v)$ e da $x(u + du, v' + dv)$ prese in ordine non omologo l'espressione

$$\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{n'}{m'} \frac{du^2}{dv^2}, \frac{n}{m} \frac{du^2}{dv^2} \right) = \frac{(nm' du^2 - mm' dv^2)^2}{(n^2 du^2 - m^2 dv^2)(n'^2 du^2 - m'^2 dv^2)}.$$

Esso è identicamente nullo quando e solo quando i due sistemi Σ e Σ' sono quelli delle asintotiche (se no, si annulla per spostamenti sul doppio sistema coniugato che è armonico rispetto a Σ e Σ' , mentre assume il valore uno per spostamenti lungo le asintotiche)⁽¹⁾.

Da tutto ciò risulta: se fra due superficie intercede una corrispondenza puntuale che conserva le asintotiche, i birapporti delle coppie di tangenti infinitamente vicine corrispondenti⁽²⁾ sono uguali sulle due superficie; e viceversa. La ulteriore condizione, necessaria e sufficiente, perchè la corrispondenza fra le due superficie sia un'applicabilità proiettiva è questa: i birapporti inerenti alle coppie di tangenti asintotiche, che — arrestandosi ai medesimi termini principali che intervengono per tangenti generiche — sono nulli su entrambe le superficie, devono risultare uguali sulle due superficie anche avuto riguardo ai nuovi termini principali.

3. Aggiungiamo qualche altra osservazione, per quanto non strettamente connessa con quanto precede. Anzitutto, in base alla (3), notiamo ancora che, fissato il sistema Σ , si ha nel fascio delle rette tangenti una

(1) I birapporti in questione hanno anche la seguente proprietà di simmetria: se Σ e Σ' sono coniugati, il birapporto di due loro coppie di tangenti infinitamente vicine per spostamenti lungo una linea di un sistema arbitrario Θ o, ciò che è lo stesso, del suo coniugato Θ' , non muta scambiando i due sistemi Σ e Σ' rispettivamente con Θ e Θ' ; come risulta dalla sua espressione

$$\left(\frac{P^2 + p^2}{P^2 - p^2} \right)$$

dove $du^2 - p^2 dv^2 = 0$, $du^2 - P^2 dv^2 = 0$ sono le due coppie di sistemi coniugati. Dalla medesima espressione emerge che in tale caso particolare il birapporto considerato si esprime semplicemente mediante il valore P^2/p^2 del birapporto delle quattro coppie della involuzione di tangenti coniugate nel fascio $x\xi$, che si hanno prendendo ognuna delle tangenti asintotiche contata due volte, e le due coppie di tangenti coniugate in questione. Osserviamo poi anche che, in coordinate curvilinee qualunque, con $F_2 = a_{11} du^2 + 2 a_{12} du dv + a_{22} dv^2$, il birapporto considerato nel testo, relativo alle coppie di tangenti parametriche, vale

$$= \frac{1}{4} \frac{(a_{11} du^2 - a_{22} dv^2)^2}{du dv (a_{11} du + a_{12} dv)(a_{21} du + a_{22} dv)}.$$

(2) Fissiamo le idee come sopra, intendendo di invertire l'ordine di due tangenti nel passaggio da un punto a un altro infinitamente vicino.

corrispondenza (2, 1) fra le direzioni degli spostamenti e le rette in cui si trasportano le rette di Γ per i punti della S infinitamente vicini al punto x . Tale corrispondenza si può ritenere caratterizzata dai suoi raggi uniti — che cadono nelle tangenti asintotiche e nella retta di Γ appartenente al fascio — e da quelli di diramazione, che coincidono con le tangenti asintotiche. Al variare del sistema Σ , quella corrispondenza si amplia in una (1, 2, 1) sulla quale non ci intratteniamo ulteriormente.

Piuttosto osserviamo che *trasportando* in ogni fascio non solo una, ma due tangenti consecutive alla retta di Γ passante per x , e domandando che le due rette così ottenute coincidano, si viene a imporre alle linee lungo le quali avvengono gli spostamenti la condizione

$$(4) \quad p(dud^2v - dv d^2u) + \frac{\beta}{3} du^3 + \left(p_u - \frac{p^2\beta}{3}\right) du^2 dv + \\ + \left(p_v + \frac{\gamma}{3}\right) du dv^2 - \frac{p^2\gamma}{3} dv^3 = 0.$$

La (4) definisce un sistema $\infty^2 \Sigma_0$, che si può anche ritenere definito così, a partire da un generico sistema $\infty^1 \Sigma$: le tangenti alle linee di Σ uscenti da due punti di una linea di Σ_0 consecutivi al punto x incontrano il piano ξ in punti allineati su $x^{(1)}$. Si verifica facilmente che i piani osculatori alle tre linee di un sistema Σ_0 che escono da un punto x della S toccandovi le tre tangenti di Segre passano per una retta, proprietà da riavvicinare a una nota per altri sistemi ∞^2 di curve di una superficie ⁽²⁾, e suscettibile di ulteriori estensioni.

I piani osculatori alle linee di Σ_0 uscenti dal punto x involuppano un cono di quinta classe, per il quale il piano ξ è quadruplo, con le tangenti di contatto coincidenti due con l'una e due con l'altra tangente asintotica. Quando il sistema Σ è uno dei tre sistemi di linee di Darboux, questo cono acquista una proprietà (caratteristica) notevole: vi è nella stella x una retta tale che dei cinque piani tangenti al cono passanti per essa quattro coincidono fra loro (e col piano osculatore alla linea di Darboux costituente Σ che esce da x , mentre il quinto piano vi oscula la linea di Segre coniugata a quella di Darboux).

(1) Invece, se Σ è un sistema di asintotiche, Σ_0 degenera in quel sistema di asintotiche contato due volte, più le linee di Darboux. In ogni caso poi Σ_0 contiene Σ , e anche il sistema ad esso coniugato.

(2) Cfr. FUBINI e ČECH, op. cit., § 23.

Geometria. — *Caratterizzazione dei sistemi del Bianchi di ∞^1 superficie.* Nota di A. TERRACINI, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Un teorema sul lavoro di deformazione elastica.* Nota di A. CECCONI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Formole generali per il calcolo dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita.* Nota del Ten. Colonnello del Genio Aeronautico dott. E. RAIMONDI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. La funzione che definisce la corrente che fluisce tra un cilindro circolare ed una parete piana indefinita, ad esso parallela, è ⁽²⁾:

$$(22) \quad f = \frac{q}{ib} \lg \frac{\tilde{\lambda}' - ic}{\tilde{\lambda}' + ic},$$

nella quale q è la portata, e dove si è posto

$$(23) \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2} \lg \frac{b+c}{b-c},$$

essendo a il raggio del cilindro e b la distanza del suo asse dalla parete.

Colla presente Nota ci proponiamo di stabilire le formole generali per il calcolo dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita, servendoci della trasformazione conforme che abbiamo stabilita tra il campo del moto piano del sistema segmento-parete e quello del sistema disco-parete, e che fu oggetto di due Note, pubblicate pure su questi « Rendiconti » ⁽³⁾, alle quali pertanto ci riferiremo, sia per il richiamo delle formole che per quello delle figure.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1926.

(2) CISOTTI, *Effetto dinamico* ecc., questi « Rendiconti », vol. I, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 9^o, Roma, maggio 1925.

(3) Vol. II, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 7-8, ottobre 1925; e vol. III, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 1^o, gennaio 1926.

2. Poichè abbiamo trovato che (2)

$$Z = \frac{\zeta' - ic}{\zeta' + ic},$$

mentre ⁽¹⁾

$$(24) \quad C = \frac{2 \pi q}{h},$$

segue che

$$f = \frac{C}{2 \pi i} \lg Z,$$

da cui ⁽²⁾

$$w = u - iv = \frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{d\zeta};$$

ma

$$\frac{df}{dZ} = \frac{C}{2 \pi i} \frac{1}{Z},$$

quindi

$$(25) \quad w = \frac{df}{d\zeta} = \frac{C}{2 \pi i} \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\zeta}.$$

La derivata $\frac{dZ}{d\zeta}$ si deve ricavare dalla relazione (15) che stabilisce la corrispondenza conforme tra il campo segmento-retta (fig. 1^a) e quello della corona circolare (fig. 3), e precisamente si ottiene

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \frac{1}{\frac{d\zeta}{dZ}} = iZe^{-i\varphi},$$

per cui la (25) può scriversi, più semplicemente,

$$(26) \quad w = \frac{C}{2 \pi} e^{-i\varphi}.$$

3. Per il calcolo delle azioni dinamiche applichiamo le formole di Blasius ⁽³⁾. La prima di tali formole:

$$R = R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \int_{\delta'} w^2 d\zeta,$$

(1) CISOTTI, loc. cit., formola (11).

(2) Vedi, per esempio, CISOTTI, *Idromeccanica piana*, Milano, Parte I (1921), § 31.

(3) H. BLASIUS, *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik*, « Zeitschr. f. Math. und Phys. », vol. 58 (1910), p. 90.

poichè

$$(27) \quad dz = \frac{d\zeta}{dZ} dZ = \frac{e^{iF}}{iZ} dZ$$

e, tenendo presente la (26), diventa

$$(28) \quad R_y + iR_x = - \frac{C^2}{8\pi^2 i} \int_{\gamma_2} e^{-iF} \frac{dZ}{Z},$$

essendo (19)

$$F = F(Z) = -i \lg k - \frac{i\omega\alpha}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg Z - \frac{\omega\sigma}{\pi} \right) d\sigma + \\ - \frac{i\omega}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg Z - \frac{\omega\sigma}{\pi} \right) d\sigma.$$

Si rilevi che, poichè la funzione integranda

$$\frac{e^{-iF}}{Z}$$

è regolare dentro la corona circolare

$$q < |Z| < 1,$$

pel teorema di Cauchy,

$$\int_{\gamma_2} e^{-iF} \frac{dZ}{Z} = \int_{\gamma_1} e^{-iF} \frac{dZ}{Z},$$

dove le integrazioni si intendono eseguite entrambe nello stesso senso, secondo le indicazioni delle frecce della fig. 3, e precisamente, l'integrazione lungo il contorno γ_1 in maniera da lasciare a sinistra il campo Γ , mentre quella lungo il contorno γ_2 in maniera da lasciare a sinistra l'area circolare racchiusa da γ_2 stesso; per cui alla (28) può anche sostituirsi la seguente

$$(29) \quad R_y + iR_x = - \frac{C^2}{8\pi^2 i} \int_{\gamma_1} e^{-iF} \frac{dZ}{Z}.$$

Sopra γ_1 è

$$Z = e^{i\theta},$$

con

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

per cui

$$\frac{dZ}{Z} = i d\theta,$$

mentre

$$(30) \quad F(Z) = F(e^{i\theta}) = -i \lg k - \frac{i\omega\alpha}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] d\sigma + \\ - \frac{i\omega}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] d\sigma.$$

La (29) può quindi scriversi

$$(31) \quad R_y + iR_x = -\frac{C}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-iF} d\theta,$$

essendo la F definita dalla (30).

4. La circolazione, come è noto, è definita dall'integrale

$$\int_{\delta'} w d\chi.$$

Tenendo presenti le (26) e (27),

$$\int_{\delta'} w d\chi = \frac{C}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{dZ}{Z} = C.$$

Si ha così una verifica che la C conserva il significato di circolazione, ora attorno alla lamina.

La valutazione effettiva dell'integrale che compare nella (31) formerà oggetto di una Nota successiva, trattando il caso di una lamina abbastanza lontana dalla parete indefinita.

Idromeccanica. — *Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele.* Nota di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Sull'effetto Evershed nelle macchie solari*⁽¹⁾.
Nota di RENATO MANCINELLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. GIORGIO ABETTI.

Le prime ricerche sui moti dei vapori metallici nelle macchie solari eseguite da Evershed all'Osservatorio di Kodaikanal l'avevano condotto alla seguente proposizione:

« I gas dello strato invertente dell'ombra e della penombra si muovono parallelamente alla superficie solare, dal centro all'esterno delle macchie. Il moto è accelerato verso i bordi delle macchie stesse ». Indichiamola brevemente col nome di effetto Evershed di prima specie.

Nell'ultimo studio finora pubblicato su questo argomento dallo stesso Evershed, nel 1915⁽³⁾ sulla macchia n. 7223 di Greenwich, si trova come risultato dell'osservazione diretta che le componenti, nella direzione della luce, delle velocità di allontanamento erano costantemente superiori a quelle delle velocità d'avvicinamento. In altre parole quando la macchia era ad est del meridiano centrale del sole la penombra est presentava velocità (d'allontanamento) più elevate di quelle (d'avvicinamento) fornite dalla penombra ovest; quando la macchia aveva passato il meridiano era invece la penombra ovest che presentava le velocità più forti. Indicheremo questo fenomeno col nome di effetto Evershed di seconda specie. Nell'ipotesi di Evershed dei moti paralleli alla superficie solare questa proposizione si trasforma direttamente in quella corrispondente per le velocità effettive radiali.

È evidente come una tale inversione nei rapporti delle velocità *effettive* dei due lembi della macchia a causa del passaggio al meridiano centrale del sole non abbia niente di oggettivo. Sorge quindi il problema dell'interpretazione, e a tal fine facciamo le seguenti ipotesi:

1° Che gli spostamenti delle righe spettrali siano da attribuirsi interamente all'effetto Doppler-Fizeau.

2° Che i quattro giorni intercedenti tra gli spettrogrammi, che stanno a base del lavoro di Evershed, non abbiano avuta influenza sensibile sui valori e sulle direzioni delle velocità in una macchia regolare e grandissima quale la 7223.

Data l'approssimazione delle misure che adopereremo possiamo considerare le macchie come puntiformi.

Assumiamo come piano della fig. 1 il piano passante per la macchia M, la terra T e il centro del sole C. Sia OMO la traccia della super-

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri - Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1926.

(3) « Bulletin Kodaikanal Observatory », n. 51, 1916.

ficie solare: CM ne sarà la normale passante per la macchia. Sia inoltre MV il vettore velocità di una certa massa di gas della penombra, ad esempio ai limiti della penombra stessa; α ed a gli angoli formati dalla velocità MV colla superficie solare, e dalla direzione della luce, MT, colla normale alla

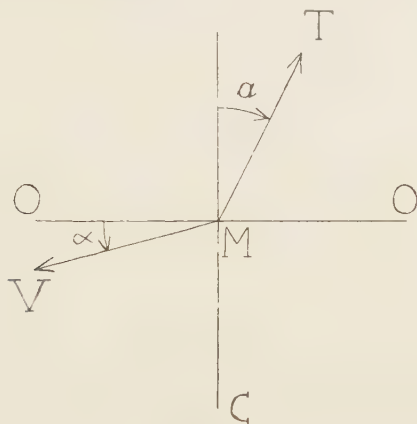


Fig. 1.

macchia CM. Detta v la grandezza della velocità MV, e v' quella della sua componente lungo MT, ossia la velocità del gas determinata spettroscopicamente si ha:

$$(1) \quad v' = v \sin(a + \alpha).$$

Nella (1) figurano due incognite, v ed α , poichè a è data dalla: $a = \arcsen \delta$ in cui δ è la distanza apparente della macchia dal centro del sole, posto il raggio solare uguale a uno. Bastano perciò due misure di v' , in posizioni diverse della macchia, ossia a tempi diversi. Con ovvii significati delle lettere abbiamo così il sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} v' = v \sin(a' + \alpha) \\ v'' = v \sin(a'' + \alpha). \end{cases}$$

La nostra seconda ipotesi sta appunto in ciò, che noi adoperiamo per i due tempi, a cui si riferiscono v' e v'' , gli stessi valori di v e di α .

Trasformando otteniamo infine:

$$(3) \quad \begin{cases} \tan \alpha = \frac{v' \sin a'' - v'' \sin a'}{v'' \cos a' - v' \cos a''} \\ v = \frac{v'}{\sin(a' + \alpha)} \end{cases}$$

come abbiamo già detto applichiamo la (3) agli spettri della macchia nr. 7223 di Greenwich. I dati che adoperiamo sono i seguenti:

TABELLA I.

Componenti, nella direzione della luce, dei movimenti medii nella penombra, dedotte dalle righe del ferro raggruppate secondo le intensità.

Data: 3 aprile 1915. Latitudine della macchia $+ 20^{\circ} 7'$. Distanza dal centro: $\delta = 0.589$ est. Fessura radiale.

	Penombra est velocità in km/sec.	Penombra ovest velocità in km/sec.
Media per intensità 0 e 1	+ 1.61	— 1.19
» » » 2	+ 1.29	— 1.20
» » » 3	+ 1.26	— 0.94
» » » 4	+ 1.19	— 0.98
» » » 5	+ 1.64	— 0.83

TABELLA II.

Componenti, nella direzione della luce, dei movimenti medii della penombra, dedotte dalle righe del ferro raggruppate secondo le intensità.

Data 7 aprile 1915. Distanza dal centro: $= 0.617$ ovest. Fessura radiale.

	Penombra est velocità in km/sec.	Penombra ovest velocità in km/sec.
Media per intensità 1	— 0.92	+ 2.15
» » » 2	— 0.78	+ 1.86
» » » 3	— 0.58	+ 1.66
» » » 4	— 0.55	+ 1.66
» » » 5 e 6	— 0.44	+ 1.50

I segni sono presi in base alla convenzione solita: positivi per velocità d'allontanamento, negativi per quelle d'avvicinamento.

Con questi dati otteniamo per le pendenze degli strati originanti le righe del ferro d'intensità media 1 e 2 ecc. e per le rispettive velocità, i valori indicati nelle due seguenti tabelle.

TABELLA III. (Lembo Est).

Intensità	Inclinazione	Velocità in km/sec. nella nostra ipotesi	Velocità nell'ipotesi di Evershed	
			3 aprile	7 aprile
0 e 1	+ 12° 40'	2.14	2.73	1.49
2	+ 11° 34'	1.74	2.19	1.26
3	+ 16° 37'	1.58	2.14	0.93
4	+ 16° 33'	1.48	2.02	0.89
5 e 6	+ 8° 59'	0.90	1.09	0.71

TABELLA IV. (Lembo ovest).

Intensità	Inclinazione	Velocità in km/sec. nella nostra ipotesi	Velocità nell'ipotesi di Evershed	
			3 aprile	7 aprile
1	+ 10° 52'	2.81	2.02	3.48
2	+ 8° 15'	2.56	2.04	3.02
3	+ 9° 55'	2.18	1.59	2.69
4	+ 10° 1'	2.22	1.66	2.69
5 e 6	+ 11° 16'	1.97	1.41	2.43

L'andamento delle velocità così determinato segue strettamente la « scala del ferro » di St. John, mentre i valori delle pendenze non presentano un andamento regolare come sarebbe naturale attendersi. Questo fatto parrebbe in parte infirmare la nostra ipotesi ed è perciò utile soffermarvisi. Anzitutto le righe usate da Evershed provengono da livelli d'origine molto diversi. Per le righe d'intensità 0 e 1 questi oscillano tra 250 e 400 km. d'altezza; per quelle d'intensità 3 e d'intensità 4 si va dai 250 ai 600 km. Si noti poi che questi sono addirittura gli estremi entro cui sono comprese le altezze di tutte le righe usate da Evershed. Poichè inoltre le righe usate nella Tabella I sono tutte diverse da quelle della Tabella II, è facile comprendere come l'altezza a cui si riferisce la velocità media per tutte le righe d'intensità, ad es. 4, nella Tabella I, possa essere anche notevolmente diversa da quella a cui si riferisce la velocità media per le righe d'intensità, ad

es. 4, usate nella Tabella II. E non v'è da stupirsi che le velocità delle Tabelle I, II, III e IV seguano tuttavia la « scala del ferro » poichè le altezze di cui stiamo parlando, pur differendo notevolmente tra le due prime tabelle, seguono l'ordine ascendente delle intensità a cui si riferiscono. Ma da ciò non segue affatto che anche le pendenze calcolate debbano seguire l'andamento regolare che certo rispettano nella macchia. Infatti noi abbiamo sempre adoperato illegittimamente il sistema (2) perchè il valore di v nelle due equazioni anzichè coincidere era sempre diverso. Ciò segue dal fatto che, per l'osservazione fatta poco sopra, le altezze a cui si riferisce v sono, per le due equazioni generalmente diverse. È quindi chiaro come la regolarità delle pendenze possa venir mascherata da questo illegittimo uso delle formule.

Eliminata quest'obiezione resta tuttavia insoluto il problema del genere della supposta regolarità delle pendenze. Infatti questa potrebbe consistere, tanto in una regolare variazione al variare dei livelli, quanto nell'esistenza di una pendenza pressochè costante per tutti i livelli.

È necessario anche di dimostrare che quanto finora abbiamo discusso non sia la conseguenza della curvatura delle righe spettrali. Consideriamo

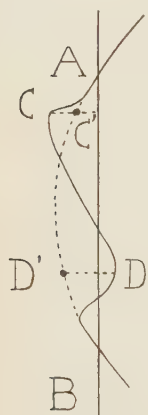


Fig. 2.

per questo la Fig. 2 che rappresenta l'andamento di una riga nello spettro delle macchie. I punti A e B corrispondono a zone solari indisturbate, quelli C e D alle zone di massima velocità radiale. Poichè come spostamenti spettroscopici dei punti C e D si prendono le loro distanze dalla retta AB anzichè le distanze dai punti C' e D' dell'arco punteggiato è chiaro che la curvatura delle righe ha come effetto di aumentare gli spostamenti spettroscopici volti verso la convessità delle righe, e di diminuire gli spostamenti contrari. Se la convessità delle righe è volta al rosso dello spettro essa aumenterà le misure dei moti di allontanamento e diminuirà quelli di avvicinamento. È perciò chiaro che l'effetto della curvatura è simile all'effetto Evershed di seconda specie.

Abbiamo così dimostrato la legittimità del dubbio. Ora ne dimostreremo l'insostenibilità.

Prendiamo perciò la formula⁽¹⁾ che fornisce il raggio di curvatura, ρ , al centro della riga :

$$(4) \quad \rho = \frac{F \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

dove F è la distanza focale dello spettrografo e la convenzione per la misura di α e di β è indicata dalla figura 3. In questa AB è la traccia del

(1) «Bulletin Kodaikanal Observatory», Nr. 16, 1909.

reticolo piano, IO ed OR i raggi incidente e diffratto; ON la normale al reticolo. Nel caso della riflessione, ($\alpha = -\beta$), si ha $\rho = \infty$ e ρ cambia segno nel passare dall'uno all'altro dei due sistemi di spettri. Ma nel passare dall'uno all'altro di questi sistemi, ossia dall'una all'altra parte dell'immagine centrale, s'inverte anche l'ordine in cui si seguono il violetto ed il rosso di uno spettro, ed è perciò evidente che la convessità delle righe volgerà sempre al rosso o sempre al violetto per tutti i possibili spettri.

Misure eseguite su spettri ottenuti alla Torre solare di Arcetri hanno fissata verso il violetto la convessità delle righe. La curvatura viene quindi

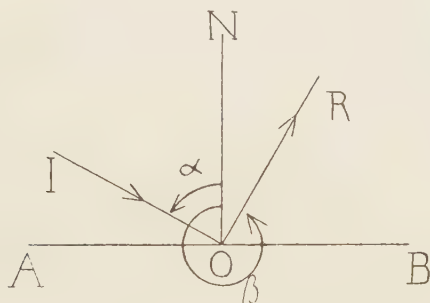


Fig. 3.

a diminuire anzichè ad aumentare i moti d'allontanamento. Cade così anche questa obbiezione e con essa l'ipotesi della natura strumentale dell'effetto Evershed di seconda specie.

Misure eseguite con lo spettrocomparatore su due spettri di macchie ottenuti alla Torre solare dal Prof. G. Abetti ⁽²⁾ mostrano entrambi gli effetti Evershed. Le inclinazioni medie sono risultate:

Per la prima macchia

28° 50'

Per la seconda macchia

2° 7'

e le velocità medie:

1.00 km/sec.

6.56 km/sec.

la prima macchia è passata al meridiano centrale il 1° giugno e la seconda il 29 giugno 1926.

(2) Cfr. questi « Rendiconti ».

Geodesia. — *Azimut assoluto di Eremo di Cberasco nell'orizzonte di Mondovì.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrispondente G. LORIA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Determinazione astronomica di latitudine compiuta a Mondovì.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrispondente G. LORIA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *I risultati delle ricerche fisico-chimiche compiute nelle crociere della R. Nave « Marsigli » nello Stretto di Messina⁽¹⁾.* Nota di MARIO PICOTTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio VITO VOLTERRA.

II. — LA DISTRIBUZIONE DELL'OSSIGENO DISCIOLTO

E DELLE CONCENTRAZIONI IDROGENIONICHE DELLE ACQUE.

In una Nota precedente⁽³⁾ vennero comunicati i risultati ottenuti nelle determinazioni termico-aline compiute nel corso delle crociere della « Marsigli ». Riassumeremo qui le osservazioni sull'ossigeno disciolto e sulla concentrazione idrogenionica nelle acque dello stretto ed in quelle dei due bacini adiacenti.

L'ossigeno disciolto nell'acqua venne determinato nei campioni raccolti durante le crociere della R. N. « Marsigli », con il metodo Winkler e la quantità di iodio risultante venne titolata con una soluzione $n/100$ di iposolfito sodico, il cui titolo era stato precedentemente controllato con una soluzione esattamente campionata di biiodato potassico.

L'equivalente di ossigeno (1 gr-atomo di iodio corrisponde a 5597.75 cm^3 di O_2 a 0° e 760 mm.) venne espresso quale quantità assoluta in cm^3 di O_2 per litro d'acqua e quale ossigenazione relativa, col rapporto centesimale fra la prima e i cm^3 di O_2 contenuti in una soluzione satura, a parità di

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico del R. Istituto Geofisico, Trieste.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1926.

(3) « Rendiconti R. Acc. Lincei », 1916, p. 686.

condizioni ambientali. È ovvio che contemporaneamente alle analisi dell'ossigeno ebbero luogo le corrispondenti determinazioni termico-aline.

Le analisi compiute vennero distinte dapprima in due gruppi: quelle relative a campioni raccolti durante il giorno, dalle ore 8 alle 20, nel primo; e quelle appartenenti a misure eseguite nelle ore della notte, dalle 20 alle 8 del mattino successivo, nel secondo.

Nello strato dei primi 100 metri di profondità, la quantità assoluta d'ossigeno è lievemente superiore durante il giorno.

Le differenze dell'ossigenazione fra il periodo diurno e quello notturno si possono osservare, nel Mediterraneo, nello strato dei primi 50 metri di profondità, oltre il quale tali variazioni si estinguono completamente. Nello Stretto di Messina queste differenze sono sensibili sino all'orizzonte dei 100 metri; ciò sta in relazione con la particolare intensità e rapidità dei moti di convezione di questa specialissima zona mediterranea.

L'ossigenazione assoluta e quella relativa delle acque dello stretto e delle zone ad esso adiacenti diminuiscono con la profondità; il gradiente osservato presenta un andamento intermedio fra quelli che si osservano nel Tirreno e nel Jonio. Il contenuto medio in ossigeno disciolto, risultante da tutte le determinazioni compiute, è elevato, corrispondendo a 5.3 cm^3 per litro; nelle medie condizioni termico-aline delle acque messinesi la saturazione si avrebbe con 5.5 cm^3 ; si ha dunque un'ossigenazione relativa del 97% .

La media mensile dell'ossigenazione relativa osservata presenta due valori massimi, l'uno nell'aprile e l'altro nel settembre, periodi ai quali corrisponde pure una maggiore ricchezza planktonica.

La distribuzione verticale dell'ossigeno disciolto lungo una sezione longitudinale dello stretto, non ha sempre lo stesso andamento. Lo strato superficiale e subsuperficiale, sino a 50 metri di profondità, presenta orizzonti di soprassaturazione nella parte più esterna delle due vallate jonica e tirrenica, probabilmente in corrispondenza a particolari manifestazioni fitobiologiche. Nella parte più interna dello stretto tale stato di soprassaturazione manca; le correnti non consentono stazionarietà al plankton; l'ossigenazione relativa si mantiene tuttavia elevata e generalmente non inferiore al 98% .

L'orizzonte dei 100 metri risente in generale, attraverso tutto lo stretto, il beneficio dei rapidi movimenti di convezione, e presenta perciò una buona ossigenazione, tendenzialmente decrescente da sud verso nord da $92-93\%$ (vallata jonica) a $90-91\%$ (soglia P. Pezzo-Ganzirri e imboccatura settentrionale dello stretto).

Le acque con profondità superiore ai 100 metri presentano nella vallata jonica un'ossigenazione rapidamente decrescente; poco oltre 600 metri si hanno valori quasi uguali a quelli delle grandi profondità joniche ($70-75\%$); ciò è dovuto al moto ascendente delle acque abissali joniche, dirette verso la soglia dello stretto, le quali avvicinandosi alla sella P. Pezzo-

Ganzirri vengono influenzate sempre più dai rapidi rimescolamenti ed arricchite in ossigeno, sì da transitare sulla sella con un'ossigenazione non inferiore al 90 - 91 %. Queste acque si espandono a nord dello stretto col favore della corrente montante e portano un leggero arricchimento nell'ossigenazione degli strati della vallata tirrenica sotto i 100 m.

*
* *

L'acqua del mare, eccettuati rarissimi casi, presenta reazione debolmente alcalina; quella del Mediterraneo arrossa sempre più o meno intensamente con la fenolfaleina.

Una determinazione dell'alcalinità eseguita con i metodi usati in precedenti ricerche talassografiche non rispecchia esattamente le reali condizioni d'ambiente agli effetti di una valutazione quantitativa della reazione acida neutrale o alcalina; le misure più opportune sono quelle che hanno per fine la determinazione delle concentrazioni idrogenioniche.

Il metodo elaborato da Sørensen e Palitzsch per queste determinazioni parve il meglio adatto allo scopo e venne usato nel corso della seconda campagna talassografica della « Marsigli ». Per i risultati conseguiti durante le osservazioni venne mantenuta l'espressione dell'esponente idrogeno p_H .

I valori numerici di p_H valutati da Palitzsch nel Mediterraneo sono compresi fra 7.95 e 8.30; il valore cresce da ovest verso est e diminuisce dalla superficie al fondo, dove si osservano concentrazioni dell'ordine: $8.07 \cong p_H \cong 8.09$.

Nell'acqua dello stretto vennero misurati generalmente valori di p_H compresi fra 8.10 e 8.20; valori minori di 8.10 si ebbero talora in profondità e valori maggiori di 8.25 in superficie.

La successione dei valori numerici dell'esponente p_H lungo la verticale non si presenta regolare in molte stazioni compiute nella parte più interna dello stretto ed in quelle vicine alla soglia, mentre si osservano valori regolarmente decrescenti dalla superficie al fondo nella parte esterna delle due vallate jonica e tirrenica.

A nord dello stretto, l'esistenza di una falda intermedia di acqua jonica risultante dalle precedenti osservazioni di carattere fisico e chimico viene convalidata anche dalle misure dell'esponente p_H , per il quale in questo strato vennero misurati valori generalmente inferiori a 8.15.

Le acque transiti sulla soglia hanno una concentrazione idrogenionica compresa fra 8.10 e 8.15, generalmente distribuita in modo anormale per i rimescolamenti profondi delle acque dovuti alle correnti alterne.

Le osservazioni compiute a sud della soglia, nella vallata jonica, danno per le stazioni prossime alla costa siciliana un gradiente verticale maggiore nella successione dei valori numerici dell'esponente p_H .

In vicinanza della costa siciliana, dopo pochi metri, si notano valori di p_H prossimi a 8.10, caratteristici di acque profonde, mentre nelle stazioni vicine a Capo dell'Armi e ad oriente di esso, l'esponente p_H , ancora a circa 250 m. è 8.20, valore caratteristico per acque d'origine superficiale.

Questa particolare distribuzione, comune del resto a tutti i caratteri fisico-chimici di questa zona, sta in relazione col fatto che presso la costa siciliana sono più sviluppate le emersioni di acque profonde.

L'ossigenazione e le concentrazioni idrogenioniche delle acque nello Stretto di Messina, quali risultano dalle osservazioni compiute durante le crociere della R. N. « Marsigli » concordano pertanto con le altre misure eseguite e confermano le interpretazioni espone nelle Note del prof. F. Vercelli⁽¹⁾ sulla circolazione interna delle acque di quella zona.

Fisica. — *Spettro tipo « Pickering » nell'argon.* Nota⁽²⁾ della prof. MARYA KAHANOWICZ, presentata⁽³⁾ dal Corrisp. A. POCHETTINO.

Ho sottoposto ad uno studio spettroscopico l'argon contenuto nell'ampolla del raddrizzatore termoionico Vartax⁽⁴⁾, perchè vi si realizzano condizioni di eccitazione in cui questo spettro non è stato ancora esaminato.

Si conosce in generale lo spettro dell'argon sotto bassa pressione, eccitato in tubi Geissler comuni, in tubi Geissler senza elettrodi ed in tubi Déjardin.

Coi tubi Geissler si possono ottenere due spettri: lo spettro rosso, quando il circuito di scarica non comprende condensatore; e lo spettro bleu, quando detto circuito comprende condensatore e distanza esplosiva. Il primo è composto di righe in tutte le regioni spettrali, fino a 3948 Å°, ma deve il suo nome alla prevalenza delle righe nel rosso ed aranciato ed all'estensione fino all'estremo rosso (7950 Å°). Il secondo è totalmente differente dal primo, nel senso che non contiene con questo nessuna riga in comune, ha inizio nel verde e termina nell'ultravioletto (3302 Å°). Si osserva anche talvolta lo spettro bianco, dovuto alla contemporanea persistenza degli spettri rosso e bleu.

(1) F. VERCELLI, Nota IV, « Rend. R. Acc. Lincei », 1926, p. 756 e Commissione Internazionale del Mediterraneo, Delegazione Italiana: *Crociere per lo studio dei fenomeni nello stretto di Messina*: Parte I: F. VERCELLI, *Il regime delle correnti e delle maree nello Stretto di Messina*, Venezia 1925; Parte II: F. VERCELLI e M. PICOTTI, *Il regime fisico-chimico delle acque nello stretto di Messina*, Venezia 1926.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Bari.

(3) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1926.

(4) Il raddrizzatore Vartax è un raddrizzatore di Wehnelt della Accumulatoren-Fabrik Aktiengesellschaft di Berlino, per 1 Amp. di corrente raddrizzata.

Lo spettro rosso si considera come spettro d'arco, quello bleu come spettro di scintilla.

Nei tubi senza elettrodi⁽¹⁾, dove si produce la scarica oscillante per mezzo di un avvolgimento induttore introdotto nel circuito di scarica (metodo della scarica anulare dei fratelli Bloch), si osservano, oltre al comune spettro d'arco prodotto con un potenziale basso, tre spettri di scintilla di ordine successivo eccitati con potenziali sempre crescenti. Il primo spettro di scintilla è lo spettro bleu suaccennato; gli altri due si estendono particolarmente nell'ultravioletto.

Nei tubi Dèjardin⁽²⁾ la ionizzazione è prodotta per urto di elettroni emessi da un filamento di tungsteno il quale funziona da catodo incandescente. A secondo il potenziale che assume la placca anodica fredda, si può avere lo spettro rosso, oppure uno dei tre spettri di scintilla che si osservano con la scarica anulare.

Nell'ampolla Vartax si produce lo *spettro sotto pressione alta*.

Quest'ampolla, di forma Crookes, col diametro di 8 cm., contiene nella parte centrale un catodo incandescente di Wehnelt costituito da un cilindretto di ossido di 2 mm. di spessore ed 1 cm. di lunghezza; l'anodo freddo è un cilindretto metallico, di 5 mm. di diametro; è affacciato in direzione normale al catodo alla distanza di 6 mm. da quest'ultimo. La scarica vi assume forma di arco e la ionizzazione si produce per urto. Le circostanze però che accompagnano la scarica sono qui ben diverse da quelle in cui funziona il tubo Dèjardin: nella Vartax la pressione⁽³⁾ è di qualche centimetro, mentre nei Dèjardin questa si mantiene fra 0.1 e 0.01 mm.; inoltre l'emissione elettronica negli ossidi di Wehnelt è molto copiosa, considerevolmente superiore a quella del tungsteno, per cui nella Vartax si stabiliscono condizioni assai favorevoli per un energico processo di ionizzazione, il che permette di raggiungervi intensità di corrente di gran lunga superiori a quelle caratteristiche per i tubi Dèjardin. Infatti, il Dèjardin operava con correnti dell'entità di 10^{-7} Amp., anche di 10^{-6} Amp.; invece nel modello Vartax da me usato normalmente si raggiungeva 1 Amp., e forzando il regime, si arrivava anche a 1.2 Amp.

Nelle condizioni di alto regime, la luminosità si estendeva in tutta la ampolla, ma l'arco poteva adescarsi anche con correnti più basse, nel qual caso il fiocco luminoso si restringeva, tendendo a localizzarsi nella zona catodica. Introducendo nel circuito di scarica una resistenza regolabile e procedendo per intensità di corrente crescenti, si poteva constatare, che fino

(1) Vedi al riguardo l'articolo DÉJARDIN, « Annales de Physique », 1924, p. 321.

(2) DÉJARDIN, *Recherches sur l'excitation des spectres des gas monoatomiques*, « Annales de Physique », 1924, p. 241.

(3) Nei raddrizzatori termoionici la pressione varia generalmente fra 3-8 cm. di mercurio.

a 0.3 Amp. il fiocco luminoso di colore bleu restava circoscritto attorno al catodo; per l'intensità critica di 0.3 Amp. si osservava un brusco aumento nella luminosità, la quale d'un tratto riempiva tutta l'ampolla con una luce bleu violetta, mentre un'aureola biancastra avvolgeva il catodo.

Le modalità constatate nell'aspetto della luminosità sono accompagnate da differenze di carattere essenziale nell'aspetto spettrale. Durante il basso regime, si osserva il solito spettro rosso, spettro d'arco; appena si raggiungono i 0.3 Amp., cominciano a notarsi righe di splendore straordinariamente forte, prima come righe corti ed in numero di tre, poi in numero di cinque, quando si raggiunge l'intensità di 0.5 Amp. Per 0.8 Amp., si nota sul fondo dello spettro rosso uno spettro nuovo, composto dalle 5 righe suddette, tutte intense, lunghe, nette, di forte splendore. Per la intensità luminosa eccessivamente elevata e per il modo con cui essa viene raggiunta nelle singole righe, si è indotti a ritenere che si è in presenza di uno *spettro rinforzato* (*enhanced lines*).

L'intensità di corrente si faceva variare o per mezzo di una resistenza regolabile inserita nel circuito di scarica, oppure regolando opportunamente il numero di accumulatori messi in carica sul circuito raddrizzato. L'esame dello spettro fu eseguito per mezzo dello spettrofotometro Krüss a doppia fenditura e controllato poi con uno spettroscopio Schmidt-Haensch graduato in lunghezze d'onda. L'uso delle due fenditure disposte in direzione longitudinale, una sul prolungamento dell'altra, riuscì particolarmente vantaggioso per delineare le modalità con cui si eccitavano le righe rinforzate, prima come righe corti, intense soltanto nella parte superiore in corrispondenza della fenditura superiore, e poi come righe lunghe, in modo da coprire anche la fenditura inferiore.

Da numerose osservazioni eseguite in diverse condizioni di regime, ho potuto assegnare allo *spettro rinforzato* le seguenti *caratteristiche*:

λ in \AA	ν (numero di onde)	Intensità luminosa	Regime della corrente
4935	20202	18	0.4 Amp.
4620	21598	20	0.3 Amp.
4558	21954	16	0.5 Amp.
4210	23753	20	0.3 Amp.
4062	24631	20	0.3 Amp.

30-34 Volts

L'approssimazione raggiunta è di 2\AA .

Questo spettro è differente dallo spettro bleu dei tubi Geissler e dagli spettri di scintilla osservati nei tubi Dèjardin e nei Geissler senza elettrodi.

Considerando però la facilità con cui nei gas nobili si produce lo spettro di scintilla, e di più, trattandosi di righe rinforzate, ho supposto in prima ipotesi trattarsi di uno spettro di scintilla di primo ordine, cioè di un sistema di emissione di atomi semplicemente ionizzati, in cui l'elettrone mobile si oppone al resto atomo di carica $2e$. Per atomi siffatti, vale a dire, per un interno atomico doppiamente carico, si deduce, con la teoria di Bohr, la seguente forma per il termine generale⁽¹⁾ della serie spettroscopica :

$$(1) \quad \nu = \frac{4R}{[n + k + \gamma(n, k) + \dots]^2},$$

dove R indica la costante di Rydberg.

Applicando questa relazione allo spettro in esame, si ottiene la serie :

$$(1)' \quad \nu = 4R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

dove il termine corrente k assume valori molto vicini a 8, 9, 9, 11 e 13. Ponendo $R = R_\infty = 109737$, risulta :

$k = 8 - 0.18$		4935 Å°
$k = 9 - 0.29$		4620
$k = 9 - 0.16$		4557
$k = 11 - 0.08$		4210
$k = 13 - 0.52$		4062

Questa serie spettroscopicamente non è buona, perchè contiene espressioni frazionate e soprattutto perchè fa corrispondere a due righe distinte lo stesso valore $k = 9$ del termine corrente. Risulta evidente la necessità di intervalli più grandi nella successione dei valori per il termine corrente.

Si perviene invece ad una serie spettroscopicamente molto buona, qualora si considera l'atomo emissivo come idrogenoide⁽²⁾, vale a dire come sistema in cui un sol elettrone ruota intorno al nucleo di carica Ze . Secondo Bohr, il termine generale della serie spettroscopica assume allora la forma :

$$(2) \quad \nu = \frac{Z^2 R}{1 + \epsilon} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

(1) SOMMERFELD, *La Constitution de l'Atome et les Raies spectrales*, traduzione francese, p. 448.

(2) OLLIVIER, *Cours de Physique Générale*, vol. II, p. 378.

deve Z indica il numero atomico, n il termine fisso, k il termine corrente ed $(1 + \epsilon)$ esprime la correzione che si deve apportare alla costante di Rydberg per il trascinamento del nucleo. Per l'argon risulta:

$$Z = 18$$

$$1 + \epsilon = 1 + \frac{m}{M} = 1 + \frac{5.45 \times 10^{-4}}{39.9} = 1.00001366,$$

per cui questa correzione può considerarsi praticamente trascurabile.

Lo spettro ordinato secondo lo schema (2) fornisce i valori:

$n = 36;$	$k = 70.5$	\parallel	4935 Å°
	78.5	\parallel	4620
	80.5	\parallel	4557
	98.5	\parallel	4210
	112.5	\parallel	4062

di modo che la serie dell'*argon idrogenoide* assume la forma:

$$(2)' \quad \nu = 18^2 \times R \left(\frac{1}{36^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

con k uguale rispettivamente ai valori già assegnati.

Ponendo $k = 2m + \frac{1}{2}$, si ottiene per il termine generale della serie l'espressione:

$$(2)'' \quad \nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{18^2}{\left(2m + \frac{1}{2}\right)^2} \right),$$

oppure, ponendo $k = \frac{4m + 1}{2}$,

$$(2)''' \quad \nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2 \times 18^2}{(4m + 1)^2} \right),$$

con m uguale rispettivamente a 35; 39; 40; 49; 56.

Risulta quindi per l'*argon idrogenoide* lo schema definitivo:

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2 \times 18^2}{(4m + 1)^2} \right) = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{18^2}{\left(2m + \frac{1}{2}\right)^2} \right):$$

m	λ in \AA°	R
35	4935	1.09639×10^5
39	4620	1.09636
40	4558	1.09705
49	4210	1.09660
56	4065	1.09692
		Valore medio
		$R = 1.09664 \times 10^5$

Come si vede, per la costante di Rydberg da questa serie si deduce il valore:

$$R = 1.09664 \times 10^5,$$

in accordo assai buono col valore sperimentale

$$R = 1.09678 \times 10^5,$$

dedotto dalle serie spettroscopiche.

L'accordo ottenuto nei valori di R coi risultati generali delle serie spettroscopiche costituisce una garanzia per la bontà della serie, intesa nel senso spettroscopico; per la forma che vi ha assunto il termine corrente lo spettro in esame può considerarsi come *spettro Pickering nell'argon* ⁽¹⁾.

Il limite della serie per $m = \infty$ fornisce la riga 3647\AA° , la quale viene così ad occupare una posizione intermedia fra la riga estrema dello spettro rosso (3948\AA°) e l'estrema dello spettro bleu (3302\AA°); differisce dal limite della serie Pickering (3650\AA°) nell'olio per il diverso valore della costante di Rydberg.

Secondo lo schema esposto, con una eccitazione ancora maggiore, devono comparire le righe corrispondenti ai quanti intermedi.

Circa il meccanismo emissivo è da osservare che le righe rinforzate appaiono nello spettro, quando la temperatura di emissione è estremamente

(1) Vedi al riguardo: SOMMERFELD, loc. cit., p. 275.

elevata. Per giudicare la temperatura molto alta che si raggiunge nella Vartax durante la scarica, è sufficiente a constatare l'enorme aumento dell'intensità luminosa che si riscontra nello spettro continuo del catodo incandescente nell'istante in cui viene adescato l'arco.

CONCLUSIONI. — 1° L'argon, sotto pressione opportuna, fortemente eccitato, dà luogo ad uno spettro rinforzato, tipo Pickering, rappresentabile mediante la serie:

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{18^2}{\left(2m + \frac{1}{2}\right)^2} \right).$$

2° L'atomo emissivo si comporta da idrogenoide, cioè intorno al nucleo si muove un sol elettrone.

Fisica. — *Sull'aberrazione della luce e teoria della relatività.*
Nota di G. WATAGHIN, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

In questa Nota: 1° si dimostra, che la formola relativistica dell'aberrazione, stabilita da Einstein per onde piane, vale anche per onde sferiche (sorgente di luce a distanza finita); 2° si fa vedere, che nel primo ordine la teoria dell'aberrazione può essere svolta in base alla sola ipotesi, che la luce si propaga in linea retta rispetto a un sistema inerziale qualsiasi; 3° si illustrano alcuni aspetti particolari della teoria precedente.

1. Siano K e K' due sistemi di riferimento Galileiani, e si scelgano i rispettivi assi cartesiani in modo, che all'istante $t = 0$ i tre assi del sistema K coincidano con quelli di K'. Inoltre la velocità \vec{v} di K' rispetto a K sia diretta secondo la direzione comune degli assi X e X'.

All'istante $t = 0$ dall'origine $O \equiv O'$ comune dei due sistemi parte un segnale luminoso. Secondo il principio di relatività ristretta, la superficie d'onda, corrispondente a questo segnale, appare in entrambi i sistemi K e K' sferica con i centri rispettivamente in O e O' (le equazioni delle due sfere essendo notoriamente: $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$).

All'istante $t = \tau$ il segnale arriva in un certo punto $P \equiv P'$, in cui si trovano due osservatori, uno solidale col sistema K, l'altro con K'. L'osservatore del sistema K vede il segnale arrivare in direzione di $P - O$ (in virtù della legge della propagazione rettilinea della luce) e misura l'angolo φ , che il vettore $P - O$ forma con la velocità \vec{v} (cioè con l'asse X); l'os-

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1926.

servatore solidale col sistema K' vede la luce in direzione di $P' - O'$ e misura il corrispondente angolo φ' . Se (x, y, z) e (x', y', z') sono le coordinate di $P \equiv P'$ in K e K' rispettivamente, si ha che $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ e $\cos \varphi' = \frac{x'}{r'}$, ove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

La trasformazione di Lorentz dà allora:

$$\frac{x'}{r'} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(x - vt)^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2}} = -\frac{\frac{x}{r} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \frac{x}{r}}$$

cioè

$$(1) \quad \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \beta}{1 - \beta \cos \varphi}.$$

Questa relazione coincide colla formola stabilita da Einstein per onde piane (sorgente a distanza infinita) ancora nella sua prima memoria sulla relatività ⁽¹⁾.

2. Mettiamoci adesso sul punto di vista prerelativistico (validità della trasformazione di Galileo), e ammettiamo, che in un qualsiasi sistema di Galileo l'energia luminosa si propaghi in linea retta.

Il raggio di luce, emessa all'istante $t = 0$ nell'origine O del sistema K , arrivando all'istante $t = \tau$, nel punto P , ha in quest'ipotesi (rispetto all'osservatore fermo nel sistema K) la direzione di $P - O$, qualunque sia la velocità della sorgente all'istante di emissione e, a fortiori, qualunque sia il moto successivo di essa.

Un osservatore, che si trova all'istante $t = \tau$, in cui la luce arriva in P , nello stesso punto $P \equiv P'$, ma è collegato col sistema K' , e quindi si muove con velocità v rispetto a K , vede (per la stessa ragione) la luce arrivare in direzione di $P' - O'$, cioè *in direzione della congiungente dell'osservatore con quel punto del suo sistema inerziale, in cui si trovava la sorgente all'istante di emissione.*

Limitandoci ai termini del primo ordine in β , possiamo porre la velocità della luce uguale a c p. es. nel sistema K' . Considerazioni geometriche elementari conducono allora alla relazione:

$$(2) \quad \varphi' - \varphi \cong \beta \sin \varphi$$

che coincide nel 1° ordine colla (1).

La (2) vale dunque in prima approssimazione in tutte le teorie, che ammettono la propagazione rettilinea della luce per rispetto a un sistema inerziale

(1) « Ann. d. Phys. », 17, p. 891, 1905.

qualunque, in particolare cioè nella teoria della relatività, teoria balistica e teoria di Lorentz dell'etere non trascinato. La variazione $\varphi' - \varphi$ dell'angolo φ dipende secondo (1) e (2) soltanto dalla velocità relativa dei due osservatori (e da φ).

3. L'interpretazione inesatta della formola (1), che si trova in alcuni dei migliori trattati sulla relatività ⁽¹⁾ (mentre negli altri si dedicano all'aberrazione solo poche parole ⁽²⁾), ha dato luogo a una serie di pubblicazioni di Lenard, Tomascek e La Rosa, i quali erroneamente sostengono, che la teoria di relatività si trovi in contrasto con le osservazioni astronomiche.

L'equivoco era dovuto all'idea, che l'effetto aberrazionale alla pari dell'effetto Doppler, dovesse dipendere dal movimento della sorgente rispetto all'osservatore. Ora ancora nel 1909 Turner ⁽³⁾ ha dimostrato con numerosi argomenti, che l'aberrazione è indipendente dalla velocità della sorgente (relativa all'osservatore) e fece vedere, che questo fatto sta in perfetto accordo con la teoria eterea. Dal punto di vista della teoria della relatività si è occupato del problema Campbell ⁽⁴⁾. Le sue considerazioni però mi sembrano del tutto insufficienti.

La questione è stata sollevata ex novo da Lenard ⁽⁵⁾ e Tomascek ⁽⁶⁾, i quali, indipendentemente da Turner, usando gli stessi argomenti sono arrivati a delle conclusioni analoghe e da queste hanno dedotto degli argomenti contrari al principio della relatività. Anche La Rosa ⁽⁷⁾ si è occupato del problema e si è associato all'argomentazione di Lenard. Una risposta a questi Autori dal campo relativistico è stata data da Thirring ⁽⁸⁾ e, in modo molto più completo, da Page ⁽⁹⁾.

Aggiungo alcune osservazioni alle considerazioni di quest'ultimo Autore.

a) Sovente si fa il confronto fra la direzione, in cui la luce arriva all'osservatore, e la direzione della congiungente di quest'osservatore con la stella all'istante $t = \tau$ di arrivo, e si chiama angolo di aberrazione l'angolo formato da queste due direzioni. Certo questo è un modo molto infe-

(1) Parlo della *Relativitätstheorie* (ed. Vieweg, Braunschweig, 1921) 1^o B., p. 27 di M. v. LAUE e dell'articolo di W. PAULI nella «Encyklopädie d. Math. Wissenschaften», V, 2, p. 563. Il contenuto di questa Nota giustifica questa mia opinione.

(2) V. p. es. i noti trattati di Weyl e di Eddington. Un'interpretazione giusta della aberrazione ho trovato nel libro di J. BECQUEREL, *Relativité et Gravitation* (ed. Gauthier-Villard, Paris, 1922), nella Nota di KOPFF («Phys. Zeitschr.», 22, p. 255, 1922), il quale riproduce una osservazione di Laue, e nella Nota di LEIGH PAGE («Astrophys. Journal», 61, p. 70, n. 1, 1924).

(3) «Monthly Notices of the R. Astron. Soc.», 69, p. 403, 1909.

(4) *Théorie électrique moderne*, ed. Hermann, Paris, 1919, Append. II, p. 450.

(5) «Ann. d. Phys.», 73, p. 89, 1924.

(6) «Ann. d. Phys.», 74, p. 136, 1924.

(7) «Rend. Acc. Lincei» (ser. 5^a) 33, fasc. 1-2, 1924; «Ann. d. Phys.», 75, p. 195, 1924.

(8) «Zeitschr. f. Phys.», 30, p. 63, 1924.

(9) Loc. cit.

lice di esporre la teoria dell'aberrazione! È ovvio intanto, che per poter determinare un tale angolo è necessario conoscere già il movimento della sorgente rispetto all'osservatore. Il problema inverso, e cioè, di determinare la direzione della stella all'istante $t = \tau$, in cui la luce arriva all'osservatore, conoscendo soltanto la direzione dei raggi corrispondente all'istante $t = 0$ di emissione, non è naturalmente risolubile.

b) Da quanto è stato esposto nel § 1 risulta in modo chiaro, che una sorgente di luce non presenta alcun effetto aberrazionale per rispetto a un sistema inerziale. Come osserva Turner, la direzione in cui arriva la luce emessa da una stella, dà esattamente la direzione « vera », in cui si trovava la stella rispetto al sistema all'istante di emissione.

La traiettoria osservata in un sistema inerziale è la traiettoria effettiva, ma relativa a un intervallo di tempo antecedente di τ sec. (ove $\tau = \frac{r}{c}$ è « Latenszeit ») l'intervallo, in cui si fanno le osservazioni.

Ora solo poche stelle più vicine al sistema solare hanno un « moto proprio », che raggiunge il valore di qualche $1''$ all'anno. Per le altre esso è affatto trascurabile. Quindi p. es. per rispetto a un osservatore eliocentrico le stelle conservano una direzione praticamente costante almeno durante qualche anno.

c) Ben diversamente si presenta il problema nel caso, in cui l'osservatore si muove di moto accelerato. Le traiettorie dell'energia luminosa relative a un tale osservatore non sono più in generale rette e le considerazioni precedenti perdono ogni validità.

Eppure è precisamente questo caso, che interessa il fenomeno scoperto da Bradley. Infatti, la teoria svolta nei §§ 1 e 2 dimostra, che ogni incremento di velocità ⁽¹⁾ del sistema di riferimento dà luogo a un effetto aberrazionale, cioè ad una variazione $\varphi' - \varphi$ dell'angolo φ , definita dalla (1), ed è facile vedere, che questo teorema, *mutatis mutandis*, vale anche nelle teorie « classiche ». In particolare l'aberrazione annua è dovuta alle variazioni, che subisce la velocità della terra nel suo moto intorno al sole.

Come osservano giustamente Laue e Page, la trattazione del caso di un sistema animato di moto vario si riconduce senz'altro alla considerazione di un osservatore, che passa con continuità da un sistema inerziale (in cui si trova in quiete momentanea) a un altro. Essendo trascurabile l'effetto di parallasse e di moto proprio della stella, la sua direzione varia secondo la formola (1), quando si passa da un sistema K al « successivo ». È importante ricordare a questo proposito, che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo. E che quindi la variazione totale della direzione di una

(1) Questi incrementi possono, naturalmente, esser misurati in un sistema Galileiano qualunque, o anche rilevati dall'osservatore stesso, p. es., mediante le misure degli effetti meccanici del cambiamento di velocità.

stella, corrispondente a infinite variazioni elementari, può essere ottenuta, passando direttamente dal primo all'ultimo sistema di Galileo.

La velocità della terra relativa al Sole (sistema Galileiano) varia in 6 mesi di circa $60 \frac{\text{kil.}}{\text{sec.}}$. La (1) o (2) dà per l'angolo $\varphi' - \varphi$ corrispondente un valore di circa $41''$.

Analoghe considerazioni valgono evidentemente anche nelle teorie ordinarie « non relativistiche », in cui è ammessa la legge della propagazione rettilinea della luce (nel vuoto). Comunque si ragioni, è sempre la variazione di velocità nel moto accelerato dell'osservatore, che produce l'effetto di aberrazione ⁽¹⁾.

In questo senso l'*aberrazione annua è un effetto del moto di rotazione della terra intorno al sole del tutto paragonabile ad altri effetti dei moti rotatori*, che si manifestano p. es. nelle esperienze del pendolo di Foucault, del giroscopio, o nelle esperienze ottiche di Harres, di Sagnac o di Michelson e Hale. Da questo punto di vista l'aberrazione non solo fornisce una prova, che *il sistema geocentrico non è inerziale*, bensì permette di determinare l'odografo e quindi anche la forma e le dimensioni dell'orbita terrestre relative a un certo sistema di Galileo (per cui quest'orbita risulta ellittica), il quale coincide notoriamente col sistema eliocentrico. Indirettamente così si ottiene una *prova del moto rettilineo e uniforme del baricentro solare*.

È da notarsi, che solo la grandiosità delle distanze astronomiche e sensibilità dei metodi ottici permette di rilevare una rotazione così lenta (periodo di un anno), la quale certo non sarebbe rilevabile con un'esperienza meccanica.

d) Un particolare notevole dell'effetto aberrazionale è costituito dall'assimetria del fenomeno, nel senso, che i due casi: moto accelerato della sorgente rispetto a un osservatore solidale con un sistema Galileiano, e moto accelerato dell'osservatore relativo a una sorgente in quiete rispetto a un sistema di Galileo, non sono per nulla equivalenti, sebbene il moto

(1) La differenza fra il caso di una sorgente posta a distanza finita e una infinitamente lontana consiste in ciò, che nel secondo caso la direzione della luce resta costante per rispetto a un sistema Galileiano qualsiasi, mentre nel primo tale direzione subisce in generale delle variazioni dovute al moto proprio, che rispecchiano però fedelmente la traiettoria della sorgente relativa al sistema Galileiano prescelto. Rispetto a un sistema animato di moto accelerato la direzione dei raggi provenienti da una sorgente infinitamente lontana varia soltanto per effetto di aberrazione, mentre per una sorgente situata a distanza finita all'aberrazione si sovrappone l'effetto del moto proprio della sorgente. Le obiezioni di Tomascek (loc. cit., p. 143) relative alla sorgente di luce terrestre sono ovviamente prive di fondamento. Infatti, una sorgente a distanza finita, connessa rigidamente o quasi coll'osservatore, il quale si muove di moto accelerato, presenta un effetto di aberrazione apprezzabile solo nel caso che la variazione di velocità, corrispondente al tempo impiegato dalla luce per giungere dalla sorgente all'osservatore, non è trascurabile di fronte a c . (Cfr. anche TOMASCEK, « ZS. f. Phys. », 32, p. 397, 1925).

relativo può essere identico nei due casi. La distinzione fra questi due casi appare naturale dal punto di vista della relatività generale (come anche dal punto di vista della fisica classica). È l'accelerazione relativa alla distribuzione data del tensore energetico nell'universo (distribuzione, che determina le forze d'inerzia) che è diversa nei due casi.

Fisica. — *Metodo per la misura delle variazioni delle capacità calorifiche nei campi magnetici.* Nota di BIANCA NANNEI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. ARMELLINI.

In un mio precedente lavoro sulla « variazione della capacità calorifica di alcune sostanze in un campo magnetico » ⁽²⁾ descrissi le modificazioni portate ad un calorimetro Bunsen per renderlo estremamente sensibile.

Volendo completare e continuare, in condizioni di larga applicabilità, ricerche analoghe ricorsi ad un nuovo metodo. I risultati ora ottenuti, e che confermano quelli precedenti, per quanto riguarda la capacità calorifica, permettono anche di considerare assai nettamente il fenomeno dello sviluppo e dell'assorbimento di calore in una sostanza, in seguito allo stabilirsi o all'annullarsi, o anche al variare del campo magnetico in cui essa si trova; la qual cosa è non solo interessante, ma necessaria per rappresentare esattamente il comportamento termico delle varie sostanze nei campi magnetici.

Riservandomi di pubblicare per esteso le misure eseguite e quelle attualmente in corso in apposita Memoria, mi permetto di esporre preliminarmente in questa Nota i tratti più caratteristici del mio metodo.

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI.

Le misure eseguite per determinare le variazioni della capacità termica di varie sostanze nei campi magnetici di varia intensità, avevano dato sempre risultati assai incerti, anzi talvolta precisamente contrastanti.

Era perciò che, fin dal 1921 avevo iniziato la serie di ricerche che, secondo me, avrebbero dovuto eliminare ogni incertezza in proposito.

Nel 1923, pur avendo intenzione di continuare la ricerca, credetti opportuno pubblicare i primi risultati ottenuti, perchè essi ponevano già chiaramente in evidenza l'andamento generale del fenomeno.

Le successive ricerche furono da me condotte ancora secondo il criterio di massima della precedente, il quale consisteva essenzialmente:

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1926.

(2) « Nuovo Cimento », 1923.

a) Nel somministrare elettricamente una nota quantità di calore ad un calorimetro contenente, oltre ad un fluido, una data quantità della sostanza da studiare, attraversata o no da un flusso magnetico più o meno intenso.

b) Nell'osservare le variazioni di temperatura del calorimetro stesso.

c) Nel calcolare da tali osservazioni, per le varie sostanze i coefficienti di capacità calorica e le rispettive variazioni con l'intensità del campo magnetico.

Però, onde poter applicare lo stesso metodo anche per sostanze in cui presumibilmente le variazioni in questione, dovessero essere di entità assai differenti, persino nell'ordine di grandezza, credetti opportuno:

dare a tutta la misura un carattere prevalentemente differenziale allo scopo di non dover ricavare il risultato finale da differenze di due determinazioni sperimentali, cosa che, se non era affatto preoccupante nei casi da me precedentemente studiati, lo poteva divenire in altre circostanze, e specialmente quando si fosse trattato di sperimentare su sostanze che variano pochissimo la loro capacità calorifica col campo magnetico;

di misurare la differenza delle temperature dei due calorimetri con un dispositivo bolometrico, onde poter variare quasi ad arbitrio la sensibilità della misura stessa in modo da trovarmi sempre in grado di poter sperimentare nelle migliori condizioni.

Un'altra caratteristica del metodo è costituita dalle piccole dimensioni e dalla compattezza di tutto il dispositivo, che può essere facilmente alloggiato tra i poli di un ordinario elettromagnete in modo da lasciare i traferri di gran lunga minori di quelli che si riscontrano nei dispositivi impiegati da altri sperimentatori e da me stessa nella ricerca precedente.

DESCRIZIONE DELL'APPARECCHIO.

Esso consiste essenzialmente di due calorimetri, costituiti di recipienti di sottilissima lamina di ottone occupanti lo spazio di $110 \times 70 \times 10$ mm. e della forma indicata nell'annessa figura 1. Per mezzo di un apposito sostegno di legno questi calorimetri vengono tenuti fra i poli di due elettromagneti, pure identici e percorsi dalla stessa corrente elettrica. Uno di essi però è stato avvolto bifilarmente e coi circuiti collegati in modo da non generare alcun campo magnetico; pur rimanendo, come è ovvio, lo sviluppo del calore per effetto Joule, identico a quello che si ha nell'altro elettromagnete. La sostanza da studiare N preparata in forma di due dischi identici di circa 30 mm. di diametro, viene tenuta sospesa, mediante sostegni, nell'interno di ogni calorimetro in corrispondenza dei poli magnetici.

Per ottenere una buona agitazione del liquido, disposi in ciascun calorimetro i due diaframmi E E, che determinano due canaletti laterali M,

e una specie di stantuffo C spostabile alternativamente di circa. 15 mm. in senso verticale per mezzo di un semplicissimo rinvio meccanico azionato da un motorino. È evidente come tale movimento di va e vieni determini un'ottima agitazione di tutto il liquido.

Il riscaldamento è fornito dalla spirulina A di filo di nichelina rivestito

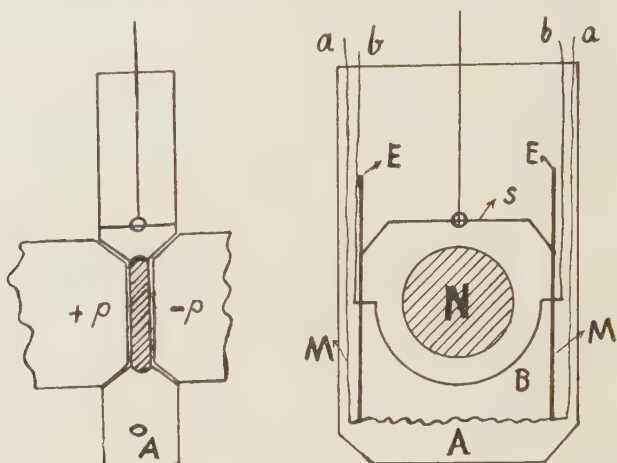


Fig. 1.

di cotone della resistenza di 3 Ohm immersa nel fluido calorimetrico. I suoi reofori a, a, isolati, escono dai due canali laterali M.

Per la misura della temperatura infine, ricorsi a due spiruline di filo di platino, avvolte su due striscette di fibra B, sospese tra la sostanza da studiare N

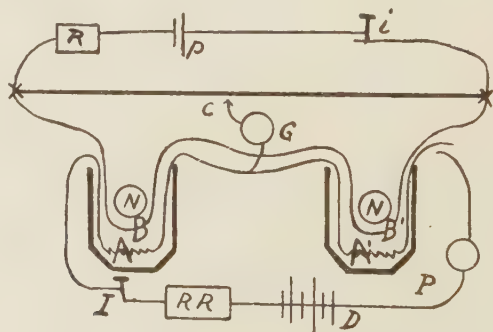


Fig. 2.

e la spirulina riscaldante A. I loro reofori b, b escono pure isolati, lungo i canali laterali.

La disposizione del circuito è indicata schematicamente nella fig. 2; il circuito indicato a tratto grosso è quello del riscaldamento e consta delle due spiruline riscaldanti A A', del reostato regolabile R R, della batteria di

accumulatori D, dell'amperometro P, e dell'interruttore I. Il circuito indicato a tratto sottile è quello bolometrico e costituisce il solito ponte di Wheatstone a filo. Esso consta delle due resistenze di filo di platino B e B', del reocordo appositamente costruito di resistenza approssimativamente uguale a quella complessiva delle due spiruline B B' onde avere il massimo di sensibilità, del contatto scorrevole C, del galvanometro a riflessione G, e del circuito della pila p col rispettivo reostato di regolazione R.

È inutile aggiungere che ebbi somma cura di eliminare dal circuito bolometrico tutti gli effetti perturbanti e in particolare quelli termoelettrici, che, data la piccola resistenza del circuito stesso e l'alta sensibilità del galvanometro avrebbero potuto disturbare assai il corso delle misure.

La sensibilità termica di tutto il sistema poteva venire spinta, senza detrimento della stabilità dello zero, fino ad ottenere una deviazione di 1 mm. sulla scala, per un ventimillesimo di grado di differenza di temperatura nei due calorimetri ⁽¹⁾. Ma non occorrendo praticamente tale sensibilità si è sempre tenuto il galvanometro alquanto shuntato e si è limitato a pochi centesimi di Ampère l'intensità della corrente nel circuito della pila.

SVOLGIMENTO DELLE MISURE.

Il procedimento usato nelle misure fu il seguente: Dopo aver posto nei due calorimetri due dischi identici N della stessa sostanza, mandavo attraverso le spiruline riscaldanti una corrente costante per un tempo determinato. Naturalmente, siccome le capacità calorifiche dei calorimetri completi, erano le stesse, l'equilibrio del circuito bolometrico, raggiunto in precedenza, non veniva turbato.

Generando invece anche il campo magnetico, se questo ha qualche azione sul corpo, l'equilibrio può essere rotto.

Come sostanza da esaminare mi servii per una prima serie di misure, di dischi di piombo del diametro 30 mm. e del peso di gr. 126.10. Con questi potei assicurarmi che l'equilibrio del circuito bolometrico non viene turbato sia con campo come senza, e comunque se ne vari la temperatura.

Passai allora allo studio del ferro. Con questo osservai invece, che, anche a temperatura ambiente, appena generato un campo di 3000 Gauss si stabilisce fra i due calorimetri una differenza di temperatura, corrispondente ad un aumento in quello posto nel campo. Questo aumento può essere dovuto a tre cause: alle correnti indotte, all'effetto magneto-calorico del Weiss, alla diminuzione della capacità calorifica.

(1) La scala col cannocchiale dista di m. 2.30 dal galvanometro.

L'effetto delle correnti indotte nel metallo è però trascurabile, e ciò lo si deduce dall'osservazione col piombo e altri metalli, ed anche ponendo nei due calorimetri pezzi di ferro già magnetizzati (con che vengono eliminati gli altri due effetti).

Rimangono quindi l'effetto magneto-calorico del Weiss e la variazione di capacità calorifica. Il primo, come si sa, consiste in una variazione di temperatura che si genera nei corpi ferro-magnetici quando vengono posti o tolti da un campo magnetico. (Variazione che corrisponde ad un riscaldamento quando son posti nel campo e ad un raffreddamento quando ne sono tolti). Se vi fosse solo questo effetto a produrre una differenza di temperatura tra i due calorimetri, questa dovrebbe rimanere costante, o tutto al più diminuire quando si applicasse poi ai due calorimetri un ulteriore eguale riscaldamento. Invece tale differenza *col campo usato* cresce coll'aumentare del riscaldamento, il che ci conduce alla conclusione che, oltre l'effetto Weiss, dovrà esservi un altro fenomeno: la variazione della capacità calorifica, o meglio, in questo caso, la *diminuzione* della capacità calorifica del ferro.

Ad ogni modo per evitare il turbamento portato dall'effetto Weiss, cominciavo il riscaldamento dopo aver generato il campo e raggiunto di nuovo l'equilibrio; e poi procedevo nelle misure col solito metodo calorimetrico, osservando l'andamento della variazione della temperatura prima, durante e dopo il riscaldamento.

In tal guisa ho potuto: 1°) colla prima parte della misura valutare il riscaldamento che si manifesta nel ferro in seguito alla sua magnetizzazione; 2°) controllare sia qualitativamente come quantitativamente l'effetto, già osservato sin dal 1923, del campo magnetico sulla capacità calorifica del ferro.

Ottica cristallografica. — *Sur le dédoublement apparent de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow* ⁽¹⁾. Nota della prof. MARCELLE PHILIBERT, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

Dans un travail en cours d'impression, pour le « Boll. del R. Uff. Geol. » (vol. 52), monsieur le professeur C. Perrier a signalé un fait intéressant: deux lames minces de calcite, étudiées par lui, à l'aide de la platine de Fédorow, montrent deux axes optiques. Ce dédoublement apparent de l'axe est très net: pour la première coupe étudiée, provenant de la maison Voigt et Hochgesang à Göttingen, M. le prof. Perrier a noté un angle d'environ 7° entre les axes en utilisant des segments de la platine d'in-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico-petrografico del R. Ufficio Geologico.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1926.

dice $n_s = 1,516$. N'étant pas absolument sûr de la direction suivant laquelle avait été faite cette coupe, M. le prof. Perrier a commandé, tout spécialement, la deuxième à la maison Steeg et Reuter de Homburg, coupe qui fut faite rigoureusement parallèle au plan de clivage (1011). Cette dernière, plus mince, (10 290 $\mu\mu$ contre 21 980) a montré la même anomalie que la première, et cela à un degré encore plus marqué: M. le prof. Perrier note un angle d'une 10^{ne} de degrés, avec les mêmes segments d'indice $n_s = 1,516$.

L'hypothèse d'un dédoublement effectif de l'axe, par suite d'actions mécaniques exercées sur le cristal, était rendue moins probable par le fait que les deux préparations, de provenances différentes, présentent ce dédoublement. Aussi M. le prof. Perrier a-t-il tout de suite cru pouvoir attribuer cette anomalie à une influence des verres qui accompagnent forcément la coupe du minéral pour en permettre l'étude.

La notion de l'anisotropie accidentelle acquise par le verre, sous des influences variées (telles que la trempe) qui ont naître des tensions intérieures, est, en effet, classique depuis les travaux de Fresnel, de Biot, de Brewster, de Czapski, de Pockels, de Koenig, etc.

C'est dans le but de préciser la cause de ce dédoublement de l'axe de la calcite, étudiée avec la platine de Fédorow, que M. le prof. Perrier m'a chargée de faire les mesures dont ces Notes résument les résultats.

I. Une première étude, faite sans idée préconçue, a permis de tirer un certain nombre de conclusions intéressantes:

La platine restant horizontale, par une simple rotation autour de l'axe A_1 ⁽¹⁾, on amène une section principale de la calcite à être perpendiculaire à l'axe A_4 du tambour, par une rotation autour de A_5 , on porte alors ce plan de section principale à 45° des nicols et, par une inclinaison convenable de la platine autour de l'axe A_4 , on constate l'existence des deux axes optiques signalés. Avec la coupe de Steeg et Reuter et des segments d'indice $n_s = 1,516$, le plan de section principale de la calcite coïncidant pour une expérience avec la graduation $\alpha_1 = 70^\circ$ du cercle A_1 , j'ai trouvé pour l'un des axes $\bar{AO}' = 46^\circ$ et pour l'autre $\bar{AO}'' = 56^\circ$, ce qui correspond dans le minéral à un angle de $49^\circ 26' - 41^\circ 14' = 8^\circ, \frac{1}{4}$ ⁽²⁾.

A l'aide du compensateur de Berek et du double coin de Wright, j'ai mesuré la biréfringence de l'ensemble pour différentes inclinaisons de la

(1) Pour désigner les axes de rotation de la platine, j'ai adopté la notation de Berek (M. BEREK, *Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmethoden*, Bornträger, Berlin, 1924, p. 9). A_5 désigne l'axe du microscope; A_3 et A_1 les deux axes qui sont confondus avec A_5 quand la platine est horizontale. A_3 permet la rotation de toute la platine, A_1 celle de la partie centrale seulement.

L'axe A_4 est l'axe du tambour de la platine, qui reste constamment perpendiculaire à l'axe optique du microscope. Il permet d'incliner tout l'ensemble de la platine, par rapport à un plan horizontal. — A_2 , perpendiculaire à A_4 , est horizontal quand A_4 est à son O, et permet d'incliner la partie centrale de la platine.

(2) Pour faire le calcul de l'angle des axes dans l'intérieur du minéral, j'ai employé

platine autour de A_4 (allant depuis des inclinaisons inférieures au premier axe optique rencontré, jusqu'à des inclinaisons supérieures au deuxième). Avant et après les axes, la biréfringence est négative; entre les axes, elle est positive. Dans ce cas j'ai mesuré pour la biréfringence maxima entre les axes $\Gamma = 14.8$ dans la direction 51.2° mesurée au tambour de la platine.

La direction de l'axe optique classique de la calcite, qui fait avec la normale à la préparation un angle de $44^\circ 34'$ correspond dans le segment supérieur, à un angle d'environ 50° ($n_s = 1.516$). En donnant à la platine une inclinaison de 50° autour de l'axe A_4 , on constate que la calcite n'intervient pas du tout: les bandes noires de compensation, données par le double coin de Wright, se prolongent en ligne droite de part et d'autre des lignes de contour qui séparent les fragments de calcite des régions où ne se trouve que le verre⁽¹⁾. Cela confirme l'idée que la calcite étudiée a bien son axe unique et que les deux axes observés ne sont qu'apparents, ce qui élimine l'hypothèse, que l'on aurait pu envisager un moment, d'une biaxialité accidentelle, conséquence d'actions mécaniques supportées par le cristal.

Au contraire, il est très naturel d'interpréter le phénomène, observé quand la coupe mince du minéral est placée entre les segments de la platine, comme une résultante de deux biréfringences: la biréfringence propre de la calcite et celle des verres qui l'accompagnent. Pour chaque direction du rayon lumineux, on pourrait interpréter le phénomène en superposant deux sections d'indicatrices différentes, de telle manière que l'axe de plus grande élasticité de l'une (calcite) coïncide avec l'axe de plus petite élasticité de l'autre. Dans la direction correspondant à l'axe vrai de la calcite, seul le deuxième facteur interviendrait; les axes apparents correspondraient aux directions pour lesquelles la calcite et le facteur de perturbation ont des biréfringences contraires de mêmes valeurs absolues qui se neutraliseraient l'une l'autre.

II. Pour préciser la nature de la biréfringence qui, superposée à la biréfringence de la calcite, donne les phénomènes observés, il convient, tout d'abord, de connaître exactement la biréfringence vraie de la calcite correspondant à diverses inclinaisons du tambour, lorsque on emploie l'un ou l'autre des couples de segments sphériques de la platine. Les calculs effectués dans les deux cas, ont donné le tableau suivant qui a permis de construire les deux courbes C et C' (de la Fig. 1).

la valeur $n_m = 1.6545$ pour l'indice de la calcite suivant ces directions. Cette valeur de n_m est la moyenne entre ω et le valeur de ϵ_1 , calculée d'après la formule

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 \epsilon^2}{\omega^2 \sin^2 \nu + \epsilon^2 \cos^2 \nu}}$$

pour une direction qui fait un angle $\nu = 10^\circ$ avec l'axe optique vrai.

(1) Notons, en passant, que cette direction de l'axe optique vrai ne coïncide pas avec celle pour laquelle la biréfringence a sa valeur maximale entre les deux axes, fait dont nous aurons l'explication plus tard. Dans le cas présent j'ai trouvé pour la biréfringence, dans la direction 50° , $\Gamma = 13.4 \mu\mu$.

Angle dans le minéral	$\omega - \varepsilon_1$ (1)	$\Delta = \frac{(\omega - \varepsilon_1) d}{\cos i_m}$ (en $\mu\mu$)	Angle dans les segments		Angle dans le minéral	Δ	Angles dans les segments	
			$n_s = 1.516$	$n_s = 1.649$			$n_s = 1.516$	$n_s = 1.649$
36° 34'	0.00 392	50.27	—	36.71°	45° 34'	0.44	51.20°	45.77°
38° 34'	0.00 202	26.60	42.86°	38.71°	46° 34'	3.74	52.41°	46.77°
40° 34'	0.00 099	13.42	45.21°	40.73°	47° 34'	8.55	53.66°	47.78°
41° 34'	0.00 056	7.71	46.40°	41.81°	48° 34'	15.40	54.90°	48.78°
42° 34'	0.00 025	3.50	47.58°	42.75°	50° 34'	32.75	57.45°	50.80°
43° 34'	0.00 003	0.43	48.78°	43.75°	52° 34'	66.41	60.06°	52.81°
44° 34'	—	—	49.98°	44.75°	54° 34'	140.7	—	54.83°

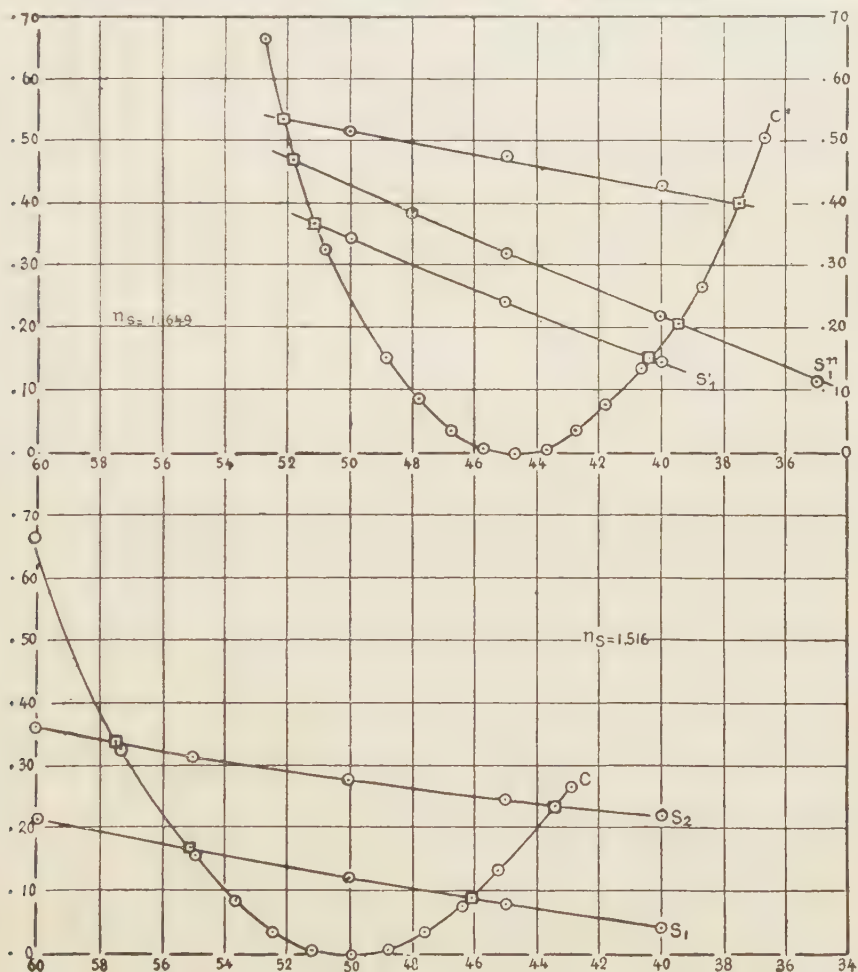


Fig. 1. — Ordonnées en $\mu\mu$. — Abscisses en degrés. \circ Courbes c = Valeurs calculées; Courbes S = Valeurs mesurées. \square Axes optiques.

(1) ε_1 a été calculé par la formule $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\omega^2 \sin^2 v + \varepsilon^2 \cos^2 v}}$; $d = 10299 \mu\mu$.

III. Croyant que les segments sphériques de la platine et la plaque de verre qui les accompagne avaient été travaillés avec un soin tout spécial, et vérifiés par les constructeurs de l'appareil, nous avons d'abord cru devoir attribuer la cause perturbatrice à la lame de verre porte-objet. Dans les traités de physique classiques, par exemple dans l'ouvrage tout récent de M. le prof. Bouasse⁽¹⁾, on signale que les lames de verre du commerce sont fréquemment anisotropes, uniaxes, l'axe étant normal à la lame. J'ai donc cherché à déterminer la biréfringence de parties de la préparation où se trouve le verre seulement, au voisinage du cristal de calcite sur lequel ont porté les mesures précédentes, dans le but de voir si l'hypothèse d'une indicatrice optique uniaxe, à axe perpendiculaire à la préparation, peut être admise pour le verre porte-objet.

J'ai obtenu, entre autres, les valeurs suivantes, pour la biréfringence du verre, dans des inclinaisons voisines de celles qui correspondent aux axes apparents.

$n_s = 1.516$									
T	$\alpha_1 = 35^\circ$ Γ	$\alpha_1 = 85^\circ$ Γ	$\alpha_1 = 62.5^\circ$ Γ	$\alpha_1 = 107.5^\circ$ Γ	Γ	Γ	Γ	Γ	Γ
60°	41.4	39.1	39.4	31.2	37.8	36.6	35.7	38.8	—
55°	33.6	—	—	—	31.6	—	—	—	31.6
50°	26.6	25.1	29.2	17.6	26.5	24.8	24.3	24.4	23.9
45°	22.0	—	—	—	—	—	—	—	—
40°	17.6	16.2	19.5	9.0	17.9	16.5	12.7	17.4	16.7

$n_s = 1.649 (2)$			
T	Angle dans le verre	$\alpha_1 = 42.5^\circ$ Γ	$\alpha_1 = 260^\circ$ Γ
51° 5	58° 1	46.1	—
50°	56° 2	—	—
45°	49° 5	35.6	38.8
40°	42° 9	23.7	31.6
35°	38° 5	—	25.0
30°	32° 8	—	21.7

(1) H. BOUASSE, *Optique cristalline et double réfraction, polarisation rectiligne et elliptique* (Paris, Librairie Delagrave, 1925).

(2) Quand $n_s = 1.516$ on peut admettre que le rayon n'est pas dévié sensiblement en passant de la lame dans le segment, l'indice du verre étant environ $n_v = 1.52$. C'est cette même valeur $n_v = 1.52$ que j'ai utilisée pour calculer l'angle du rayon dans le verre quand $n_s = 1.649$.

Après un simple examen de ces résultats, deux conclusions s'imposent :

1. Avant tout, on constate, pour un couple de segments donné, des valeurs très différentes les unes des autres, lorsque la préparation a des positions différentes autour de l'axe A_1 . Un semblable fait est incompatible avec l'hypothèse adoptée, trop simple. L'indicatrice optique correspondant à la biréfringence qui trouble celle de la calcite, ne peut être uniaxe; elle doit être biaxe.

2. En deuxième lieu, lorsque l'on change les segments, on obtient des valeurs notablement différentes pour la biréfringence du verre, les mesures étant naturellement rapportées dans les deux cas aux mêmes directions dans l'intérieur du verre porte-objet.

La biréfringence perturbatrice cherchée ne peut donc pas être localisée dans la lame porte-objet. Les segments eux-mêmes doivent intervenir dans la création de cette biréfringence et ils doivent intervenir comme une substance anisotrope biaxe.

Une étude méthodique des deux couples des segments, faite en éliminant complètement la préparation s'imposait donc.

Chimica. — *Ricerche sopra alcune notevoli sublimazioni vesuviane.* Nota di G. CAROBBI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

Il prof. O. De Fiore raccolse il 5 luglio 1925 nel fondo del cratere vesuviano alcune incrostazioni che tappezzavano le pareti interne di una fumarola ad anidride solforosa situata in un canale lavico della cupola gialla, formatasi nell'aprile-maggio 1924. Nel febbraio 1926 la temperatura di questa fumarola era ancora di 325°.

L'analisi spettroscopica del miscuglio salino costituente tali incrostazioni permise subito di riconoscere in esso la presenza dell'acido borico. Si presentava, quindi, assai interessante uno studio dettagliato, al fine di accertare se l'acido borico si trovava allo stato libero oppure sotto forma di sale, giacchè è ben noto che, mentre il composto H_3BO_3 è stato varie volte rinvenuto fra i prodotti dell'attività vesuviana, non si conoscevano, invece, fino ad oggi, sali contenenti boro. Infatti, solo di recente, il professor Zambonini ⁽²⁾ ha scoperto in alcune sublimazioni vesuviane una varietà cesifera del fluoborato di potassio per la quale ha proposto il nome di Avogadrite. Il nuovo minerale è stato rinvenuto in cristallini estremamente piccoli, e spesso mal conformati. Ciò nonostante l'autore, con grande perizia associata ad una accuratezza estrema, è riuscito a definire cristallograficamente i cristallini in questione, dimodochè, riunendo i dati cristallografici con i risultati di alcune analisi microchimiche e con le proprietà ottiche, è stato possibile definire il nuovo minerale, che è il primo fluoborato rinvenuto in natura.

L'acido borico (sassolino) è, invece, noto da molto tempo fra i prodotti delle fumarole vesuviane. Fu rinvenuto per la prima volta da Monticelli e Covelli ⁽³⁾ nel 1817. È stato, in seguito, osservato da Palmieri nel 1856 e dallo stesso autore insieme a Guiscardi nel 1861 ⁽⁴⁾. Johnston-Lavis ⁽⁵⁾ lo ritrovò misto ad allume su alcune fumarole del 1891. Il professor Zambonini ha osservato il sassolino nel 1908 ⁽⁶⁾ insieme a zolfo e gesso, in alcune fumarole del gran cono e nel giugno 1909 ⁽⁷⁾, associato a realgar, zolfo e gesso in una fumarola dell'Atrio del Cavallo.

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1926.

(2) « Rend. R. Accad. Naz. Lincei » [6], 3, 644 (1926).

(3) « Giornale Enciclopedico di Napoli », p. 239 (1820).

(4) « Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli », anno 1873, p. 47.

(5) « Rassegna delle Scienze Geol. in Italia », I, 7 (1891).

(6) « Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. Napoli », anno 1908, p. 156.

(7) *Su alcuni minerali non osservati finora al Vesuvio*, « Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli » (Adunanza del 4 luglio 1908).

Infine, la più recente notizia sul ritrovamento, al Vesuvio, di fumarole ad acido borico ci è data da L. Bernardini⁽¹⁾ il quale, nella seduta del 27 novembre 1912, comunicava alla Società Chimica di Roma di aver isolato dai prodotti di una fumarola dell'orlo craterico N-NE, a pochi metri a levante, cioè, dell'« Échancrure », gr. 9 di belle laminette di acido borico, quasi puro.

Nuove ricerche chimiche e cristallografiche sui prodotti di una fumarola ad acido borico apparivano però giustificate e opportune se si pensa a quanto abbiamo accennato in principio di questa breve Nota.

Un'analisi qualitativa accurata della parte solubile in acqua a freddo (dove dovevano trovarsi l'acido borico e la maggior parte dei suoi sali, eventualmente presenti) rivelò la presenza dei seguenti cationi: Fe^{++} , Al^{+++} , Mn^{++} , Ca^{++} , Na^+ e K^+ nonchè degli anioni: borico, cloridrico e fluoridrico, quest'ultimo in piccola quantità. Costatai anche la presenza di piccole quantità di titanio. Furono ricercati con esito assolutamente negativo gli acidi, carbonico, solforico, solforoso e silicico.

L'analisi quantitativa della soluzione ottenuta trattando con acqua a freddo gr. 27 del miscuglio salino dette i seguenti risultati:

Fe	gr.	0.3727	cioè	1.38 %
Al	»	0.1619	»	0.60 »
Ca	»	0.0276	»	0.10 »
Mn	»	0.0051	»	0.02 %
K	»	0.4237	»	1.57 »
Na	»	0.2838	»	1.05 »
TiO_2	»	0.0140	»	0.05 »
Cl	»	0.5626	»	2.08 »
F	»	0.0900	»	0.33 »
H_3BO_3	»	10.48	»	38.82 »

L'analisi fu eseguita con i soliti metodi. Il Mn ed il Ti furono dosati colorimetricamente, il primo secondo M. Marshall (2) e A. E. Walters (3), il secondo con acqua ossigenata, previa decolorazione dei composti di ferro con acido fosforico.

L'acido borico venne determinato titolando con soda caustica mezzo normale in presenza di glicerina, usando tutte le precauzioni che consiglia Treadwell (4).

(1) *L'acido borico nell'attuale fase vulcanica del Vesuvio*, « Rend. della Società Chimica Italiana », serie II, 5, 15 (1913).

(2) « Chem. News », 83, 76 (1901).

(3) « Chem. News », 84, 239 (1901).

(4) *Trattato di Chimica Analitica*, vol. II.

Per il dosaggio del fluoro ricorremmo alla modificazione di Merwin (1) del metodo di Steiger (2); ci basammo, cioè, sulla decolorazione che subiscono le soluzioni gialle di solfato di titanio per azione dei fluoruri.

Giova ripetere che questi dosaggi sono stati eseguiti sulla parte solubile in acqua a freddo delle sublimazioni in questione. Si deve, quindi, tener presente che le percentuali basse, trovate per alcuni elementi (per esempio il fluoro), possono anche dipendere dalla poca solubilità in acqua a freddo dei composti che li contengono.

La presenza del titanio sotto forma di un composto solubile presenta un certo interesse. Al Vesuvio il titanio in tale condizione è stato ricordato per la prima volta in modo impreciso dal compianto Palmieri. In seguito, è stato rinvenuto da L. Coniglio (3) insieme a solfiti alcalini, ed infine dal prof. Zambonini (4) in collaborazione col prof. Coniglio nella parte solubile in acqua di un grosso frammento di lava, profondamente alterato dalle esalazioni fumaroliche, raccolto nel novembre 1924 sul fondo del cratere vesuviano.

In una Nota di prossima pubblicazione io darò conto della presenza del titanio in alcuni allumi vesuviani.

Data la piccolissima quantità di questo elemento presente nelle sublimazioni descritte in questa Nota non mi è possibile definire in quale forma di combinazione si trovi. Se, però, si tiene conto del fatto che in questi stessi prodotti fumarolici sono stati rinvenuti dei fluosilicati alcalini (5) si può ritenere verosimile la presenza al Vesuvio anche di fluotitanati alcalini (6).

Ho creduto opportuno di eseguire un'accurata analisi spettrografica della parte solubile in acqua a freddo delle sublimazioni in questione. Tali indagini, eseguite col grande spettrografo EI della Casa Hilger, hanno permesso l'identificazione di piccole quantità di V, di Mg nonchè, forse, di Zr.

La misura delle lunghezze d'onda è stata fatta col solito metodo di Urbain, confrontando con lo spettro del ferro.

Nella tabella che segue non sono generalmente riportate, per brevità, le linee degli elementi già identificati per via chimica.

(1) « Am. Journ. Sc. », 28, 119 (1909).

(2) « Journal of Am. Chem. Soc. », 30, 219 (1908),

(3) « Annali R. Osservatorio Vesuviano » [3] 1, 37 (1924).

(4) « Rend. R. Accad. Lincei », [6] 3, 521 (1926).

(5) Vedi ZAMBONINI F. e CAROBBI G., *Sulla presenza del fluosilicato sodico e di quello di potassio fra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio*, « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », [6], 3 (1926).

(6) Circa la presenza del fluoro fra i prodotti delle fumarole vesuviane, ricordo che questo elemento vi fu rinvenuto per la prima volta da Arcangelo Scacchi. Maggiori particolari, che qui non posso riportare per mancanza di spazio, sono dati nel lavoro citato nella nota precedente.

TABELLA I.

Lunghezze d'onda calcolate	Intensità	Lunghezze d'onda degli autori	Intensità (1)	Elementi
3998.9	media	3998.7	8	Ti
3989.9	»	3989.9	8	Ti
3964.1	debole	3964.4	5	Ti
3958.5	»	3958.3	7	Ti
		3958.3	6	Zr
3944.2	fortissima	3943.8	6	V
		3944.1	10	Al
3933.6	forte	3933.8	10	Ca
		3934.1	7	V
3761.5	media	3761.4	7	Ti
3759.4	»	3759.4	7	Ti
3753.1	»	3753.0	7	Ti
3741.3	»	3741.1	6	Ti
3729.9	»	3729.9	7	Ti
3685.2	»	3685.3	8	Ti
3653.5	forte	3653.6	10	Ti
3641.5	debole	3641.4	5	Ti
3635.5	media	3635.6	9	Ti
3388.0	debole	3388.0	5	Zr
3386.1	»	3385.9	6	Ti
3377.9	»	3377.7	6	Ti
		3377.7	3	V
3373.0	»	3372.8	6	Ti
3371.6	»	3371.4	5	Ti
3261.8	media	3261.7	6	Ti
3254.1	»	3254.2	4	Ti
3252.8	»	3253.0	7	Ti
3251.8	»	3251.9	4	Ti

(1) Riportiamo qui le intensità segnate nelle tabelle di F. STANLEY, *Lines in the arc spectra of Elements*, London 1911. Per alcune lunghezze d'onda non riportate nelle tabelle di F. Stanley abbiamo consultato il volumetto di F. TWYMAN, *Wavelength Tables for spectrum analysis* ed il Trattato del KAISER, *Handbuch der Spectroscopie*, Leipzig, 1912.

Lunghezze d'onda calcolate	Intensità	Lunghezze d'onda degli autori	Intensità	Elementi
3248.4	media	3248.8	8	Ti
3242.0	forte	3242.1	8	Ti
3239.0	»	3239.0	5	Ti
3236.5	»	3236.7	7	Ti
3234.5	»	3234.3	5	Zr
		3234.5	10	Ti
3229.2	media	3229.4	4	Ti
		3228.9	5	Zr
3222.8	»	3223.0	7	Ti
3216.9	»	3217.2	6	V
3191.8	forte	3192.0	8	Ti
3191.0	media	3190.7	10	V
		3190.9	8	Ti
3186.4	»	3186.5	8	Ti
3185.5	»	3185.5	10	V
3184.0	forte	3184.0	10	V
3183.3	media	3183.5	10	V
3179.3	debole	3179.4	6	Ca
3152.3	debolissima	3152.2	4	Ti
3130.5	debole	3130.4	10	V
3118.4	media	3118.4	10	V
3117.1	debole	3116.9	6	V
3093.0	forte	3093.0	4	V
		3093.1	8	Mg
3088.3	media	3088.1	7	Ti
3082.2	»	3082.2	10	Al
3078.6	forte	3078.7	5	Ti
3075.1	media	3075.2	5	Ti
3073.0	»	3072.9	5	Ti
3072.3	debole	3072.2	3	Ti
3066.3	media	3066.2	6	Al
		3066.4	3	Ti
2956.2	»	2956.2	5	Ti

Lunghezze d'onda calcolate	Intensità	Lunghezze d'onda degli autori	Intensità	Elementi
2942.0	media	2942.1	4	Ti
		2942.2	8	Mg
2852.2	forte	2852.2	10	Mg
2802.9	media	2802.8	10	Mg
		2802.5	4	Ti
2497.8	forte	2497.8	10	B
2496.8	»	2496.8	10	B

Sono, quindi, presenti i seguenti elementi: Ti, Al, V, Mg, B. Le poche righe dello zirconio identificate non ci permettono di affermare con sicurezza l'esistenza di questo elemento nel miscuglio salino sottoposto all'analisi spettrografica.

La presenza del vanadio sotto forma di composti solubili presenta una notevole importanza giacchè, per quanto io sappia, è la prima volta che si riscontra nei prodotti fumarolici un sale solubile di vanadio.

È già noto, però, grazie alle ricerche di Arcangelo Scacchi, il vanadio fra gli elementi della esalazione delle lave vesuviane. Il *vesbio*, infatti, di quel nostro illustre studioso, è identico col vanadio, come egli stesso intuì, e come io, insieme al prof. Zambonini, ho dimostrato in un lavoro in corso di stampa sulla vesbina, il minerale scoperto da A. Scacchi sulle pareti delle fenditure della lava del 1631, e che secondo le nostre ricerche è da considerarsi come un idrato della cuprodescloizite.

Per il V, come pure per il Ti ed il B, si è constatata la presenza nello spettrogramma delle righe ultime indicate da De Gramont nei suoi classici lavori; non così per lo Zr la cui presenza resta quindi non bene accertata.

In successive Note darò conto delle indagini microscopiche e cristallografiche eseguite allo scopo di identificare quali fasi naturali sono presenti nelle sublimazioni studiate.

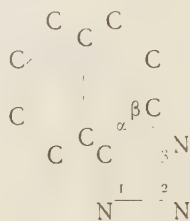
CONCLUDENDO:

1° È stata per la prima volta accertata la presenza al Vesuvio di tracce di composti solubili di V.

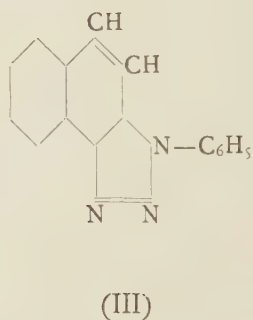
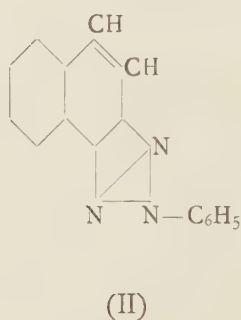
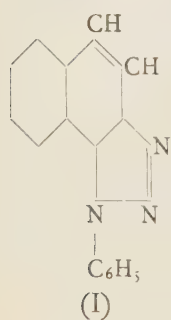
2° Ancora una volta è stata confermata la presenza di composti solubili di titanio, nonchè di notevoli quantità di acido borico.

Chimica. — Sull'1-N-fenil- α , β nafto-1, 2, 3-triazolchinone ⁽¹⁾.
Nota di GAETANO CHARRIER, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. ERRERA.

Dall'1, 2, 3- α , β -naftotriazolo, la cui struttura può venir rappresentata con lo scheletro atomico fondamentale seguente



si possono derivare teoricamente tre N-fenilderivati



che sono infatti tutti e tre noti.

Partendo dall'osservazione che i tre N-fenilnaftotriazoli contengono tutti un ponte etilenico analogo a quello che si trova nel fenantrene, ho potuto ottenere in lavori precedenti ⁽³⁾ la trasformazione degli isomeri (II) e (III) in chinoni. Gli ortochinoni che si ottengono da questi naftotriazoli sono sostanze che dimostrano un comportamento chimico analogo al fenantrenchinone, il quale differisce da essi soltanto per contenere in luogo di un pentagono triazolico N-sostituito un esagono benzenico.

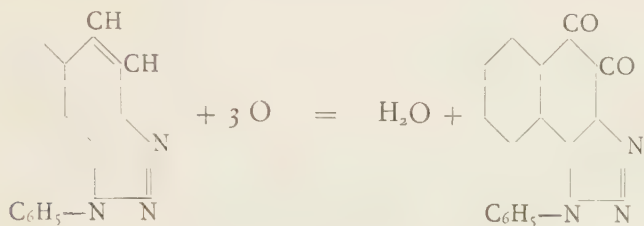
Il 2-N-fenilderivato dimostra poi anche molta analogia col fenantrenchinone nelle proprietà fisiche, analogia che si conserva in modo sorprendente pure nei derivati corrispondenti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pavia.

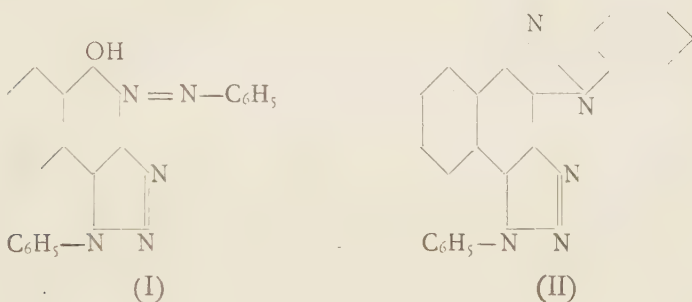
(2) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1926.

(3) « Gazz. chim. Ital. », 54, 610 (1924); 56, 191 (1926).

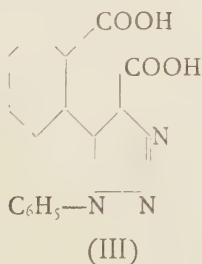
Ho trovato ora che, come avevo preveduto, anche l'1-N-fenilderivato dell' α, β -naftotriazolo, ossidato in soluzione acetica con anidride cromica, si trasforma nell'ortochinone corrispondente secondo l'equazione



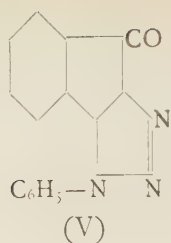
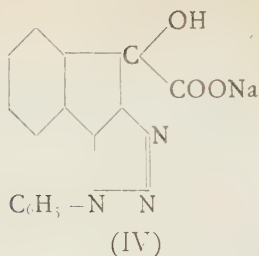
L'1-N-fenil- α, β -nafto-1, 2, 3-triazolchinone così ottenuto dimostra, come gli isomeri precedentemente descritti, la sua struttura ortochinonica nelle reazioni col cloridrato di fenilidrazina e coll'ortofenilendiamina formando rispettivamente l'ossiazoderivato (I) e la fenazina (II)



e può venir trasformato per ossidazione con soluzione alcalina di permanganato potassico o acetica di perossido di idrogeno nell'acido 1-N-feniltriazolil-fenil-o, o'-dicarbossilico (III)



e per ebollizione con soluzione diluita di idrato sodico fornisce il sale sodico di un acido 1-N-feniltriazolilen-fenilen glicolico (IV), il quale ossidato con miscela cromica si trasforma in 1-N-feniltriazolilen-fenilenchetone (V).

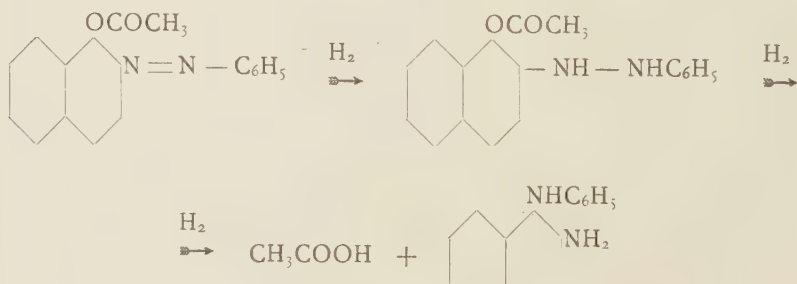


L'1-N-fenil- α, β nafto-1, 2, 3-triazolchinone cristallizza dall'alcool etilico in aghi di color giallo che cominciano a decomporsi verso 212° senza fondere e sublimando in gran parte a temperatura più elevata.

Trovato	% :	C	69,62	H	3,45	N	15,30
per C ₁₆ H ₉ N ₃ O ₂	Calcolato	:	69,81		3,27		15,27

L'1-N-fenil- α, β -nafto-1, 2, 3-triazolchinone, analogamente al 3-N-derivato e a differenza del 2-N-isomero, è molto solubile specialmente a caldo nei comuni solventi organici. Il suo colore è di un bel giallo, mentre il 3-N-isomero è di un giallo tendente al ranciato, e il 2-N-isomero è di un giallo ranciato deciso. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione giallo verdastra.

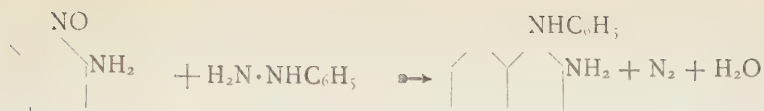
L'1-N-fenil- α, β -nafto-1, 2, 3-triazolo si ottiene secondo Noeltig, Grandmougin e Freimann⁽¹⁾ per azione dell'acido nitroso sulla 1-fenilamino-2-amino-naftalina (α -fenil-ortonaftilendiamina), che secondo detti autori risulta per trasposizione intramolecolare nella riduzione con cloruro stannoso dell'acetilderivato dell'1-ossi-2-fenil-azonaftalina.



ma una 1-fenilamino-2-aminonaftalina diversa dalla precedente era già stata descritta da Harden⁽²⁾ che la ottenne per azione della fenilidrazina sulla nitroso- β -naftilamina

(1) « Ber. », 42, 1380 (1909).

(2) « Ann. », 255, 161 (1889).



Poichè sulla costituzione dei due prodotti potevano ancora rimanere dei dubbi e l'unica dimostrazione della struttura di 1-fenilamino-2-amino-naftalina del composto di Noelting, Grandmougin e Freimann consisteva nella trasformazione di questo in 1-N-fenil- α , β -naftotriazolo, la mia reazione con la quale si ottiene il chinone corrispondente, mentre toglie ogni dubbio alla costituzione del prodotto ottenuto per azione dell'acido nitroso sulla base di Noelting, riesce pure indirettamente di valida conferma alla struttura di quest'ultima.

Questa Nota ha carattere tutt'affatto preliminare e le ricerche in essa delineate verranno proseguite.

Chimica. — *Sopra la determinazione del fosforo e dell'arsenico nelle sostanze organiche*⁽¹⁾. Nota di RAOUL POGGI e di ANGIOLO POLVERINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. ANGELI.

Nell'eseguire l'analisi di alcuni composti organici-arsenicali, procedendo alla loro ossidazione secondo il noto metodo di Carius (distruzione della sostanza con acido nitrico concentrato, in tubo chiuso), abbiamo riscontrato che:

1° Non ci è stato possibile di determinare il contenuto in arsenico dell'acido para-fenilfenilenarsinico:



la cui demolizione non era completa neanche quando siamo ricorsi all'impiego di piccole quantità di bromo, la presenza del quale ha dato favorevoli risultati in altri casi ⁽³⁾.

2° Non è infrequente la rottura dei tubi chiusi, per quanto si prendano le dovute precauzioni.

Passati quindi a sperimentare il procedimento di Messinger ⁽⁴⁾, nel quale le sostanze organiche vengono ossidate con un miscuglio di acido solforico

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica organica della R. Università degli Studi di Firenze.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1926.

(3) ANGELI, «G.», 21, II, 163-165 (1891).

(4) «Ber.», 21, 2910-2919 (1888).

e di anidride cromica, o di bicromato potassico, abbiamo tratto le seguenti conclusioni:

1° Mentre per alcuni composti, come con l'acido fenilarsinico e para-fenilfenilenarsinico si sono ottenuti degli ottimi risultati analitici, l'Ar-rhénal ha presentato una percentuale in arsenico assai bassa;

2° Il processo è di lunga esecuzione, richiedendo una accurata separazione dell'arsenico dal cromo, prima di procedere alla sua determinazione.

Ci siamo perciò indotti a studiare un metodo di ossidazione delle sostanze organiche, prefiggendoci che corrispondesse ai seguenti requisiti:

a) Raggiungere sicuramente la completa ossidazione del composto in esame, anche quando questo offra una notevole resistenza agli ordinari mezzi ossidanti;

b) Implicare una esecuzione della massima semplicità;

c) Escludere qualsiasi apparecchio speciale.

Il metodo da noi sperimentato con successo per l'analisi quantitativa dell'arsenico e del fosforo nelle sostanze organiche si basa sopra l'ossidazione di queste per mezzo di acido solforico concentrato e di persolfato potassico a caldo; susseguentemente l'acido arsenico o fosforico formati per effetto dell'ossidante vengono determinati secondo i metodi ordinari.

L'impiego dei persali per la distruzione delle sostanze organiche nella ricerca di elementi metallici o metalloidici risale già a parecchi anni addietro, ed ha avuto anche recentemente applicazioni analitiche; ma i precedenti autori agiscono sempre in presenza di acqua o di acidi diluiti. Sebbene molte delle sostanze vengano totalmente ossidate già con persolfato in soluzione acquosa, abbiamo riscontrato che, per esempio nel caso della trifenilrosfina, non si ottiene la trasformazione quantitativa del fosforo organico ad acido fosforico; mentre l'uso di persolfato alcalino e di acido solforico concentrato si è dimostrato pure in questo caso perfettamente idoneo a tale scopo ed offre la maggiore sicurezza di completare la distruzione delle sostanze organiche in esame, anche per il fatto che verso la fine dell'operazione si raggiunge una temperatura di ebollizione di circa 330°.

Riportiamo come esempi del nostro metodo di ossidazione la determinazione dell'arsenico contenuto nell'acido cacodilico, di cui è nota la grande stabilità rispetto a vari ossidanti, e del fosforo nella trifenilfosfina.

Gr. 0.3516 di acido cacodilico finamente polverizzato, posti sul fondo di un palloncino di vetro munito di bolle refrigeranti ad aria, con raccordo a smeriglio, della capacità di 80-90 cc., si aggiungono con precauzione con cc. 10 di acido solforico puro (d. 1.84). La sostanza già a freddo passa in soluzione, imbrunendola leggermente. Dopo aver aggiunti gr. 5 di persolfato potassico in polvere, si scalda moderatamente a fiamma diretta, in modo da avere un regolare sviluppo gassoso alla superficie del liquido.

Allorchè lo sviluppo gassoso tende a cessare, si aumenta il riscaldamento tanto da portare per qualche secondo il liquido ad ebollizione incipiente. Lo si lascia quindi raffreddare e vi si aggiungono ancora 3 gr. di persolfato, poi si ripete il riscaldamento. Successivamente si aggiungono, in porzioni di due o tre grammi alla volta, altri sei grammi di persolfato, riscaldando alternativamente il liquido fino all'ebollizione e lasciandolo poscia diventare quasi freddo. Nello spazio di un paio d'ore l'ossidazione è completa, avendo usato in totale gr. 14 di persolfato. Si versa il liquido in un becker e si lava il palloncino con acqua, fino a raggiungere il volume di circa 140 cc. Si determina quindi l'acido arsenico sotto forma di arseniato ammonico magnesiacò, portandolo a peso costante a 110°.

$\text{Mg}(\text{NH}_4)\text{AsO}_4$ trovato: gr. 0.4628:

As % trovato: 54.42,

As % calcolato: 54.31.

Analogamente si è operato per la trifenilfosfina, gr. 0.2021 della quale richiesero gr. 17 di persolfato: l'acido fosforico fu determinato come fosfomolibdato ammonico, secondo il metodo di Eggertz-Finkener, e le prescrizioni di Woy⁽¹⁾, mediante una doppia precipitazione con molibdato ammonico:

$(\text{NH}_4)_3\text{FO}_4 \cdot 12 \text{ MoO}_3$ trovato: gr. 1.5017:

P % trovato: 12.28,

P % calcolato: 11.84.

Delle sostanze di cui ci siamo serviti per la determinazione dell'arsenico e del fosforo, solo l'Arrhénil non dà imbrunimento sensibile con questo mezzo di ossidazione, le altre imbruniscono il liquido, tantochè abbiamo sospeso l'aggiunta del persale dopo l'addizione di altri 4-5 grammi da quando a caldo esso era del tutto decolorato. Sopra gr. 0.2-0.35 di sostanza in esame, impiegando gr. 14-18 di persolfato l'ossidazione è completa.

Il nostro processo corrisponde perciò ai requisiti annunciati precedentemente; a differenza del Carius e del Messinger, è il solo per cui l'ossidazione dei composti sperimentati sia completa, e presenta anche il vantaggio che la separazione dell'acido arsenico, o dell'acido fosforico può farsi direttamente nel liquido ossidante.

Rileviamo che esso è di impiego generale e, per quanto noi ci siamo limitati ad applicarlo al caso dell'arsenico e del fosforo, potrà servire a de-

(1) « Chem. Ztg. », 21, 441-443 (1897).

terminare altri elementi costituenti composti organici ed avere utile applicazione anche per la distruzione delle sostanze organizzate (visceri, sangue e muscoli).

Pubblicheremo in seguito i dati analitici che abbiamo ottenuti col presente procedimento.

Siamo intanto in dovere di ringraziare il prof. Angeli, alla cui direttiva dobbiamo il presente lavoro.

Chimica. — *Composti tra alogenuri di Titanio e sostanze organiche ossigenate.* Nota di G. SCAGLIARINI e G. TARTARINI⁽¹⁾ presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. BOERIS.

Gli alogenuri di stagno (tetracloruro e tetrabromuro) possono facilmente addizionarsi con sostanze organiche ossigenate per dare prodotti cristallizzati di composizione ben definita.

Questi composti furono studiati da Pfeiffer⁽³⁾ che si occupò specialmente dei prodotti di addizione con sostanze organiche contenenti nella molecola il carbonile (aldeidi, chetoni, acidi e loro eteri ecc.) e sono del tipo:



Composti pure di addizione si ottennero con alcool e con renolo



Non sempre però si ottengono composti di semplice addizione, anzi molto facilmente si separano prodotti di sostituzione che si formano con sviluppo di idracidi degli alogenuri. Basta scaldare le sostanze reagenti e usare sostanze organiche che contengono l'ossidrile. A questa serie di composti secondo O. W. Fischer⁽⁴⁾ spetterebbe la seguente formula:



Secondo Rosenheim⁽⁵⁾:



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

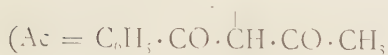
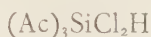
(2) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1926.

(3) «Liebig's Annalen», 376 (1910) p. 285.

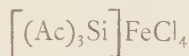
(4) «Monatshefte f. Chemie», 5 (1884), p. 426.

(5) «Ber.», 38 (1905) p. 2777.

Meglio che con gli alogenuri dello stagno si ottengono composti analoghi di sostituzione (quasi sempre trisostituiti) con gli alogenuri del silicio. Dilthey⁽⁶⁾ che studiò questi composti del tipo:

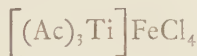


mise in evidenza il fatto che per aggiunta di un cloruro metallico si ha sviluppo di acido cloridrico e si ottengono complessi aventi la seguente formola di costituzione:

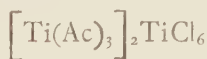


Venendo ora ad esaminare il comportamento degli alogenuri del titanio con le sostanze organiche ossigenate è logico supporre per questi alogenuri, avendo il titanio proprietà intermedie a quelle dello stagno e del silicio, un comportamento simile tanto a quello degli alogenuri del silicio che a quello degli alogenuri dello stagno.

Dilthey⁽¹⁾ dimostrò l'analogia del titanio col silicio nei seguenti tipi di composti: (con Ac si indica il radicale organico monovalente)



Ai composti aventi la formola bruta $\text{TiCl}_2(\text{Ac})_2$ il Dilthey ha dato la formola di costituzione seguente:



considerandoli come derivati dell'acido clorotitanico.

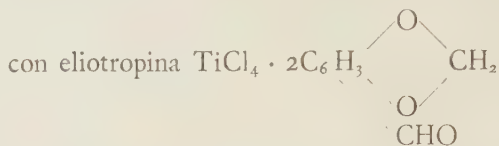
Scopo delle nostre ricerche è stato quello di mettere in evidenza le eventuali analogie degli alogenuri di titanio con quelli dello stagno, tentando la preparazione di composti di addizione con sostanze organiche ossigenate analoghi a quelli già citati per lo stagno. E ciò ci fu possibile raffreddando il miscuglio delle sostanze reagenti e adoperando sostanze organiche che non contengono l'ossidrile o che non possono passare alla forma enolica. La prima condizione è necessaria, la seconda sufficiente.

(6) « Ber. », 36 (1903), p. 1595.

(1) « Ber. », 37 (1904), p. 588.

Col tetracloruro di titanio abbiamo ottenuto i seguenti composti d'addizione:

con benzofenone $\text{TiCl}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5 - \text{CO} - \text{C}_6\text{H}_5$



con etere ftalico $\text{TiCl}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_4(\text{COOCH}_3)_2$

La formazione di queste sostanze avviene naturalmente senza sviluppo di acido cloridrico.

Con sostanze organiche ossidrilate e precisamente con composti della serie salicilica non c'è stato possibile ottenere a temperatura ordinaria dei veri prodotti di addizione come furono ottenuti per lo stagno (vedi composti con alcool etilico), ma composti in cui la sostituzione non è così avanzata come nei sali citati di Dilthey. Così con l'aldeide salicilica abbiamo ottenuti i seguenti composti:



Questi composti che diremo bisostituiti sono analoghi a quelli dello stagno del tipo: $\text{SnX}_2(\text{Ac})_2 \cdot \text{HX}$.

Con l'acido salicilico abbiamo ottenuto un composto la cui formula bruta è la seguente $\text{TiCl}_3(\text{OC}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOH})$ ma che si deve interpretare come clorotitanato:



Composti analoghi abbiamo preparato con salicilato di metile:



e salicilato di fenile:



La formazione di questi composti di sostituzione si può spiegare così: in un primo tempo tra cloruro di titanio e sostanza organica ossidrilata si forma il composto d'addizione che quasi sempre avviene per una molecola di alogenuro e due di sostanza organica.

In un secondo tempo si ha la salificazione più o meno avanzata a secondo della temperatura cui si opera; salificazione che avviene con sviluppo di acido idroalogenico. Nel caso poi che il composto formatosi sia bisostituito del tipo $\text{TiCl}_2(\text{Ac})_2$ o trisostituito del tipo $\text{TiCl}(\text{Ac})_3$ si ha, in seguito a combinazione col tetraalogenuro di titanio presente in soluzione, la formazione di clorotitanato.

Che in un primo tempo si formi il composto di addizione è avvalorato dal fatto che per gli alogenuri di stagno si conoscono due tipi di composti con l'alcool



I clorotitanati da noi ottenuti, pur essendo del tipo di quelli di Dilthey, non sono uguali a questi, avendo nel catione solo due residui organici e non tre.

La differenza dei risultati ottenuti pur adoperando sostanze organiche simili (serie salicilica) deve ascriversi al fatto che, mentre gli autori già citati operavano spesso alla temperatura di ebollizione, noi abbiamo mantenute le sostanze reagenti a temperatura ordinaria.

Non è esclusa la possibilità che, operando a temperature più basse, si riesca anche ad ottenere con sostanze organiche ossidrilate i prodotti di semplice addizione con gli alogenuri di titanio.

PARTE SPERIMENTALE

PRODOTTI DI ADDIZIONE.

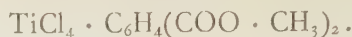
Prodotto di addizione fra TiCl_4 e benzofenone $\text{TiCl}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5 - \text{CO} - \text{C}_6\text{H}_5$.

Si prepara aggiungendo cloruro di titanio ad una soluzione satura di benzofenone in cloroformio. Il miscuglio si riscalda colorandosi in giallo e per raffreddamento in bagno d'acqua precipita una polvere cristallina gialla arancio. Si filtra rapidamente alla pompa e si essicca in essiccatore a cloruro di calcio; molto alterabile all'aria umida.

Per $\text{TiCl}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5 - \text{CO} - \text{C}_6\text{H}_5$

	Ti	Cl	C	H
Calcolato %	12.91	38.39	41.93	2.71
Trovato »	12.42	39.00	41.00	2.48

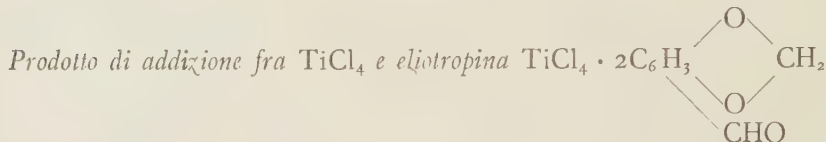
Prodotto di addizione tra ftalato di metile e TiCl_4 .



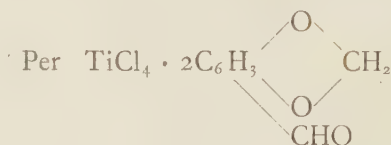
Si ottiene mescolando soluzioni di ftalato di metile e di cloruro di titanio in cloroformio. Precipita subito il composto di color giallo chiaro come polvere cristallina molto alterabile all'aria umida:

Per $\text{TiCl}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_4(\text{COO} \cdot \text{CH}_3)_2$

	Ti	Cl	C	H
Calcolato %	12.59	37.00	31.24	2.64
Trovato »	12.90	38.00	31.46	2.61



Si prepara facilmente mescolando soluzioni anche diluite di eliotropina e cloruro di titanio in cloroformio. La soluzione si colora in rosso e lascia depositare la polvere cristallina color rosso vivo; è molto alterabile, fuma all'aria, è solubile in eccesso di eliotropina dando una soluzione gialla.



	Ti	Cl	C	H
Calcolato %	9.83	28.94	39.18	2.45
Trovato »	9.94	29.15	39.38	2.80

PRODOTTI DI SOSTITUZIONE

TIPO ALOGENO IDRATI.

Composto fra TiCl_4 e aldeide salicilica $\text{TiCl}_2(\text{O} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CHO})_2 \cdot \text{HCl}$.

Si prepara aggiungendo aldeide salicilica a una soluzione in cloroformio anche diluita di cloruro di titanio. Precipita subito una polvere cristallina color rosso-viola e si ha sviluppo di vapori di acido cloridrico. È abbastanza resistente all'aria, però col tempo si decompone:

Per $\text{TiCl}_2(\text{O} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CHO})_2 \cdot \text{HCl}$

	Ti	Cl	C	H
Calcolato %	12.10	26.75	42.26	2.78
Trovato »	12.35	26.12	42.80	2.88

Composto fra TiBr_4 e aldeide salicilica $\text{TiBr}_2(\text{O} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CHO})_2\text{HBr}$.

Come il precedente sale, si ottiene aggiungendo aldeide salicilica ad una soluzione anche diluita di bromuro di titanio in cloroformio; è di color bruno.

Per $\text{TiBr}_2(\text{O} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CHO})_2\text{HBr}$

	Ti	Br	C	H
Calcolato %	9.06	45.16	31.65	2.08
Trovato »	9.69	45.32	32.00	2.77

TIPO CLORO-TITANATI.

Composti fra TiCl_4 e acido salicilico $\text{Ti}(\text{OC}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOH})_2\text{TiCl}_6$.

Si prepara aggiungendo goccia a goccia cloruro di titanio ad una soluzione satura in cloroformio di acido salicilico. Si separa con svolgimento di acido cloridrico una polvere rossa che va filtrata alla pompa rapidamente perchè al contatto dell'aria si altera presto liberando acido cloridrico. Col tempo assume prima un colore arancio, poi giallo:

Per $\text{Ti}(\text{OC}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOH})_2\text{TiCl}_6$

	Ti	Cl	C	H
Calcolato %	16.51	36.50	28.82	1.73
Trovato »	16.37	36.00	29.25	2.00

Composto fra TiCl_4 e salicilato di metile $\text{Ti}(\text{OC}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOCH}_3)_2\text{TiCl}_6$.

Si prepara aggiungendo salicilato di metile ad una soluzione concentrata in cloroformio di cloruro di titanio. Il miscuglio si riscalda, svolge vapori di acido cloridrico e si colora in rosso cupo. Raffreddando in bagno d'acqua e strofinando le pareti del recipiente con bacchetta di vetro, dopo qualche tempo si separa una sostanza rossa cristallina che occorre filtrare rapidamente perchè si altera all'aria. Si essicca in essiccatore a cloruro di calcio.

Per $\text{Ti}(\text{OC}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOCH}_3)_2\text{TiCl}_6$

	Ti	Cl	C	H
Calcolato %	15.74	34.82	31.42	2.30
Trovato »	15.77	34.18	31.00	2.80

Composto fra TiCl_4 e salicilato di fenile $\text{Ti}(\text{OC}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOC}_6\text{H}_5)_2\text{TiCl}_6$.

Si ottiene in modo analogo al sale precedente aggiungendo ad una soluzione molto concentrata di salicilato di fenile in cloroformio, del cloruro di titanio. Il liquido si riscalda, svolge acido cloridrico, si colora intensamente in rosso e per raffreddamento in bagno d'acqua deposita dopo un certo tempo una polvere rosso-scura ancor più alterabile all'aria del sale precedente.

Per $\text{Ti}(\text{OC}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOC}_6\text{H}_5)_2\text{TiCl}_6$

	Ti	Cl	C	H
Calcolato %	13.09	28.93	42.44	2.46
Trovato »	13.47	29.15	41.90	2.98

Chimica. — *Nuovo processo di deidrogenazione del mentolo.*
Nota di G. CUSMANO, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Intorno all'azione del campo elettromagnetico oscillante ad alta frequenza su alcuni germi vegetali* ⁽¹⁾. Nota del dott. EDOARDO BENEDETTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

Iniziai nel novembre u. s. alcune esperienze preliminari allo scopo di vedere se il campo elettro-magnetico ad alta frequenza influiva in qualche modo sulla germinazione di semi di riso e di orzo.

Disponevo allora di un oscillatore costruito da me, alquanto primitivo, costituito schematicamente da un condensatore e un'induttanza di valori adeguati, che ricevevano la corrente ad alta tensione da una bobina di Ruhmkorff di 6 cm. di scintilla. La frequenza delle oscillazioni per cui

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Bologna diretto dal prof. E. Giacomini.

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1926.

questo complesso era calcolato si aggirava intorno ai 400,000 periodi al secondo, e la intensità della corrente oscillante intorno ai 2 Ampère. I semi, previamente imbibiti, venivano messi nell'interno del solenoide costituente l'induttanza e sottoposti all'azione del campo elettromagnetico per un tempo variabile da 15 minuti a un'ora. Questo trattamento si ripeteva per parecchi giorni di seguito, quando i semi, dopo subita la prima imbibizione, erano stati posti in vaschette di porcellana riempite di terra, o aventi sul fondo uno strato di cotone inumidito. Semi imbibiti ma non sottoposti all'azione elettrica venivano messi contemporaneamente in eguali vaschette, e servivano come controllo. Durante la germinazione dei semi così trattati e tenuti in osservazione in una stanza del laboratorio, ove la temperatura oscillava dai 16° ai 20°, notai una evidente precocità di schiusa e di accrescimento rispetto ai testimoni, che mi indusse a ripetere sistematicamente gli esperimenti avendo cura di escludere ogni possibile causa di errore, per stabilire se quei primi risultati erano da attribuirsi a fattori casuali o se, invece, erano dovuti a una particolare azione del campo elettromagnetico oscillante. Per prima cosa dovetti sostituire l'oscillatore troppo primitivo, debole e di funzionamento incerto, con uno più potente e perfetto. Potei far ciò grazie al gentile interessamento del prof. Giacomini e al sussidio di questa R. Accademia dei Lincei che egli mi fece ottenere.

Il nuovo oscillatore che potei costruire possiede 5 condensatori, uno della capacità di 0.0012 μ F e 4 della capacità di 0.0005 μ F, 3 variometri di cui uno a spirale piatta e 2 del tipo a solenoide, i dispositivi per poter eseguire l'accoppiamento induttivo con un circuito secondario, e un trasformatore ad alta tensione del tipo Tesla. L'energia viene fornita da un rocchetto di induzione di 20 cm. di scintilla alimentato da corrente continua a 90 V. sul cui percorso è inserito un interruttore elettrolitico di Wehnelt. Lo spinterometro inserito nel circuito oscillante è del tipo Wien a scintilla frazionata con dischi di rame. Per alcune speciali applicazioni vi sono due altri spinterometri ausiliari, uno semplice e uno a corona di sfere rotanti. Variando i singoli accoppiamenti si possono ottenere delle frequenze entro i limiti da 200,000 a 3,000,000. In pari modo si può variare l'intensità della corrente oscillante e la sua tensione che può raggiungere un massimo di circa 600,000 V. Un Amperometro a filo caldo e un ondametro permettono di conoscere ad ogni istante le caratteristiche della corrente con cui si opera. Il solenoide utilizzato per il trattamento dei semi ha un diametro di 18 cm. e possiede 30 spire distanti 15 mm. l'una dall'altra.

Con questo apparecchio vennero eseguite finora 135 esperienze su semi di varie piante fornitemi cortesemente dal prof. Todaro, direttore del locale R. Istituto Agrario Superiore. Nelle esperienze evitai sempre di mettere i semi direttamente a contatto con la corrente oscillante, data la proprietà di questa di portarsi sempre alla superficie dei corpi (skin-effect). Le correnti ad alta frequenza applicate in tal modo provocano tutt'al più un riscaldamento del seme per effetto di diatermia come potei osservare in alcune prove fatte appositamente. È noto d'altra parte che l'eletttrizzazione per contatto si presta bene per correnti galvaniche o alternate a bassa frequenza,

come venne già, con risultati assai incerti, adoperata da vari Autori (Spechnew, Tolomei, Josa, Bruttini e altri). Nelle esperienze qui riferite feci agire soltanto il campo elettromagnetico sui semi in germinazione, tenendoli con cura isolati da un conduttore qualsiasi.

Tralascio per brevità di menzionare le varie modalità di applicazione da me sperimentate, e descriverò soltanto quella riconosciuta come la più efficiente per l'ottenimento, in determinati semi, di costanti risultati positivi. Essa consiste nel porre i semi, previamente imbibiti per la durata di 4 ore, nell'interno del solenoide su di una rete metallica isolata da esso e accoppiata coll'estremità della spirale piatta dell'oscillatore, le cui spire centrali sono inserite in vario numero, secondo la frequenza con cui si opera, in serie col solenoide. Si ottiene così un'azione combinata, sui semi, del campo elettromagnetico proprio del solenoide e del campo elettrostatico esistente tra le spire del solenoide e la rete metallica. Fin da principio avevo osservato, che per ottenere dei buoni risultati era necessario stabilire esattamente l'intensità di corrente e in particolare la sua frequenza, e dovetti fare numerosi tentativi prima di poter ottenere dei risultati costanti e solo per alcune specie di semi.

Per questi esperimenti di orientamento mi servii quasi esclusivamente dell'orzo, che, in virtù della sua rapida germinazione, permetteva di fare il maggior numero di saggi nel minor tempo possibile. Fissate le condizioni di trattamento più favorevoli per l'orzo, passai al riso, poi al frumento e al granoturco. Con le prove finora eseguite potei stabilire con sicurezza che la frequenza più favorevole per l'orzo è di 400,000 per/sec. la quale agisce anche bene sul riso. All'incontro, trattando con questa stessa frequenza il frumento, i risultati sono quasi nulli, mentre diventano positivi adottando una frequenza di 500,000 per/sec. che è pure favorevole al granoturco.

Così orientatomi mediante questi primi tentativi, intrapresi in questi ultimi mesi (primavera e parte dell'estate) una serie sistematica di esperienze che in parte sono qui sotto riportate.

I semi, dopo la imbibizione di quattro ore, venivano messi, per la prima applicazione, su un vetrino da orologio posto sulla rete entro il solenoide. Il trattamento elettrico durava ogni volta 30 minuti. Poi i semi venivano ordinatamente disposti su un foglio di carta da filtro umida situato al fondo dei germinatoi (sostituiti alle vaschette di porcellana), che alla loro volta erano tenuti immersi per un terzo della loro altezza in un bacino di acqua a livello costante situato nel cortile dell'Istituto. Nella stessa maniera, salvo l'esposizione al campo oscillante, erano trattati i semi testimoni. I germinatoi si tenevano coperti fino a che le piantine germinate non arrivavano al bordo superiore di essi. Il trattamento elettrico si ripeteva 3 volte alla distanza di 24 ore. Nelle applicazioni successive alla prima, i semi venivano posti nell'interno del solenoide con tutto il germinatoio. Avendo notato che nell'interno dell'apparecchio durante il funziona-

mento la temperatura aumentava di $\frac{1}{2}$ grado circa e dubitando che questo pur leggero aumento potesse influire sull'andamento delle esperienze, vennero fatte delle prove in cui anche i semi di controllo, per tutta la durata della esposizione al campo oscillante del saggio venivano posti in un termostato in cui si manteneva una temperatura superiore di mezzo grado a quella ambiente. Tali prove però dimostrarono che il surriferito aumento di temperatura non influiva minimamente su i risultati. Essendo tutti i germinatoi accomunati nel bacino d'acqua, tutti i semi tanto quelli trattati quanto i campioni venivano a trovarsi in identiche condizioni di umidità, temperatura e illuminazione. Ciascun dei semi disposti nei germinatoi veniva controllato giornalmente per un periodo di 15 giorni e più. Si notava il numero dei semi che andavano schiudendo tanto nel saggio quanto nel campione, e via via il numero delle piantine che avevano raggiunto 1 cm. di altezza, il numero di quelle di 2 cm. e di quelle di 3 cm. I semi e le piantine così osservati e misurati superano finora i 3000. In base ai dati così ricavati, vennero compilate delle tabelle per ogni esperienza, alcune delle quali soltanto sono riportate. In esse per maggior evidenza, i risultati sono calcolati in percenti.

Oryza sativa.

Semi nudi, selezionati, forniti dal R. Istituto Superiore Agrario. Trattamento colle modalità suindicate. $f = 400,000$ per/sec. Potenza impiegata per ciascun trattamento 0.25 KW. Temperatura ambiente durante la germinazione: 18° - 22° .

Giorni di germinazione		1	3	5	7	9	11	13	15
Semi schiusi	C.	37	75	95	97.5	97.5	97.5	100	100
	S.	20	47.5	53	71	77.5	80	80	80
Numero delle piantine raggiungenti l'altezza di	1 cm.	C.	—	—	12.5	72.5	82	95	97.5
		S.	—	—	5	27	30	37	47
	2 cm.	C.	—	—	—	57	80	95	95
		S.	—	—	—	20	27	35	42
	3 cm.	C.	—	—	—	—	57	87	95
		S.	—	—	—	—	25	25	37

Risultati simili si ottennero pure con orzo selezionato per la fabbricazione del malto e con orzo comune non selezionato.

Triticum vulgare.

Semi di razze pure, selezionate fisiologicamente, forniti dal R. Istituto Superiore Agrario. Trattamento colle modalità suindicate. $f = 500,000$ per/sec. Potenza impiegata 0.25 KW. Temperatura ambiente 18°-26°.

Tr. v. inalettabile semiaristato							Tr. v. Rieti 11					
Giorni di germinazione	1	3	5	7	9	15	1	3	5	7	9	15
Semi schiusi	S.	92.5	97.5	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	C.	—	72.5	97.5	97.5	97.5	97.5	—	39.5	97.5	97.5	97.5
1 cm.	S.	—	25	95.5	97.5	97.5	100	—	92	100	100	100
	C.	—	—	—	77.5	92.5	97.5	—	—	—	39.5	80
2 cm.	S.	—	—	87.5	95	97.5	100	—	25	100	100	100
	C.	—	—	—	47.5	87.5	97.5	—	—	—	25	70
3 cm.	S.	—	—	76	95	97.5	100	—	—	100	100	100
	C.	—	—	—	15	84.5	97.5	—	—	—	7.5	57.5

Tr. v. gentile rosso							Tr. v. grano duro						
Giorni di germinazione	1	3	5	7	9	15	1	3	5	7	9	15	
Semi schiusi	S.	100	100	100	100	100	100	—	100	100	100	100	
	C.	32.5	92	95	95	97.5	97.5	—	45	75	95	97.5	97.5
1 cm.	S.	—	27.5	95	97.5	100	100	—	—	65	97.5	100	100
	C.	—	—	42.5	70	82.5	95	—	—	—	90	92	92
2 cm.	S.	—	—	87	95	97.5	100	—	—	10	92	100	100
	C.	—	—	25	60	65	90	—	—	—	82	92	92
3 cm.	S.	—	—	60	82.5	95	100	—	—	—	90	100	100
	C.	—	—	—	37.5	65	82	—	—	—	77.5	87.5	92

Vennero inoltre eseguiti numerosi esperimenti colle seguenti razze, le cui tabelle ometto per brevità: Gentile rosso semiaristato, Cologna 12 e una varietà di frumento duro, ottenendo in tutte risultati simili.

Zea mays.

Semi forniti dall'Istituto Superiore Agrario. Trattamento secondo le modalità indicate. $f = 500,000$ per/sec. Potenza di corrente 0.25 KW. Temperatura ambiente 22°-29°.

Mais ibrido giallo-pallido										Mais ibrido bruno									
Giorni di germinazione	1	3	5	7	9	11	13	15		1	3	5	7	9	11	15			
Semi schiusi	S.	—	85	90	90	90	90	90		—	85	90	90	90	90	90			
	C.	—	5	100	100	100	100	100		—	—	40	65	85	85	85			
Numero delle piantine raggiungenti l'altezza di . . .	1 cm.	S.	—	—	35	85	85	85		—	—	60	65	65	65	65			
		C.	—	—	—	75	95	95	100		—	—	—	—	15	50	55		
	2 cm.	S.	—	—	10	45	75	75	85		—	—	10	50	50	55	55		
		C.	—	—	—	60	60	65	80	90		—	—	—	10	25	25		
	3 cm.	S.	—	—	—	35	55	65	80	80		—	—	—	25	45	50	55	
		C.	—	—	—	—	55	60	75	80		—	—	—	—	5	15	25	

Mais ibrido giallo-oro										Mais ibrido vinoso									
Giorni di germinazione	1	3	5	7	9	11	13	15		1	3	5	7	9	11	15			
Semi schiusi	S.	—	100	100	100	100	100	100		—	95	95	95	95	95	95			
	C.	—	15	100	100	100	100	100	100		—	—	95	95	95	95			
Numero delle piantine raggiungenti l'altezza di . . .	1 cm.	S.	—	—	25	100	100	100	100		—	—	90	95	95	95	95		
		C.	—	—	—	—	95	95	95	100		—	—	—	25	60	70	75	
	2 cm.	S.	—	—	—	15	95	100	100	100		—	—	60	75	90	90	90	
		C.	—	—	—	—	75	80	85	95		—	—	—	—	20	60	60	
	3 cm.	S.	—	—	—	—	85	100	100	100		—	—	50	80	90	90	90	
		C.	—	—	—	—	10	55	60	90		—	—	—	—	15	45	50	

Sono omesse per brevità le altre tabelle riguardanti le esperienze fatte con Mais ibrido giallo, Mais ibrido giallo rossastro e Mais ibrido rosso, al quale ultimo si riferisce la figura che dimostra lo stato delle piantine nel

saggio e nel campione dopo 10 giorni da che i semi furono messi a germinare.

Come si vede confrontando i risultati della tabella relativa al Mais e come potei inoltre osservare nelle altre prove eseguite su questa specie, le differenze del tempo di schiusa e di accrescimento sono tanto più manifeste quanto più nei semi ibridi predomina il pigmento scuro, il qual fatto mi sembra di una certa importanza, come meglio rileverò più avanti.

Esperienze fatte su *Trifolium pratense*, *Trifolium repens*, su *Medicago sativa*, *Vicia sativa*, *Cannabis sativa*, adoperando la frequenza usata per il frumento, non diedero nessun risultato. Infine, semi di bietole, che già ad



altri Autori si dimostrarono particolarmente sensibili all'azione dell'elettricità (Warner, Bruttini) ⁽¹⁾, trattati allo stesso modo mostrarono di risentirne un effetto dannoso, i cui sintomi si manifestavano nella maggior parte dei casi ad alcuni giorni di distanza dal trattamento sotto forma di una necrosi iniziale della porzione apicale (punto germinativo) della radichetta, necrosi che in seguito si estendeva sempre più prossimalmente. Quelle poche piantine che non mostravano questa necrosi, rimanevano arretrate nello sviluppo e la loro radice si distingueva per l'assenza di collaterali. Esse mostravano dei fenomeni del tutto simili a quelli descritti dal Molisch ⁽²⁾ in piante sottoposte all'emanazione di radio, e dal Jüngling ⁽³⁾ in piante esposte all'azione dei

(1) BRUTTINI A., *L'influenza dell'elettricità sulla vegetazione*, Hoepli, Milano. 1912.

(2) MOLISCH H., *Ueber das Treiben der Pflanzen mittels Radium*. - Id. *Ueber den Einfluss der Ra Emanation auf die höhere Pflanzen*, «Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wissensch.», Wien, 1912, Bd. 121.

(3) JÜNGLING O., *Röntgenbehandlung chirurgischer Krankheiten*, Leipzig, 1924.

raggi Röntgen. Effetti simili potei ottenere anche su l'orzo e su *Helianthus annuus*, ma soltanto sottoponendo i semi all'azione del campo elettrico fortissimo esistente tra le armature di un condensatore a lastre di vetro, in parallelo col circuito secondario oscillante, posto in condizioni di risonanza. Adoperando in queste condizioni, una frequenza di 1,500,000 per/sec. e una intensità di corrente di 700 Milliampère ottenni su orzo da malto i seguenti risultati:

Giorni di germinazione		1	3	5	7	9	
Semi schiusi	S.	5	15	30	30	30	
	C.	65	90	90	90	90	
Numero delle pian- tine raggiungenti l'altezza di . . .	1 cm.	S.	—	—	20	30	30
		C.	—	—	90	90	90
	2 cm.	S.	—	—	20	25	30
		C.	—	—	90	90	90
	3 cm.	S.	—	—	20	20	30
		C.	—	—	70	90	90

Adoperando la frequenza di 450,000 per/sec. e un'intensità di 100 M. A. i semi germinati furono in numero maggiore, come lo dimostra la seguente tabella:

Giorni di germinazione		1	3	5	7	9		
Semi schiusi	}	S.	20	50	62	62	88	
		C.	—	82	90	92	96	
Numero delle pian- tine raggiungenti l'altezza di . . .	1 cm.	}	S.	—	—	34	56	62
			C.	—	—	44	90	94
	2 cm.	}	S.	—	—	26	50	62
			C.	—	—	32	80	94
	3 cm.	}	S.	—	—	16	26	62
			C.	—	—	6	78	92

Tenendo complessivamente conto di tutte le esperienze finora eseguite su germi di Mais, Frumento, Orzo e Riso, si può concludere che il campo elettromagnetico oscillante esistente in un solenoide percorso da una corrente ad alta frequenza, esercita, sotto determinate condizioni di intensità e di frequenza, un'azione costantemente favorevole su i citati germi, la quale si manifesta con un acceleramento ed un aumento percentuale di germinazione dei semi, e con un maggior sviluppo delle piantine nelle prime settimane di vita. Si potè inoltre osservare che varie razze ibride del Mais mostrano rispetto al trattamento elettrico una sensibilità diversa; maggiore e in modo anche rilevante per i semi pigmentati rispetto a quelli che non lo sono. Si potrebbe pensare che la maggiore o minore quantità di pigmento di questi semi sottoposti alle oscillazioni elettriche influisca sull'andamento della loro germinazione in modo analogo a quanto constatò il Baar ⁽¹⁾ nei semi bianchi di *Amarantus caudatus* e nei semi scuri di *A. atropurpureus* fatti germinare in piena luce.

In tutte le esperienze eseguite da precedenti Autori e basate sia sull'impiego di correnti continue o alternate fatte agire per contatto o per effluvio (Spechnew, Warner e i molti A. citati dal Bruttini), sia sull'azione del campo elettro-magnetico a bassa frequenza (Pirovano), le piante e i semi venivano esposti per lunghissimo tempo all'azione elettrica, rispettivamente elettromagnetica, ottenendo certi effetti limitati, favorevoli o sfavorevoli, mentre, operando col campo elettro-magnetico ad alta frequenza, basta uno stimolo iniziale relativamente breve per provocare un'azione fisiologica persistente per molti giorni anche dopo cessato lo stimolo. Le piante reagiscono in questo caso in modo analogo, sebbene più spiccato, come dopo la esposizione alla Emanazione di Radio di una determinata concentrazione (Falta-Schwartz, Körnicke, Molisch) o all'azione dei Raggi Roentgen (Schmidt, Jüngling e altri). Questo fa supporre che l'energia presente nel campo oscillante, la quale si rivela anche fisicamente sotto forma di correnti indotte aventi tensioni altissime, in seguito alle rapidissime variazioni di campo, agisca precipuamente sui fermenti, o attivando maggiormente quelli già esistenti, o favorendo l'entrata in attività di nuovi. Si potrebbe inoltre pensare a modificazioni delle cariche elettriche interfacciali delle membrane cellulari con conseguenti modificazioni dei fenomeni osmotici e variazioni di concentrazione. Data la complessità dei fenomeni fisici, chimici ed elettrici della sostanza vivente riesce naturalmente assai difficile determinare il modo preciso di queste azioni.

(1) BAAR H., *Ueber den Einfluss d. Lichtes auf die Samenkeimung und seine Abhängigkeit von anderen Faktoren*, « Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. », Wien, Bd. 121, 1912.

Biologia. — *Ricerche sulla riproduzione dell' « Alosa finta »* (Cuv.) ⁽¹⁾. Nota preliminare di UMBERTO D'ANCONA, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Fin dall'autunno del 1922 ho iniziato delle ricerche sulla biologia dell'*Alosa finta* allo scopo di conoscere i costumi di questo interessante Clupeide passato a condurre parte della sua vita nell'acqua dolce. In modo particolare nell'esecuzione di questo lavoro ho avuto di mira lo studio dello accrescimento, onde seguirlo nei diversi momenti fisiologici della vita dell'animale e sotto l'influenza delle diverse condizioni ambientali. Tale ricerca poteva essere agevolmente eseguita sull'*Alosa finta* del Tevere, in primo luogo perchè questa costituisce una popolazione omogenea, in secondo luogo perchè durante le sue migrazioni nel Tevere può essere comodamente seguita nel suo accrescimento.

A tale scopo tra il 1922 e il 1926 ho raccolto misure di lunghezza e peso e ho esaminato le squame di circa un migliaio di individui appartenenti a tutte le età e presi in tutte le stagioni dell'anno. Tale materiale mi sembra sufficientemente abbondante e perciò credo di poter su esso costruire con bastante esattezza la curva di accrescimento dell'*Alosa*. L'esame delle squame presenta però notevoli incertezze e perciò dall'osservazione di squame appartenenti a singoli individui non è possibile valutare la loro età che con una certa approssimazione. Con sufficiente esattezza può essere invece fatta tale valutazione soltanto quando si esaminino un numero considerevole di individui appartenenti alle diverse età.

Già in una prima nota preliminare pubblicata l'anno scorso ⁽³⁾ davo, in base all'esame di 174 individui, alcuni dati sull'accrescimento dell'*Alosa*. L'esame successivo di circa altre 800 alose mi permette di confermare nel complesso i dati approssimativi pubblicati allora. Di tale parte delle mie ricerche mi occuperò dettagliatamente nel lavoro in esteso.

Qui voglio invece riassumere brevemente le osservazioni fatte sulle condizioni di riproduzione dell'*Alosa*.

La differenza di grandezza dei maschi e delle femmine mature dipende principalmente da una più rapida maturità sessuale dei maschi.

(1) Dall'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

Ringrazio l'Accademia dei Lincei che concedendomi un sussidio sui Fondi Treccani mi permise di continuare queste ricerche. Ringrazio il prof. Silvestri che all'Accademia propose la concessione stessa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1926.

(3) D'ANCONA U., *Ricerche sull'accrescimento e sulla maturità sessuale dell' « Alosa finta »* (Cuv.). « Rend. R. Accad. Lincei », vol. I, ser. VI, p. 43, 1925.

Ho trovato a Orvieto (22 maggio 1926) un maschio maturo di soli 19 $\frac{1}{2}$ cm. appartenente al II anno. Si hanno poi maschi fecondi del III anno, ma la maggior parte matura appena al IV anno. Invece le femmine cominciano ad essere atte alla riproduzione al IV anno (la più piccola che ho potuto avere misurava 33 $\frac{1}{2}$ cm.), la maggior parte però matura solo al V anno.

Nelle acque dolci penetrano soltanto gli individui maturi, durante la stagione della frega però in vicinanza delle foci si trovano anche individui non maturi. Probabilmente anche questi, sotto lo stimolo di cambiamenti nelle loro condizioni fisiologiche, si avvicinano alle acque salmastre.

Gli organi genitali subiscono nella loro attività un ciclo annuale, evidente durante il periodo della maturità, ma che esiste, a quanto dobbiamo credere, anche prima. Si sa che il ciclo annuale dell'attività delle gonadi è accompagnato anche da un ciclo annuale nell'attività delle altre ghiandole endocrine (Sklower, *Anfibi*). Si ha quindi probabilmente un ciclo in tutto il sistema umorale dell'animale e con esso in relazione le migrazioni dalle acque salse a quelle salmastre o a quelle dolci.

Durante i primi anni lo sviluppo degli organi genitali, seguendo questo ciclo annuale va man mano aumentando e raggiunge durante le successive stagioni di frega stadi sempre più avanzati di maturazione; quando essi arrivano a un dato grado l'animale diviene atto alla riproduzione. Ciò permette di spiegare perchè non tutti gli individui maturano nello stesso anno e perchè soltanto in una data stagione può essere raggiunta la maturità sessuale. Dello stesso ordine di fenomeni è probabilmente la così detta *spermatogenesi larvale* rilevata da alcuni autori (Swingle) in certi Anfibi, spermatogenesi che non giunge a completo sviluppo.

Un'altra causa della differente grandezza tra maschi e femmine maturi è data dall'accrescimento più rapido di queste ultime.

Le alose prossime a maturazione penetrano nel Tevere verso la metà di marzo. La data dell'inizio della montata può variare di qualche giorno. Nel complesso mi è sembrato di notare che essa è in relazione colle piene del fiume. Quando le piene primaverili, come per esempio quest'anno, ritardano, si ha pure un ritardo nella montata. A Orte le alose arrivano per lo più verso la metà di aprile, ma talvolta vi compaiono già alla fine di marzo. Ivi non sono ancora atte alla riproduzione. Continuano a salire tanto nel Tevere che nel suo affluente Paglia, nel primo circa fino a Todi (Pontecuti), nel secondo fino a Orvieto (confluenza del Paglia col Chiani). Credo di potere delimitare l'area di frega tra questi due punti a monte e la confluenza del Tevere col Paglia a valle.

La riproduzione come è stato già notato in altri fiumi avviene soltanto di notte. Il periodo riproduttivo dura generalmente fino alla metà di giugno.

Dopo vari tentativi infruttuosi fatti l'anno scorso e quest'anno, il 29 maggio scorso a Orvieto sono riuscito a ottenere delle uova fecondate

artificialmente, che ho avuto la possibilità di misurare e far disegnare, ma che disgraziatamente per mancanza di un conveniente apparecchio di incubazione non mi è stato possibile allevare ulteriormente. Intendo ripetere tale esperienza l'anno venturo per poter seguire lo sviluppo di questa specie di Clupeide onde confrontarlo con quello delle specie marine di questa famiglia.

Le uova di *Alosa finta* assomigliano a quelle dei Clupeidi marini; hanno anch'esse un ampio spazio perivitellino, membrana e tuorlo trasparenti come le uova pelagiche di quelli, mancano di goccia oleosa. Esse nell'acqua dolce cadono al fondo; sarà interessante vedere se per il peso specifico presentano differenze in confronto alle uova marine galleggianti.

La temperatura da me misurata nel punto in cui le alose si riproducono era di 22° C. Notisi che le alose non penetrano nè nell'Aniene, nè nel Nera, probabilmente per la temperatura più bassa in questi due affluenti del Tevere.

Nel complesso ritengo che i fattori determinanti le migrazioni di questi pesci siano in primo luogo interni dovuti a correlazioni umorali in rapporto con lo stato di attività delle gonadi. Sotto l'impulso di tali correlazioni le alose tendono a portarsi in acque meno salse e vengono probabilmente guidate in tali migrazioni dalle piene del fiume che inviano le acque dolci a maggior distanza nel mare. Il reotropismo dà per così dire la direzione alle migrazioni. Pentrate nel fiume le alose tendono a raggiungere, per riprodursi, acque basse e piuttosto calde. Infatti quando nella loro migrazione sono accompagnate da maggiori piene del fiume salgono più a monte del solito fino a che trovano le acque basse desiderate.

Con queste osservazioni, che più estesamente saranno esposte prossimamente, ho inteso continuare una serie di ricerche sui nostri pesci esaminandone i costumi sotto un punto di vista generale, allo scopo anche di istituire dei confronti con quanto si sa per le stesse specie in altre regioni.

Biologia. — *Comportamento fotoreattivo in girini e avannotti alimentari con tiroide.* Nota di E. REMOTTI, presentata dal Corrisp. E. GIACOMINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Batteriologia. — *Il comportamento del « Bacterium Typhi » nel latte.* Nota di C. COSTANTINI, presentata dal Socio O. MATTIROLO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 7 novembre 1926.

A. GARBASSO, presidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astrofisica. — *Sopra la differenza tra la grandezza visuale e la grandezza bolometrica delle stelle, in relazione alla temperatura assoluta.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI⁽¹⁾.

1. È noto che le grandezze stellari m , si distinguono in *grandezze visuali* m_v , *grandezze fotografiche* m_f e *grandezze bolometriche* m_b , secondo che l'energia radiante viene misurata visualmente, fotograficamente oppure con la pila termoelettrica o col bolometro. La differenza $c = m_f - m_v$ si chiama *indice del colore* ed analogamente, per semplicità di locuzione, io proporrei di chiamare la differenza $K = m_b - m_v$ col nome di *indice bolometrico*.

Supponendo che ogni stella irradi come un radiatore perfetto, ipotesi abbastanza giustificata dalle osservazioni, c diviene funzione della temperatura assoluta T ; e come tale è stata studiata specialmente dal Wilsing e dalla sua scuola⁽²⁾, prendendo per base la legge di Planck sulla distribuzione dell'energia. Meno progredite sono invece le nostre cognizioni riguardo all'indice bolometrico, considerato in un recente lavoro dell'Hopmann⁽³⁾, onde ho creduto opportuno di tornare sull'argomento nella presente Nota.

Nel corso però di questo lavoro sono stato condotto ad osservare come una delle maggiori difficoltà risieda nel fatto che la sensibilità dell'occhio

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1926.

(2) Cfr. J. WILSING, *Messungen der Farben, der Helligkeiten und der Durchmesser der Sterne mit Anwendung der Planckschen Strahlungsgleichung*, «Pubb. der Astr. Obser. zu Potsdam», Bd. XXII, n. 76 (1920).

(3) Cfr. HOPMANN, *Bolometrische und Kolorimetrische Grossen*, «Astr. Nachr.», Bd. 222 (1924).

umano varia con la lunghezza d'onda λ , secondo una legge non ancora perfettamente determinata nè facilmente esprimibile con funzioni analitiche. E ciò conduce a quadrature che, pure essendo semplicemente approssimate, sono eseguibili soltanto con sviluppi in serie, dando luogo ad espressioni nelle quali la notevole complicazione dei calcoli si aggiunge alla mancanza di rigorosa esattezza.

Ad evitare tali inconvenienti, anzichè partire dalla formula del Planck ho preferito di servirmi di quella approssimata del Wien, la quale, dati i limiti della temperatura stellare, conduce in genere a risultati assai buoni, come mostra del resto la tabella annessa alla presente Nota. Non solo, ma, mentre in pratica nulla si perde per l'esattezza, grandissimi sono i vantaggi da altri punti di vista, giacchè con questa via ho potuto giungere a formole semplici e simmetriche, che collegano $\frac{dc}{dT}$ e $\frac{dK}{dT}$ direttamente ed unicamente con i baricentri dei diagrammi dell'energia visuale, fotografica e bolometrica. Ed è precisamente questa circostanza che rende queste nuove formule molto comode dal lato pratico, giacchè permette il calcolo di c e di K senza conoscere dettagliatamente la curva di sensibilità dell'occhio o della lastra fotografica. E noi lo vedremo tra breve calcolando K , con la sola conoscenza della lunghezza d'onda per cui l'occhio ha la massima sensibilità.

3. Ciò premesso, ricordiamo come la grandezza m di una stella sia legata, per definizione, alla sua intensità radiante I dalla formula del Pogson:

$$(1) \quad m = \text{cost} - 2.5 \log_{10} I = \text{cost} - 1.085 \log_e I$$

dove la costante arbitraria va scelta secondo opportune convenzioni su cui ora è inutile trattenerci. Sostituendo al posto di I l'intensità visuale I_v , l'intensità fotografica I_f o l'intensità bolometrica I_β si ottengono rispettivamente le tre grandezze visuale, fotografica e bolometrica: m_v, m_f, m_β . Eseguendo la nominata sostituzione e derivando rispetto alla temperatura assoluta T abbiamo con riduzioni immediate:

$$(2) \quad \frac{dK}{dT} = \frac{d}{dT} [m_\beta - m_v] = 1.085 \left[\frac{1}{I_v} \frac{dI_v}{dT} - \frac{1}{I_\beta} \frac{dI_\beta}{dT} \right].$$

4. Cerchiamo ora di calcolarci il secondo membro della (2).

A tale scopo, chiamando con η l'intensità di energia corrispondente alla lunghezza d'onda λ e trascurando una costante moltiplicativa che non ha importanza giacchè comparirebbe al numeratore ed al denominatore nel secondo membro della (2), abbiamo dalla formula del Wien:

$$(3) \quad \eta = \lambda^{-5} e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali e dove si ha $\gamma = 14300$ misurando λ

in millesimi di millimetro come fa il Wilsing. L'energia totale od energia bolometrica I_β è quindi eguale a:

$$(4) \quad I_\beta = \int_0^\infty \eta d\lambda = \int_0^\infty \lambda^{-5} e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} d\lambda$$

integrale convergente e facile ad eseguirsi.

Prendendo ora come variabile indipendente x l'inversa della lunghezza d'onda λ , la (4) diviene:

$$(5) \quad I_\beta = \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{\gamma x}{T}} dx$$

integrale facile a calcolarsi e che geometricamente rappresenta l'area del diagramma compreso tra la parte positiva dell'asse x e la curva di equazione $y = x^3 e^{-\frac{\gamma x}{T}}$, curva che taglia l'asse x per $x = 0$ e per $x = \infty$.

Immaginando disegnato questo diagramma e determinandone l'ascissa ξ_β del suo baricentro, avremo per noti teoremi di meccanica razionale:

$$(6) \quad \xi_\beta = \frac{\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{\gamma x}{T}} dx}{I_\beta}.$$

Ma si ha con facili riduzioni dalla (5):

$$(7) \quad \frac{1}{I_\beta} \frac{dI_\beta}{dT} = \frac{\gamma}{I_\beta T^2} \int_0^\infty x^4 e^{-\frac{\gamma x}{T}} dx$$

e quindi, paragonando con (6), otteniamo:

$$(8) \quad \frac{1}{I_\beta} \frac{dI_\beta}{dT} = \frac{\gamma}{T^2} \xi_\beta.$$

5. Passiamo ora all'intensità visuale I_v ed a tale scopo indichiamo con $q(\lambda)$ il coefficiente di sensibilità dell'occhio per la lunghezza d'onda λ . Come si sa, $q(\lambda)$ è nullo per $\lambda < 0.40$ circa, cresce da zero ad un massimo da $\lambda = 0.40$ a $\lambda = 0.57$, diminuisce nuovamente da $\lambda = 0.57$ a $\lambda = 0.70$ e si annulla per $\lambda > 0.70$. Ponendo $q(\lambda) = q\left(\frac{1}{x}\right) = s(x)$, l'energia visuale I_v — sempre a meno di un coefficiente moltiplicativo che non ha importanza comparando al numeratore ed al denominatore del secondo membro della (2) — diviene:

$$(9) \quad I_v = \int_0^\infty s(x) x^3 e^{-\frac{\gamma x}{T}} dx.$$

Costruendo l'analogo diagramma e chiamando con ξ_v l'ascissa del suo baricentro, avremo con i medesimi calcoli:

$$(10) \quad \frac{1}{I_v} \frac{dI_v}{dT} = \frac{\gamma}{T^2} \xi_v.$$

6. Servendoci della (8) e della (10) la (2) ci darà per l'indice bolometrico K:

$$(I) \quad \frac{dK}{dT} = \frac{d}{dT} [m_\beta - m_v] = 1.085 \frac{\gamma}{T^2} [\xi_v - \xi_\beta].$$

Con un calcolo analogo si avrebbe per la grandezza fotografica m :

$$(II) \quad \frac{d}{dT} [m_\beta - m_f] = 1.085 \frac{\gamma}{T^2} [\xi_f - \xi_\beta].$$

E quindi, sottraendo, otteniamo, per l'indice del colore c :

$$(III) \quad \frac{dc}{dT} = \frac{d}{dT} [m_f - m_v] = 1.085 \frac{\gamma}{T^2} [\xi_v - \xi_f].$$

Queste tre equazioni (I), (II), (III), non precedentemente ottenute da altri, appaiono notevoli per semplicità, simmetria e facile interpretazione geometrica. Ma sopra tutto esse hanno il grande vantaggio di dipendere unicamente dalla posizione dei baricentri, e quindi di poterci fornire indicazioni anche senza una conoscenza precisa delle curve di sensibilità. Ne faremo un'applicazione al calcolo dell'indice bolometrico K, secondo lo scopo che ci siamo prefissi in questa Nota.

7. A tale fine osserviamo che integrando per parti e confrontando con (5) otteniamo:

$$(11) \quad \int_0^\infty x^4 e^{-\frac{\gamma x}{T}} dx = - \left[\frac{T}{\gamma} x^4 e^{-\frac{\gamma x}{T}} \right]_0^\infty + \frac{4T}{\gamma} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{\gamma x}{T}} dx = \\ = \frac{4T}{\gamma} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{\gamma x}{T}} dx = \frac{4T}{\gamma} I_\beta$$

e quindi la (6) ci dà:

$$(12) \quad \xi_\beta = \frac{4T}{\gamma}.$$

Quanto a ξ_v possiamo, con approssimazione, supporlo eguale a quel valore di ξ per cui l'occhio presenta la massima sensibilità cioè ad $\frac{1}{0.57} = 1.75$. Con tali dati la (I) ci dà integrando e riducendo:

$$(13) \quad K = m_\beta - m_v = \text{cost} - 1.90 \frac{\gamma}{T} + 4.34 \log_e \frac{\gamma}{T} = \\ = \text{cost} - 1.90 \frac{\gamma}{T} + 10.0 \log_{10} \frac{\gamma}{T}.$$

Rimane ancora la costante arbitraria, da cui dipende unicamente lo zero della scala. Volendo confrontare i nostri valori con quelli ottenuti per altra via dall'Hopmann nel lavoro citato, la fisseremo in modo da aversi

$K = 0$ per $\frac{\gamma}{T} = 2.4$; onde la (13) diverrà infine:

$$(14) \quad K = 0.76 - 1.90 \frac{\gamma}{T} + 10.0 \log_{10} \frac{\gamma}{T}.$$

Calcolando con questa semplicissima formula i valori di K e ponendoli in relazione con quelli dell'Hopmann⁽¹⁾ abbiamo il seguente quadro riassuntivo che mostra la buona concordanza dei nostri risultati; concordanza tanto più rimarchevole in quanto che sono stati ottenuti senza servirci della curva di sensibilità dell'occhio, e senza quadrature meccaniche. D'altra parte data la difficoltà di eseguire esatte osservazioni bolometriche sopra le stelle, la precisione raggiunta appare più che sufficiente.

$$K = m_{\beta} - m_v$$

$\frac{\gamma}{T}$	T	Hopmann	Arnellini
0.5	28600	— 3.30	— 3.19
0.6	23800	— 2.80	— 2.60
0.7	20400	— 2.30	— 2.12
0.8	17900	— 1.90	— 1.73
0.9	15900	— 1.50	— 1.41
1.0	14300	— 1.15	— 1.14
1.2	11900	— 0.60	— 0.73
1.4	10200	— 0.25	— 0.44
1.6	8900	— 0.15	— 0.24
1.8	8000	— 0.05	— 0.11
2.0	7100	0.00	— 0.03
2.2	6500	0.00	0.00
2.4	6000	0.00	0.00
2.6	5500	— 0.05	— 0.03
2.8	5100	— 0.10	— 0.09
3.0	4800	— 0.20	— 0.17
3.5	4100	— 0.50	— 0.45
4.0	3600	— 0.90	— 0.82
4.5	3200	— 1.30	— 1.26
5.0	2900	— 1.80	— 1.75
6.0	2400	— 2.80	— 2.86
7.0	2000	— 4.00	— 4.09

(1) Cfr. HOPMANN, nota citata. Cfr. anche G. SCHNAUDER, *Zu Wilsings Kolorimetrischer Methode*, « Astr. Nach. », Bd. 219.

Matematica. — *Sulle uniformizzanti di funzioni non uniformi.* Nota del Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità.* Nota del Socio C. SOMIGLIANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla tensione di trasformazione tra gli stati quantici fondamentali dell'elio.* Nota del Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Su di un fenomeno termico residuo.* Nota del Socio Q. MAJORANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Costituzione e spettri d'assorbimento dei nitrosolfuri del ferro.* Nota del Corrisp. L. CAMBI e di L. SZEGÖ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sopra un nuovo elemento: il Florenzio (Numero atomico « 61 »).* Nota del Corrisp. L. ROLLA e di L. FERNANDES.

AVVERTENZA: La presente Nota faceva parte di un plico suggellato spedito il giorno 21 giugno 1924 (del quale prese atto la Presidenza dell'Accademia il 4 luglio 1924). Il plico, in seguito a desiderio espresso dagli AA., fu aperto nella seduta del 7 novembre 1926, e della Nota contenuta fu data lettura davanti all'Accademia.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Se esista nel Massiccio Cristallino delle Alpi Marittime un secondo grande dicco granitico.* Nota del Corrisp. S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Aspetti di lotta e di parassitismo nelle imitazioni di infusori*⁽¹⁾. Nota del Socio straniero L. HERRERA⁽²⁾.

Io propongo il nome di *Colpoidi* alle imitazioni di infusori preparate coll'olio d'olivo in gasolina ed una soluzione di sapone. Questi colpoidi hanno forma variabile sferica, ellittica od irregolare e spesso ameboide. Le dimensioni variano da 1 a 200 e 800 micron e più: una gran parte di questi artefatti è visibile ad occhio nudo. Queste imitazioni presentano delle manifestazioni apparenti veramente straordinarie di lotta e parassitismo.

Tecnica. Si preparano le stesse soluzioni impiegate per imitare le amebe in movimento⁽³⁾.

Soluzione A: Gasolina: 100 ccm³; olio d'olivo 50 ccm³.

Soluzione B: Soda caustica o carbonato sodico; gr. 14; Acqua 100 ccm³; rodamina per sapone: gr. 1.

La soluzione A si versa in una scatola di Petri situata sul piatto del microscopio, e vi si aggiungono delle gocce della soluzione B. Si osserva coll'ingrandimento più piccolo.

Risultati. Le sferette o colpoidi si gettano le une contro le altre, sembra che combattano, che si inseguano, si succhino mutualmente la linfa. Essi giungono da tutte le direzioni vorticosamente, si avvicinano si allontanano, si scambiano i liquidi con attività febbrile, sembrano saziarsi, vanno vengono, hanno l'aspetto di esseri viventi, dotati di una volontà, di coscienza, di bisogni, di simpatie ed antipatie.

Ecco i dettagli osservati e rappresentati con grande cura nelle figure 1 a 6. Un colpoide avanza da 1 a 3, si allunga in 2, ha la forma di una pera in 3, si mette in contatto con un altro colpoide in 4. Essi si avvicinano in 5. I bordi in contatto si appiattiscono in 7, e si osserva uno scambio di vene liquide in 8. Non si tratta affatto di scariche elettriche secondo le idee di Mac Bain sulla conducibilità delle soluzioni di sapone, assai grande in rapporto alla loro proprietà osmotiche (4). Infatti nell'oscurità non si osserva alcuna scintilla ed in altri colpoidi lo scambio dei liquidi è evidente: si osservano anche delle aspirazioni e prolungamenti di un colpoide entrato nel colpoide vicino, 9 a 13. Si forma un mammellone in 9. In 10 esso corrisponde a quello del vicino. In 11 si ha la formazione d'un mammellone inferiore col medesimo rapido scambio di liquidi. In 12 uno dei colpoidi si eleva ed allora due mammelloni sono sostituiti da uno solo. In 14 due masse si succhiano la linfa e si osservano delle ondulazioni nella superficie di contatto,

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1926.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto degli alti studi biologici di Messico.

(3) Questi « Rendiconti », vol. IV, fasc. 7-8, p. 247.

(4) « Proc. Roy. Soc. », 97 1920. I; « Chem. Soc. » 115 119, 121.

con cambiamento continuo di forme, 15 e 16. Un piccolo colpoide si trova di fronte ad un altro e qualche volta gli si avvicina con formazione di un mammellone e scambio di vene liquide, 16 e 17. In 18 due gocce grandi viste al microscopio si scambiano il liquido attraverso un'ampia superficie. In 19 due mammelloni si scambiano liquidi attraverso una superficie concava. In 20 gli stessi deformandosi si scambiano i liquidi solamente attraverso



Fig. 1.

un lobo inferiore. In 21 due gocce di dimensioni uguali si deformano e ruotano nei due sensi opposti. Alle volte esse si toccano anche. Si osservano delle correnti interne come quelle segnalate da Bütschli e da altri nelle gocce di olio nella soda (1). 22: due piccoli colpoidi si muovono in tutte le direzioni, si avvicinano ed arrivano a toccarsi, si separano

(1) RHUMBOR, *Methodik der Nachanung von Lebensvorgängen durch physikalische Konstellationen Handbuch der biologischen Methoden*, Abt. V, Teil 3, fig 97..

si avvicinano un'altra volta ed infine restano separati definitivamente. 23: rapido movimento giratorio paralisi; infine restano attaccati al fondo. 24. Il colpoide cammina e si deforma in tutte le direzioni, resta senza movimento al fondo producendo due pseudopodi che escono e rientrano rapidamente; infine egli prende la forma sferoidale ed espelle un piccolo globulo che ruota rapidamente e si sposta imitando la sporulazione. Esso si allunga



Fig. 2.

in forma di tubo rapidamente, prende la forma di una pera e si paralizza. 24 e 25 si avvicinano si separano ecc. ecc. 26. Un piccolo colpoide avanza rapidamente contro un altro più grande ruotandogli attorno, suggendogli la linfa con una specie di rabbia e deformandosi per adattarsi alla forma della sua vittima.

Si direbbe che per meglio succhiare si forma una bocca avventizia. 27: due piccoli globuli mostrano dei prolungamenti periferici che imitano delle ciglia vibratili. 28: un colpoide è stato diviso mediante un tubo capillare di vetro, ed i due globuli si scambiano liquidi tra di loro. 29: si osservano delle particelle lenticolari vicino ai punti di contatto

di tre colpoidi dopo il succhiamento. 30: colpoidi prodotti tra le laminette ed il copri oggetto: essi ruotano rapidamente e quindi si paralizzano. 30. Un grosso colpoide è parassitato da un altro piccolo che affonda una tromba nel suo ospite. 31: lo stesso deformato. 32: tre colpoidi si succhiano la linfa: osservare le ondulazioni dei bordi. Vi è produzione di piccoli coni d'attrazione, come nel caso della fecondazione. 32 b e 32 c: altre fasi dello stesso fenomeno, 33: Cinque colpoidi si succhiano avidamente e formano una



Fig. 3.

catena con deformazioni in 34, 35 e 36, 37: altra catena. Gli spazi tra i globuli sono stati esagerati dal disegnatore per meglio vedere le vene liquide, come nel N. 38. Qui un colpoide centrale è attorniato da sette periferici, lo scambio di liquidi è simultaneo ed intenso, i globuli vibrano e le loro correnti osmotiche interne aumentano durante il succhiamento *come per un'eccitazione funzionale*. 39: i piccoli colpoidi vanno e vengono attorno al grande, sembrano saziarsi, ed immediatamente dopo essi tornano a l'attacco. Vedi anche figura 44.

Per dimostrare che si tratta veramente di cause osmotiche io preparo due soluzioni di soda, una con 17 gr. e l'altra con 7 gr. in 100 di acqua. La prima viene colorata in nero, la seconda in rosso. Nei numeri 40, 42 e 43 si mettono in evidenza i colpoidi neri penetranti nei colpoidi rossi che hanno un siero meno concentrato. 41: un colpoide allungato e fisso alla base oscilla tra un globulo grande ed uno piccolo e si impadronisce dei loro liquidi.

Altre osservazioni. — Qualche volta un colpoide grande assorbe e « divora » un piccolo colpoide come un vero parassita. In generale questi globuli hanno l'aspetto dei parassiti del nucleo come nel caso del Karyophagus salamandrae (1).

Esperienza 5310; marzo 29-1926.

Gasolina 130 ccm³, olio d'olivo 20 ccm³, soda caustica gr. 14 acqua 100 ccm³, rodamina gr. 1.

I movimenti sono più lenti, i globuli si deformano pressandosi gli uni contro gli altri ed acquistando forme poliedriche, lo scambio dei liquidi è più incerto, ed essi si paralizzano più presto per quanto i movimenti ritornino per agitazione della capsula di Petri.

Considerazioni finali e conclusioni. — L'interpretazione di questi fatti completamente nuovi è *provvisoria* e di una grande difficoltà. Io esito prima di dare ai miei colpoidi il titolo di parassiti. Tra il parassitismo, commensalismo, e simbiosi si trovano tutti i termini di passaggio e d'altra parte io non conosco alcuna specie di organismi che si scambiano i liquidi in questa maniera singolare. Probabilmente questi scambi sono di origine osmotica: ogni colpoide cerca di impadronirsi di una parte della soluzione alcalina del suo vicino per mantenere la sua pressione osmotica, ma questo vicino gli sottrae alla sua volta una parte di soluzione. Questi scambi sono essi equivalenti? Come spiegare i movimenti dei colpoidi? Probabilmente essi sono dovuti alle correnti osmotiche; si osservano infatti delle correnti di granulazioni, endosmotiche ed esosmotiche prementi sui colpoidi come nel caso dei grani di canfora che ruotano nell'acqua. Alcune volte un colpoide grosso ne assorbe uno piccolo come le gocce di mercurio. La preparazione ha sempre l'aspetto *d'una colonia di esseri viventi* che sembrano possedere una volontà, una coscienza rudimentale, degli appetiti o tattismi e chemiotattismi. Ho visto p. es. un colpoide che si avvicinò rapidamente ad una goccia di acido acetico; immediatamente egli rallentò i suoi movimenti, si produsse una ondulazione dei bordi e fuggì quel liquido nocivo. Infatti, i colpoidi son distrutti dall'acqua acida, alcool e resistono al cianuro di potassio ed al solfato di chinina. L'acido solforico ed il bifluoruro di

(1) HEMMEGUJ, *Leçons sur la cellule*. Paris, 1896, 240, p. 153.

potassio si oppongono alla loro formazione, e allo stesso modo si comportano generalmente tutti i reattivi che impediscono la formazione del sapone e lo sciolgono.

Si impone di conseguenza uno studio approfondito dell'interpretazione di questi fatti che costituiscono ad ogni modo *una sorpresa antivitalistica, poichè globuli di una soluzione di soda circondata da una membrana di sapone imitano l'attività di una colonia di infusori e sembrano possedere una psicologia rudimentale che ha per causa delle volgari forze osmotiche.*

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Caratterizzazione dei sistemi del Bianchi di ∞^1 superficie.* Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

Nel teorema di permutabilità per le trasformazioni asintotiche delle superficie entrano in gioco due sistemi semplicemente infiniti di superficie — che si possono chiamare *sistemi del Bianchi* — così fatti che due superficie di sistemi diversi sono sempre falde focali di una congruenza W.

Data l'importanza di quel teorema, mi sono proposto di cercare se quei sistemi si possano definire in modo più diretto. Ora ciascuno di essi consta, come è chiaro, di ∞^1 superficie riferite fra loro, con conservazione delle asintotiche, in modo che punti corrispondenti sono allineati, mentre piani tangenti corrispondenti formano fascio. Ma bastano già queste condizioni, tanto semplici, a definire i sistemi del Bianchi; oppure bisogna imporne ancora delle altre? Risulterà da quanto segue che la prima alternativa è la vera, ove solo si abbia riguardo di escludere il caso banale dei sistemi di superficie ottenuti da una superficie fissa con ∞^1 omologie aventi in comune centro e piano di omologia.

1. Ai sistemi ∞^1 di superficie riferite fra loro in modo che punti omologhi siano allineati e piani tangenti omologhi passino per una retta — prescindendo dalla corrispondenza delle asintotiche — è dedicata una Memoria del Fubini ⁽²⁾. Secondo essa, scrivendo (x, ξ) per la somma dei prodotti delle coordinate proiettive omogenee omologhe di punto e di piano, siano esse le x e le ξ , e riferendo due fra le ∞^1 superficie del sistema,

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1926.

(2) *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R*, « Ann. di Mat. », serie IV, t. I (1923-24).

siano la (x) e la (x') ; agli stessi parametri u, v , si hanno le condizioni necessarie e sufficienti

$$(1) \quad (\xi, x) = (\xi, x_u) = (\xi, x_v) = 0,$$

$$(2) \quad (\xi', x') = (\xi', x'_u) = (\xi', x'_v) = 0,$$

$$(3) \quad (\xi, x') + (\xi', x) = 0,$$

$$(4) \quad (\xi, x'_u) + (\xi', x_u) = (\xi, x'_v) + (\xi', x_v) = 0,$$

dove ξ e ξ' sono rispettivamente i piani tangenti alle superficie (x) e (x') in punti omologhi x e x' , e dove (1) le coordinate x' e ξ' sono state moltiplicate per opportuni fattori di proporzionalità: si è posto $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, ecc.

L'ipotesi della corrispondenza delle asintotiche sulle ∞^1 superficie del sistema porta — ove le u e le v siano appunto parametri asintotici — ad aggiungere alle precedenti le nuove equazioni

$$(5) \quad (\xi, x_{uu}) = (\xi, x_{vv}) = 0,$$

$$(6) \quad (\xi', x'_{uu}) = (\xi', x'_{vv}) = 0,$$

$$(7) \quad (\xi, x'_{uu}) + (\xi', x_{uu}) = 0, \quad (\xi, x'_{vv}) + (\xi', x_{vv}) = 0.$$

Introduciamo ora otto funzioni a, b, c, d, A, B, C, D , delle u, v , tali che x' e ξ' si esprimano mediante le

$$(8) \quad x' = ax + bx_u + cx_v + dx_{uv},$$

$$(9) \quad \xi' = A\xi + B\xi_u + C\xi_v + D\xi_{uv},$$

dove si può supporre $d \neq 0$. Qualunque siano le a, b, c, d che compaiono nel secondo membro della (8) si ha

$$x'_u = \lambda x + \mu x_u + \nu x_v + \pi x_{uv},$$

con (2)

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda = a_u + bp_{11} + d(p_{11}v + \beta p_{22}), \\ \mu = b_u + a + b\vartheta_u + d(\vartheta_{uv} + \beta\gamma), \\ \nu = c_u + b\beta + d(\beta_v + \beta\vartheta_v + p_{11}), \\ \pi = d_u + c + d\vartheta_u, \end{cases}$$

(1) Allora le ∞^1 superficie in questione sono i luoghi del punto $x + kx'$ con k costante.

(2) Adotto le notazioni di FUBINI e ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, Zanichelli. Si tengano presenti, per il seguito, le equazioni fondamentali e le condizioni di integrabilità ivi assegnate nel § 16 A) e D).

con formole analoghe per $x'_v = lx + mx_u + nx_v + px_{uv}$. Le (10) si semplificano, se, come qui faremo, le coordinate x si suppongono non omogenee: allora $p_{11} = p_{22} = 0$. Notiamo poi subito, anche per il seguito, le

$$\begin{aligned}(\xi_u, x_u) &= (\xi_v, x_v) = (\xi_u, x_{uv}) = (\xi_v, x_{uv}) = (\xi_{uv}, x_u) = (\xi_{uv}, x_v) = 0 \\ &-(\xi_u, x_v) = -(\xi_v, x_u) = (\xi_{uv}, x) = (\xi_{uv}, x) \quad ; \\ (\xi_{uv}, x_{uv}) &= (\vartheta_{uv} + \beta_\gamma) (\xi, x_{uv}).\end{aligned}$$

Le (3), (4) danno intanto per B, C, D

$$(11) \quad B = p \quad , \quad C = \pi \quad , \quad D = -d;$$

mentre le (2) si scrivono

$$\begin{aligned}dA - cp - b\pi - [a + d(\vartheta_{uv} + \beta_\gamma)]d &= 0, \\ \pi A - vp - \mu\pi - [\lambda + \pi(\vartheta_{uv} + \beta_\gamma)]d &= 0, \\ pA - np - m\pi - [l + p(\vartheta_{uv} + \beta_\gamma)]d &= 0.\end{aligned}$$

Ricavando dalla prima di queste A e sostituendolo poi nella seconda e nella terza, si ha la

$$\begin{aligned}(12) \quad a_u &= \frac{c}{d^2} p\pi + \frac{b}{d^2} (d_u + c) \pi - [b_u + d(\vartheta_{uv} + \beta_\gamma)] \frac{\pi}{d} - \\ &- [c_u + b\beta + d(\beta_v + \beta\vartheta_v)] \frac{p}{d},\end{aligned}$$

insieme con l'analogia in a_v , che vogliamo indicare con (12'). Le (7) diventano poi

$$(13) \quad \pi_u + c_u + d\beta_v - \beta d_v = 0,$$

e analoga (13'). Finalmente, le (6) si trasformano nelle

$$\begin{aligned}(14) \quad \left[\frac{cp + b\pi}{d} + a \right] (\pi_u + v + \pi\vartheta_u) - p[v_u + \mu\beta + \pi(\beta_v + \beta\vartheta_v)] \\ - \pi[\mu_u + \lambda + \mu\vartheta_u + \pi(\vartheta_{uv} + \beta_\gamma)] - d\lambda_u = 0,\end{aligned}$$

e analoga (14'). Pertanto la ricerca delle superficie (x') che insieme con una data superficie (x) risolvono il nostro problema è ricondotta alla ricerca delle a, b, c, d tali che sussistano le (12), (12'), (13), (13'), (14),

(14'). Ora, anzitutto, se si scrive la condizione di integrabilità per a , in base alle (12), a riduzioni fatte essa risulta

$$(15) \left(\frac{bd_u - cd_v}{d} + c_v - b_u \right) (dd_{uv} - d_u d_v + (\pi + c)(p + b) - d^2 \beta \gamma) = 0.$$

Poi, se si elimina a_{uu} - che compare in (14) attraverso λ_u , in base alle (10) - fra la (14) stessa e la (12) derivata rispetto a u , viene

$$(16) [c\pi + d(\pi_u - p\beta)] [dd_{uv} - d_u d_v + (\pi + c)(p + b) - d^2 \beta \gamma] = 0,$$

insieme con la quale sussiste l'analoga (16'). Si conchiude dunque che o vale la

$$(17) dd_{uv} - d_u d_v + (\pi + c)(p + b) - d^2 \beta \gamma = 0,$$

oppure sussiste il sistema

$$(18) \begin{cases} bd_u - cd_v + d(c_v - b_u) = 0, \\ c\pi + d(\pi_u - p\beta) = 0, \\ bp + d(p_i - \pi\gamma) = 0. \end{cases}$$

2. Studiamo la prima alternativa. Dico che, in essa, il sistema ∞^1 di superficie da noi considerato è effettivamente un sistema del Bianchi. A tal uopo mostrerò che è possibile (in ∞^1 modi) di trovare una superficie (y) , in corrispondenza puntuale con la (x) e la (x') , tale che le rette xy e $x'y$ descrivano due congruenze W aventi per falde focali la (x) e la (y) , e rispettivamente la (x') e la (y) . Posto inverso⁽¹⁾ per il punto y che descrive la (y) e per il relativo piano ivi tangente η

$$y = Mx + 2(\varphi x_u + \psi x_v) \quad , \quad \eta = L\xi + 2(\varphi \xi_u - \psi \xi_v),$$

con M, L, φ, ψ funzioni di u e v da determinarsi opportunamente, la condizione imposta alla retta xy importa che sia

$$(19) \quad \varphi_v = -\gamma\psi \quad , \quad \psi_u = -\beta\varphi,$$

assumendo poi

$$(20) \quad \begin{cases} M = -\varphi_u - \varphi \vartheta_u - \psi_v - \psi \vartheta_v, \\ L = -\varphi_u - \varphi \vartheta_u + \psi_v + \psi \vartheta_v. \end{cases}$$

(1) Cfr. FUBINI e ČECH, op. cit., § 42.

Realizzate queste condizioni, basterà, quanto alla retta yx' , imporre che essa tocchi (y) e (x') rispettivamente in y e in x' , che cioè sia

$$(\eta, x') = (\xi', y) = 0,$$

vale a dire

$$(21) \quad \begin{cases} d(\varphi_u + \varphi\vartheta_u) - (d_u + d\vartheta_u)\varphi - (p + b)\psi = 0, \\ d(\psi_v + \psi\vartheta_v) - (\pi + c)\varphi - (d_v + d\vartheta_v)\psi = 0. \end{cases}$$

Si tratta dunque di provare, ove sia soddisfatta la (17), la compatibilità dei sistemi (19) e (21) nelle funzioni incognite φ e ψ . Basterà a tal uopo scrivere le condizioni di integrabilità inerenti a φ_{uv} e ψ_{uv} : ora la prima (e per la seconda tutto procede analogamente) si riduce a

$$(dd_{uv} - d_u d_v + (p + b)(\pi + c) - d^2\beta\gamma)\varphi + (p_v + b_v + d\gamma_u - d_u\gamma)d\psi = 0,$$

che è effettivamente soddisfatta, in quanto i coefficienti di φ e ψ si annullano, appunto in virtù della (17) e della (13').

3. Supponiamo invece che valgano le (18). Allora, è intanto facile verificare che esiste una funzione $\Phi(u, v)$ tale che le quattro espressioni Φ_u ,

$$b_u + \Phi + b\vartheta_u + d(\vartheta_{uv} + \beta\gamma) \quad , \quad c_u + b\beta + d(\beta_v + \beta\vartheta_v),$$

π risultino proporzionali a Φ, b, c, d . Pertanto il punto $\Phi x + bx_u + cx_v + dx_{uv}$ risulta fisso; e le rette xx' passano per un punto fisso g . Dualmente segue senz'altro che le rette $\xi\xi'$ giacciono in un piano fisso ω . Per concludere nel modo più semplice che (x) e (x') vengono a corrispondersi in un'omologia di centro g e piano ω - e allora lo stesso varrà ovviamente per due qualsiasi superficie del sistema ∞^1 considerato - mandiamo con un'omografia il piano ω all'infinito e collochiamo nel punto g l'origine di un sistema cartesiano $x_1 x_2 x_3$, oppure il punto all'infinito dell'asse x_1 , secondo che g non sta oppure sta su ω . Nel primo caso, assunte a variabili indipendenti sulla superficie (x) le x_1, x_2 , esiste una funzione $s(x_1, x_2)$ tale che $x'_i = sx_i$ ($i = 1, 2, 3$), mentre i piani tangenti alle due superficie (x) e (x') in punti corrispondenti devono risultare paralleli. Allora, se s non è costante, risulterebbe per la superficie (x) •

$$x_3 = x_1 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial x_3}{\partial x_2},$$

vale a dire la superficie stessa sarebbe un cono col vertice in g , e con essa coinciderebbero la (x') e tutte le superficie del supposto sistema ∞^1 , ciò che è assurdo. Dunque s è costante, e l'asserto è provato. A una conclusione del tutto analoga si giunge nel secondo caso; e così tutto è dimostrato.

Geometria. — *Una generalizzazione della trasformazione di Koenigs.* Nota di B. SEGRE, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva della nuova meccanica ondulatoria.* Nota di E. FERMI ed E. PERSICO, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Calcolo approssimato dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita.* Nota del Tenente Colonnello del Genio Aeronautico dott. E. RAIMONDI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI⁽¹⁾.

1. In una Nota precedente⁽²⁾ abbiamo trovato che la risultante delle pressioni dinamiche sulla lamina risulta definita mediante le sue componenti nel modo seguente

$$(31) \quad R_y + iR_x = -\frac{C}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-iF} d\theta,$$

dove (30)

$$F = -i \lg k - \frac{i\omega x}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] d\sigma - \frac{i\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] d\sigma.$$

La ζ_3 che figura nella (30) è la nota funzione ellittica di Weierstrass, di periodo reale 2ω e di periodo immaginario $2\omega'$, con ω ed $\frac{\omega'}{i}$ positivi, e con

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}};$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1926.

(2) Questi «Rendiconti», vol. IV, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 7-8, ottobre 1926.

funzione che ha il seguente sviluppo ⁽¹⁾:

$$(32) \quad \zeta_3 u = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{q^{2b-1} \sin \frac{\pi u}{\omega}}{1 - 2q^{2b-1} \cos \frac{\pi u}{\omega} + q^{4b-2}}$$

nel quale

$$(33) \quad \eta = \zeta \omega = \frac{\pi^2}{2\omega} \left(\frac{1}{6} + \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{b\omega'}{\omega}} \right).$$

2. Nell'ipotesi che si trascurino le potenze di q superiori alla prima, il che corrisponde (come faremo vedere in una Nota successiva) al fatto che la lamina è abbastanza lontana dalla parete indefinita, abbiamo:

$$\zeta_3 u = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \frac{q \sin \frac{\pi u}{\omega}}{1 - 2q \cos \frac{\pi u}{\omega}} = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} q \sin \frac{\pi u}{\omega},$$

ovvero, nel nostro caso,

$$\zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] = \frac{\eta}{\pi} (\theta - \sigma) + \frac{2\pi}{\omega} q \sin (\theta - \sigma);$$

e quindi l'integrale indefinito che figura nella (30) diventa, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$\int \zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] d\sigma = \frac{\eta}{\pi} \left[\theta \sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right] + \frac{2\pi q}{\omega} \cos (\theta - \sigma),$$

e gli integrali definiti,

$$(34) \quad \int_0^{2\pi} \zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] d\sigma = 2\eta (\theta - \pi)$$

ed

$$(35) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta_3 \left[\frac{\omega}{\pi} (\theta - \sigma) \right] d\sigma = \eta \left(\theta - \frac{3}{2}\pi \right) + \frac{4\pi q}{\omega} \cos \theta.$$

(1) TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, Paris, Gauthier-Villars, t. IV, 1902, p. 101, formole CVI, (2).

Per le (34) e (35), alla (30) si può dare la forma

$$F = -i \lg k - \frac{i\omega\eta}{\pi} \left(\frac{2\alpha}{\pi} + 1 \right) (\theta - \pi) + \frac{i\omega\eta}{2} - 4iq \cos \theta;$$

e, ponendo per brevità

$$(36) \quad \frac{2\alpha}{\pi} + 1 = m,$$

$$(37) \quad \omega\eta = n,$$

prende la forma

$$F = -i \lg k - \frac{imn}{\pi} (\theta - \pi) + \frac{in}{2} - 4iq \cos \theta,$$

per cui

$$e^{-iF} = \frac{1}{k} e^{n\left(m + \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} e^{-4iq \cos \theta}.$$

E poichè, trascurando le potenze di q superiori alla prima,

$$e^{-4iq \cos \theta} = 1 - 4iq \cos \theta,$$

segue che

$$e^{-iF} = \frac{1}{k} e^{n\left(m + \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} (1 - 4iq \cos \theta),$$

e quindi l'integrale indefinito della (31) prende la forma

$$(38) \quad \int e^{-iF} d\theta = \frac{e^{n\left(m + \frac{1}{2}\right)}}{k} \left[\int e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} d\theta - 4q \int e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \cos \theta d\theta \right].$$

Calcoliamo, a prescindere dalle costanti additive, gli integrali indefiniti che compaiono nella (38). Abbiamo senz'altro

$$\int e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} d\theta = -\frac{\pi}{mn} e^{-\frac{mn}{\pi}\theta};$$

mentre per l'altro, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \cos \theta d\theta &= e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \sin \theta + \int \frac{e^{-\frac{mn}{\pi}\theta}}{\frac{mn}{\pi}} \sin \theta d\theta = e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \sin \theta + \\ &= -\frac{e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \cos \theta}{\frac{mn}{\pi}} - \int \frac{e^{-\frac{mn}{\pi}\theta}}{\frac{m^2 n^2}{\pi^2}} \cos \theta d\theta, \end{aligned}$$

da cui

$$\int e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \cos \theta d\theta = \frac{m^2 n^2}{\pi^2 + m^2 n^2} e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \left(\sin \theta - \frac{\cos \theta}{\frac{mn}{\pi}} \right);$$

e, sostituendo nella (38),

$$\int e^{-iF} d\theta = \frac{e^{n(m + \frac{1}{2})}}{k} \left[-\frac{\pi}{mn} e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} - 4q \frac{m^2 n^2}{\pi^2 + m^2 n^2} e^{-\frac{mn}{\pi}\theta} \left(\sin \theta - \frac{\cos \theta}{\frac{mn}{\pi}} \right) \right];$$

per cui si ha, per l'integrale definito della (31),

$$\int_0^{2\pi} e^{-iF} d\theta = \frac{e^{n(m + \frac{1}{2})}}{k} \frac{\pi}{mn} (1 - e^{-2mn}) \left(1 - \frac{4qm^2 n^2}{\pi^2 + m^2 n^2} \right),$$

e quindi, essendo questa espressione reale, per la (31) stessa, abbiamo:

$$R_x = 0,$$

$$(39) \quad R_y = -\frac{C^2}{8k\pi mn} e^{n(m + \frac{1}{2})} (1 - e^{-2mn}) \left(1 - \frac{4qm^2 n^2}{\pi^2 + m^2 n^2} \right);$$

la quale ci dice che la risultante delle pressioni dinamiche esercitate dalla corrente sulla lamina è diretta secondo l'asse della y (fig. 1^a)⁽¹⁾ ed è proporzionale al quadrato della circolazione.

3. Per determinare il senso di R_y , bisogna esaminare il segno dei fattori che figurano nella sua espressione.

Abbiamo che:

k è una costante arbitraria reale e positiva, che compare nella formula del Villat (13).

m è data dalla (36)

$$(40) \quad m = \frac{2\alpha}{\pi} + 1;$$

e, poichè l'angolo α si può fare variare tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, per avere tutte le posizioni della lamina rispetto al piano indefinito, possiamo di conseguenza ammettere che sia

$$1 \leq m \leq 2.$$

q è definita dalla (14)

$$(41) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}},$$

nella quale ω è reale ed ω' è immaginario, e si suppone inoltre che ω ed $\frac{\omega'}{i}$ siano positivi. Abbiamo quindi che

$$0 < q < 1.$$

(1) Per le figure ci riferiremo alle due Note precedentemente pubblicate su questi « Rendiconti », vol. II, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 7-8; e vol. III, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 1^o, ottobre-gennaio 1925-26.

n è data dalla (37)

$$n = \eta \omega,$$

e si può calcolare. Infatti per la (33) si ha

$$n = \omega \eta = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \sum_b \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{\hbar \omega'}{\omega}} \right),$$

ma per la (41)

$$\frac{\pi \omega'}{\omega} = -i \lg q,$$

quindi

$$n = \omega \eta = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \sum_b \frac{1}{\sin^2 i b \lg q} \right);$$

ma, d'altra parte, poichè in generale

$$\sin i\theta = i \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = i \operatorname{Sh} \theta,$$

nel nostro caso si ha, successivamente,

$$\sin i b \lg q = i \operatorname{Sh} \lg q^b = \frac{i}{2} (e^{\lg q^b} - e^{-\lg q^b}) = \frac{i}{2} (q^b - q^{-b}),$$

$$\sin^2 i b \lg q = -\frac{1}{4} (q^b - q^{-b})^2 = -\frac{(q^{2b} - 1)^2}{4 q^{2b}},$$

$$n = \frac{\pi^2}{12} - 2 \pi^2 \sum_b \frac{q^{2b}}{(q^{2b} - 1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - 2 \pi^2 \sum_b q^{2b} (1 - q^{2b})^{-2};$$

e quindi, colla solita approssimazione,

$$n = \frac{\pi^2}{12} \approx 0.82.$$

Ciò posto, è facile verificare che sono soddisfatte le ineguaglianze:

$$1 - e^{-2mn} > 0, \quad 1 - \frac{4qm^2n^2}{\pi^2 + m^2n^2} > 0,$$

la prima delle quali è una conseguenza della ineguaglianza $mn > 0$; mentre, per dimostrare la seconda, basta osservare che la relazione

$$4qm^2n^2 < \pi^2 + m^2n^2$$

è verificata, *a fortiori*, poichè è

$$4 m^2 n^2 < \pi^2 + m^2 n^2,$$

cioè

$$3 m^2 n^2 < \pi^2,$$

o, approssimativamente in numeri, prendendo per m il massimo dei valori che esso può assumere, cioè 2,

$$3 \cdot 2^2 \cdot 0.67 < 9.87,$$

ovvero

$$8.04 < 9.87.$$

Da quanto sopra emerge che R_y è sempre negativa, e cioè che, *la risultante delle pressioni dinamiche tende a fare avvicinare la lamina alla parete piana indefinita* ⁽¹⁾.

4. La risultante delle pressioni dinamiche esercitate dalla corrente sulla parete indefinita è data pure dalla prima formola di Blasius

$$R'_y + iR'_x = \frac{1}{2} \int_{\pi'} w^2 d\chi,$$

nella quale si suppone che l'integrazione sia eseguita nel senso delle x' crescenti. Riferendoci quindi al campo Γ della corona circolare (fig. 3) abbiamo

$$R'_y + iR'_x = \frac{C^2}{8\pi^2 i} \int_{\gamma_1} e^{iF} \frac{dZ}{Z},$$

dove l'integrazione lungo γ_1 deve essere eseguita in maniera di lasciare a sinistra l'area della corona circolare.

Confrontando colla (29) si ha quindi

$$R'_y = R_y.$$

Dunque, come era da prevedersi *la risultante delle pressioni esercitate dalla corrente sulla parete indefinita è opposta a quella esercitata sulla lastra*.

(1) Poichè, come abbiamo osservato, il problema che stiamo trattando schematicamente considera un aeroplano (monoplano) in vicinanza del suolo, possiamo asserire che quando un aeroplano è nelle vicinanze del suolo, una circolazione tende a farlo cadere.

Idromeccanica. — *Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele.* Nota ⁽¹⁾ di ARNALDO MASSOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Studio, in questa Nota, il problema idrodinamico piano relativo alla traslazione uniforme di un cilindro rotondo, con circolazione, lungo l'asse di un canale a sponde piane parallele, nell'ipotesi che il raggio del cilindro sia abbastanza piccolo di fronte alla larghezza del canale; più precisamente, indicando con a la larghezza del canale, con b il raggio del cilindro, ammetto che del rapporto $\pi b/a$ sieno trascurabili di fronte all'unità le potenze superiori alla prima.

In assenza di corrente circolatoria il problema è stato risolto con la stessa approssimazione dal Lamb; assunto il sistema di riferimento come indica la fig. 1 e impressa al sistema liquido-solido una velocità c eguale ed opposta a quella di quest'ultimo, il potenziale complesso della corrente traslatoria (irrotazionale e permanente) che ora investe il cilindro è

$$(1) \quad f(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{Coth} \frac{\pi \zeta}{a} \right).^{(2)}$$

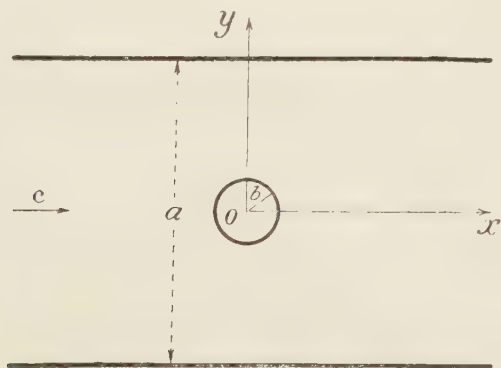


Fig. 1.

2. Premetto la determinazione del potenziale di un vortice equidistante da due pareti piane parallele indefinite. Si perviene al risultato nel modo più semplice considerando, in un piano ausiliario ζ , la corrente circolatoria $f_1(\zeta) = -iC/2\pi \cdot \log \zeta$ dentro al cerchio $|\zeta| \leq 1$, e rappresentando in

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1926.

(2) V. LAMB, *Hydrodynamics* (V ed., Cambridge, 1924), p. 68. È opportuno osservare che il potenziale (1), nei limiti d'approssimazione specificati, ai quali la sua validità

modo conforme il cerchio sulla striscia $-a/2 \leq y \leq a/2$ del piano ζ ; questo si fa ponendo $\zeta = \text{Th } \pi \zeta / 2a$ e ricordando che una rappresentazione conforme non altera la circolazione $C^{(1)}$; il potenziale richiesto è quindi il seguente:

$$(2) \quad f(\zeta) = -\frac{iC}{2\pi} \log \text{Th } \frac{\pi \zeta}{2a}^{(2)}.$$

Le linee di flusso sono ovali simmetrici rispetto agli assi i cui semidiametri, parallelo e normale alle sponde rispettivamente, sono espressi mediante il corrispondente valore della funzione di corrente ψ dalle relazioni

$$(3) \quad \alpha = \frac{2a}{\pi} \arctg e^{-\frac{2\pi\psi}{C}}, \quad \beta = \frac{2a}{\pi} \arctg e^{-\frac{2\pi\psi}{C}},$$

eliminando ψ tra le quali si ottiene

$$(4) \quad \text{Th } \frac{\pi\alpha}{2a} = \text{tg } \frac{\pi\beta}{2a}.$$

è subordinata, si identifica con quello di una corrente *indefinita* che investe lo stesso cilindro:

$$(\alpha) \quad f(\zeta) = c(\zeta + b^2/\zeta).$$

Si consideri infatti la funzione (uniforme nel campo del moto)

$$(\beta) \quad F(\zeta) = 1 + \frac{\pi b^2}{a\zeta} \coth \frac{\pi\zeta}{a} - \frac{b^2}{\zeta^2},$$

alla quale, ricordando lo sviluppo in serie della \coth , si può dare la forma

$$(\gamma) \quad F(\zeta) = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{15} \left(\frac{\pi\zeta}{a} \right)^2 + \dots \right\}.$$

In virtù della (γ) essa assume il valore 1 sul cerchio $|\zeta| = b$; lo stesso valore, in virtù della (β) , è assunto sulle rette $y = \pm a/2$ (ove

$$\left| \coth \frac{\pi\zeta}{a} \right| = \left| \coth \left(\frac{\pi x}{a} \pm i \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| \text{Th } \frac{\pi x}{a} \right| \leq 1, \quad |\zeta| \geq \frac{a}{2}$$

e all'infinito; per la sua regolarità nel campo del moto, è ovunque $F(\zeta) = 1$, nei prescritti limiti di approssimazione; si deduce

$$1 + \frac{\pi b^2}{a\zeta} \coth \frac{\pi\zeta}{a} = 1 + \frac{b^2}{\zeta^2},$$

eguaglianza che permette il passaggio dalla (1) alla (α) . Però la forma (1) è opportuna pei calcoli, e non giova sostituirla.

(1) V. CISOTTI, *Idromeccanica Piana* (Milano, Tamburini, 1921-22), p. 40; GRAMMEL, *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges* (Braunschweig, Vieweg, 1917), p. 51.

(2) La (2) ha significato fisico anche fuori della striscia considerata; essa rappresenta una serie di vortici nei punti $0, \pm ia, \pm 2ia, \dots$, di intensità eguali in valore assoluto e alternate di segno. Questa osservazione si utilizza per ottenere la (2) con metodo analogo a quello con cui il Lamb ottenne la (1); il potenziale dovuto ai due vortici $\pm ina$, di intensità $(-1)^n C$, essendo $(-1)^{n+1} iC/2\pi \cdot \log(1 + \zeta^2/n^2 a^2)$, sarà

$$f(\zeta) = -\frac{iC}{2\pi} \left\{ \log \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \left(1 + \frac{\zeta^2}{n^2 a^2} \right) \right\}$$

il potenziale totale, la cui riduzione alla forma (2) è assai facile.

3. Alla relazione (4), che si scrive anche

$$(5) \quad \frac{\pi \alpha}{2a} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \alpha}{2a} \right)^2 + \dots \right\} = \frac{\pi \beta}{2a} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \beta}{2a} \right)^2 + \dots \right\},$$

si soddisfa assegnando ad α e β uno stesso valore b , tale che il termine di secondo grado tra graffe ed i successivi sieno trascurabili di fronte all'unità; la circonferenza di raggio b è quindi linea di flusso relativa alla corrente circolatoria (2) con la stessa approssimazione con cui lo era per la corrente traslatoria (1).

Ne segue che la corrente traslocircolatoria

$$(6) \quad f(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{Coth} \frac{\pi \zeta}{a} \right) - \frac{iC}{2\pi} \log \operatorname{Th} \frac{\pi \zeta}{2a}$$

rispetta, nei limiti d'approssimazione precisati, la rigidità della circonferenza $|\zeta| = b$ e delle rette $y = \pm a'2$.

Dall'esame della velocità complessa

$$(7) \quad w(\zeta) = \frac{df}{d\zeta} = c \left(1 - \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \operatorname{Cosech}^2 \frac{\pi \zeta}{a} \right) - \frac{iC}{2a} \operatorname{Cosech} \frac{\pi \zeta}{a}$$

discende che il movimento è ovunque regolare e si comporta all'infinito nel modo prescritto.

La velocità si annulla nei punti ζ_0 definiti dalla relazione

$$(8) \quad \operatorname{Cosech} \frac{\pi \zeta_0}{a} = \frac{u}{\pi b} (-i\rho \pm \sqrt{1 - \rho^2}) \quad , \quad \text{ove } \rho = \frac{C}{4\pi b c};$$

dei quattro punti ζ_0 che questa fornisce, ognuno riproducentesi ad intervalli di $2ai$, interessano soltanto quelli non esterni al campo del moto che se $C > 0$ sono:

se $\rho \leq 1$:

$$(9) \quad \zeta_0 = b e^{i\sigma_0} \quad , \quad \zeta_0 = b e^{i(\pi - \sigma_0)} \quad , \quad \text{ove } \sigma_0 = \arcsin \rho^{(1)};$$

se $\rho > 1$:

$$(10) \quad \zeta_0 = i \frac{a}{\pi} \arcsin \frac{\pi b}{a} (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \quad , \quad \text{se } \frac{\pi b}{a} (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \leq 1;$$

(1) In questo caso la (8) si scinde nelle due seguenti:

$$\operatorname{Sh} \pi \zeta_0 / a = \pi b / a \cdot e^{i\sigma_0} \quad , \quad \operatorname{Sh} \pi \zeta_0 / a = \pi b / a \cdot e^{i(\pi - \sigma_0)},$$

che forniscono gli zeri

$$\zeta_0 = b e^{i\sigma_0} \quad , \quad - b e^{i\sigma_0} + ia \quad , \quad b e^{i(\pi - \sigma_0)} \quad , \quad - b e^{i(\pi - \sigma_0)} + ia;$$

solo il primo e il terzo sono nel campo del moto.

$$(11) \quad z_0 = i \frac{a}{2} \pm \frac{a}{\pi} \arg \operatorname{Ch} \frac{\pi b}{a} (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \quad , \quad \text{se } \frac{\pi b}{a} (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \geq 1^{(2)}.$$

I vari casi sono illustrati (qualitativamente) dalla fig. 2. Ovvie sono le modificazioni da farsi se $C < 0$.

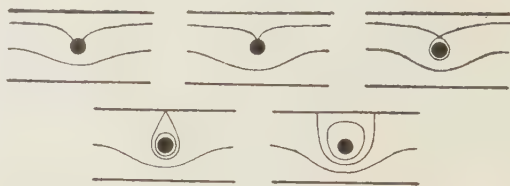


Fig. 2.

4. Quando χ è tale che del rapporto tra il suo modulo ed a sono trascurabili le potenze superiori alla prima, il potenziale (6) si identifica con quello della corrente di Kutta; poichè ciò avviene nelle vicinanze del cilindro si deduce che ivi è insensibile l'influenza delle pareti. Una conseguenza importante riguarda l'azione dinamica sul cilindro che è ancora data dal teorema di Kutta e Joukowsky.

L'azione dinamica su una parete è evidentemente normale ad essa ed applicata nel punto d'intersezione coll'asse y ; la sua componente lungo quest'asse, quando si ritorni al primitivo problema del cilindro mobile nel canale, è

$$(12) \quad R = \mp \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 - c^2) dx$$

(2) Se $\rho > 1$ la (8) si scinde nelle due seguenti:

$$(a) \quad \begin{cases} \operatorname{Cosech} \pi z_0/a = ia/\pi b \cdot (-\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}), \\ \operatorname{Cosech} \pi \bar{z}_0/a = -ia/\pi b \cdot (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}); \end{cases}$$

la relazione $\operatorname{Cosech} (\xi + i\eta) = i\alpha$, con ξ, η, α reali e $\alpha < 0$, esige che sia $\eta = \pi/2$ se $|\alpha| \leq 1$, oppure $\xi = 0$ se $|\alpha| \geq 1$; sicchè la prima delle (a) diviene

$$(b) \quad \begin{cases} \operatorname{Cosech} (\pi x_0/a + i\pi/2) = ia/\pi b \cdot (-\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}), & 0 \\ \operatorname{Cosech} i\pi y_0/a = ia/\pi b \cdot (-\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \end{cases}$$

a seconda che $|a/\pi b \cdot (-\rho + \sqrt{\rho^2 - 1})| \leq 1$; alla prima delle (b) corrispondono i due punti (11), alla seconda il punto (10) e un altro esterno al campo del moto. Alla seconda delle (a), cui si soddisfa ponendo

$$\operatorname{Cosech} i\pi y_0/a = -ia/\pi b \cdot (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1})$$

ossia

$$\operatorname{sen} \pi y_0/a = \pi b/a \cdot (\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}) < \pi b/a,$$

corrispondono due punti esterni al campo del moto. Nel caso particolare notevole $\pi b/a \cdot (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) = 1$ le (10) e (11) coincidono e danno $z_0 = ia/2$; corrisponde $\rho = a/2\pi b$ e $C = 2ac$.

dove μ è la densità del liquido, ed u la componente della velocità relativa secondo l'asse x , cioè

$$(13) \quad u = c \mp \frac{C}{2a} \operatorname{Sech} \frac{\pi x}{a}$$

valendo il segno — per la parete sinistra, il segno + per l'altra; risulta

$$(14) \quad R = \frac{1}{2} \mu c C \mp \frac{\mu C^2}{4 \pi a} \quad (1)$$

Geodesia. — *Determinazione astronomica di latitudine compiuta a Mondovì nel 1925.* Nota di U. BARBIERI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. GINO LORIA.

Il vertice trigonometrico di 1° ordine di Mondovì, è costituito dall'asse della Torre del Belvedere, sita sul piazzale omonimo, e dominante, da Mondovì Piazza, la pianura circostante.

Fin dal 1762 il P. Beccaria ⁽³⁾, nella misura da lui fatta, del grado piemontese, ebbe a compiere una determinazione della latitudine astronomica di Mondovì, facendo stazione in un punto prossimo alla Torre del Belvedere; quella determinazione fu poi, nel 1822, ridotta all'asse della Torre, da Plana e Carlini, nell'occasione della osservazione della latitudine della stessa Torre, per opera dei due astronomi citati ⁽⁴⁾.

È notorio come le determinazioni del Beccaria posero in luce la fortissima variazione dell'attrazione locale, fra Mondovì e Andrate.

Nel giugno 1925, in continuazione di un programma di lavoro iniziato da tempo, furono da me compiute in Mondovì osservazioni di latitudine e di azimut; la succinta esposizione delle prime forma oggetto della presente Nota.

Non essendo possibile disporre lo strumento sul ripiano superiore della Torre, perchè pericolante, scegliemmo una stazione ex-centro, i cui elementi di riduzione, determinati in doppio modo, con l'aiuto di due basi tracciate sul piazzale del Belvedere, risultarono i seguenti

$$e = 37^m.959 \quad , \quad \varepsilon = 127^o.41'17''$$

(1) In particolare, per $c = 0$, la (14) esprime che l'azione dinamica di un vortice equidistante da due pareti piane parallele indefinite, su ciascuna, è attrattiva e vale

$$R = \frac{\mu C^2}{4 \pi a}.$$

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1926.

(3) P. BECCARIA, *Gradus Taurinensis. Augustae Taurinorum*, 1774.

(4) PLANA e CARLINI, *Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen exécutées en Piémont et en Savoie. etc. . . en 1821, 1822, 1823*, Tome I^{er} (Milan, 1825), Tome II^{ond} (Milan, 1827).

essendo ϵ l'angolo formato, con la visuale diretta al centro trigonometrico, dalla direzione al punto di 1° ordine Eremo di Cherasco.

A differenza delle altre stazioni da me precedentemente compiute in Liguria, le determinazioni a Mondovì furono eseguite con materiale tutto dell'Istituto di Geodesia dell'Università di Genova, essendo, nel frattempo, venuto a far parte del corredo strumentale del detto Istituto, un eccellente Universale Bamberg a cannocchiale spezzato di 540 mm. di lunghezza focale, 63 mm. di apertura d'obbiettivo, e con i cerchi del diametro di cm. 27.

La R. Commissione geodetica italiana mi fu larga di aiuto finanziario, e però mi corre il dovere di esternare qui ad essa la mia gratitudine.

Le osservazioni, iniziate alla fine del giugno 1925, furono molestate dalle cattive condizioni atmosferiche, spesso il tempo essendo piovoso e burrascoso.

Le determinazioni di latitudine occuparono le sere del 21, 23, 25 giugno e del 3 luglio.

Il metodo adoperato fu quello solito dei passaggi in meridiano di 40 stelle fondamentali, le cui posizioni apparenti furono tolte dal B. A. J. e divise in cinque gruppi di otto stelle ciascuno. In ogni gruppo le stelle vennero osservate in successione alterna, ad est e ad ovest del meridiano, quattro culminanti a sud e quattro a nord dello zenit: le distanze zenitali furono mantenute al disotto di 30°, e piccola si contenne la somma delle distanze zenitali per ogni gruppo, ottenendo per detta somma i valori seguenti:

$$\begin{array}{ll} \text{Gruppo I, } \Sigma z = + 2^{\circ} 16' & \text{Gruppo III, } \Sigma z = - 2^{\circ} 49' \\ \text{» II, » } = + 6^{\circ} 58' & \text{» IV, » } = - 1^{\circ} 16' \\ \text{Gruppo V, } \Sigma z = - 3^{\circ} 20'. \end{array}$$

I risultati complessivi delle osservazioni fatte vengono riportati nello specchio seguente; i piccoli numeri in parentesi indicano le stelle osservate, che hanno concorso alla formazione del valore scritto.

Gruppo	21 giugno	23 giugno	25 giugno	3 luglio	Medie	Numero delle osservazioni
1°	—	44° 23' 44".9(6)	—	—	44° 23' 44".90	6
2°	44° 23' 43".6(8)	42 .7(8)	44° 23' 44".5(6)	44° 23' 45".5(8)	44 .04	30
3°	42 .2(8)	45 .6(6)	41 .1(8)	44 .4(8)	43 .17	30
4°	44 .0(8)	44 .3(8)	40 .8(8)	43 .0(8)	43 .03	32
5°	40 .2(8)	43 .0(8)	44 .2(8)	43 .5(8)	42 .73	32
Media	42 .5	44 .1	42 .7	44 .1	43 .31	130

La media dei valori elencati nella penultima colonna, quando ad essi si diano i pesi rappresentati dai numeri segnati nell'ultima, dà come valore compensato

$$\varphi = 44^{\circ} 23' 43'' . 31 .$$

Il trasporto al centro trigonometrico di questo valore, sarà da ottenere con la formola

$$\Delta \varphi'' = - \frac{\rho \cos \alpha}{R \operatorname{arc} 1''}$$

essendo α l'angolo di direzione (CS) della stazione S nel centro C, che si dedusse con misure locali, ed appoggiandosi a Vicoforte, punto trigonometrico ausiliario circostante, il cui angolo di direzione risultava noto dai dati forniti dall'Istituto Geografico Militare.

Si ebbe così

$$\alpha = 47^{\circ} 19' 10'' \quad \text{e quindi} \quad \Delta \varphi = - 0'' . 83 .$$

Si trova in tal modo per la latitudine di Mondovì (Torre del Belvedere) il risultato finale

$$\varphi = 44^{\circ} 23' 42'' . 48 \quad m = \pm 0'' . 29$$

(Epoca 1925, 5).

Per quanto concerne le determinazioni eseguite in precedenza da altri operatori, si ha quanto segue:

Secondo le osservazioni di Plana e Carlini (1821) risultò

$$\text{latitudine del Belvedere} \quad 44^{\circ} 23' 45'' . 38 .$$

Secondo le osservazioni compiute e calcolate dal P. Beccaria, e riportate nel *Gradus Taurinensis* si ha

$$\text{latitudine del settore zenitale} \quad 44^{\circ} 23' 33'' . 6 .$$

Applicando a questo valore la riduzione al centro trigonometrico + 1'' . 01 determinata da Plana e Carlini ne segue, secondo il Beccaria, quale

$$\text{latitudine del Belvedere} \quad 44^{\circ} 23' 34'' . 6 .$$

Le determinazioni compiute dal P. Beccaria, furono, com'è noto, nuovamente calcolate con maggior esattezza nel 1809, dal barone de Zach, che pubblicò poi i risultati in una Memoria inserita nel tomo 1811-1812 dell'Accademia di Torino.

Secondo lo Zach risultò

$$\text{latitudine del settore zenitale} \quad 44^{\circ} 23' 38'' . 0$$

onde ne consegue secondo l'osservazione del Beccaria e il calcolo dello Zach

$$\text{latitudine del Belvedere} \quad 44^{\circ} 23' 39'' . 0 .$$

Ritorniamo più tardi su questi valori, allorchè esporremo i risultati relativi alla stazione di Andrate compiuta nell'estate testè trascorsa.

Fisica. — *Cicli di isteresi elastica in fili di bismuto* ⁽¹⁾. Nota di BIANCA NANNEI, presentata ⁽²⁾ dal Socio CORBINO.

Con la presente Nota rendo conto di alcuni studi che possono considerarsi un complemento di quelli cui si riferisce la mia Nota del marzo u. s.

Come notai allora, ammesso che il comportamento elastico di un filo di bismuto alla torsione abbia il carattere nettamente ereditario, quale risulta evidente da quelle prime esperienze, era senza dubbio preferibile poter disporre, per eventuali ulteriori considerazioni teoriche, di cicli nei quali i momenti torcenti fossero stati variati in *modo continuo* e non, come d'ordinario, per sbalzi successivi.

E appunto a descrivere il metodo usato per ottenere tali cicli ed a riferirne le principali caratteristiche è dedicata la prima parte di questa Nota. Nella seconda parte invece deduco le conclusioni che possono trarsi da quelle esperienze, premettendo poche considerazioni teoriche atte a dimostrare la legittimità di tali deduzioni da esperienze del tipo delle mie.

PARTE PRIMA.

§ 1. *Criterio generale e disposizione dell'esperienza.* — Come nella Nota precedente il criterio fondamentale è stato ancora quello di applicare al filo di bismuto i voluti momenti torcenti per mezzo di un'azione elettrodinamica. E perciò feci uso dello stesso elettrodinometro Siemens (tipo antico) convenientemente adattato.

Però, volendo ora applicare momenti variabili periodicamente e in modo continuo, non potevo facilmente determinare, come precedentemente, la torsione totale del filo dallo spostamento angolare tra le due posizioni occupate dalla spira mobile, quella assunta per il passaggio della corrente e la posizione normale a cui veniva ricondotta mediante uno spostamento micrometrico del supporto di sospensione. Lasciai perciò costantemente fisso il supporto superiore e lessi semplicemente le deviazioni angolari della spira, tanto più che, data la forma opportuna di essa e la piccolezza delle deviazioni stesse, avevo potuto riscontrare (per mezzo di qualche prova statica comparativa, eseguita con una sospensione normale di filo di acciaio perfettamente elastico) che non si aveva alcuna sensibile differenza fra le determinazioni eseguite nei due modi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Genova.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1926.

La disposizione complessiva fu quindi la seguente.

Una corrente di circa 10 Amp. fornita da una batteria di accumulatori B, controllata con l'amperometro A e tenuta costante per mezzo del reostato R_1 , passava nella spirale fissa s_1 dell'elettrodinometro e nella parte fissa di un semplice dispositivo, il quale fu costruito con lo scopo di poter derivare da esso delle piccole correnti (di pochi milliampère) variabili *periodicamente e linearmente* tra due valori uguali ed opposti.

Tale dispositivo consisteva in un conduttore circolare, di grosso filo di packfong, del diametro di circa un metro, accuratamente saldato ad argento, e disteso sul bordo di un anello di legno. La corrente principale suddetta entrava ed usciva da codesto conduttore per mezzo dei due contatti interni c_1 e c_2 diametralmente opposti. Il filo fu accuratamente calibrato e

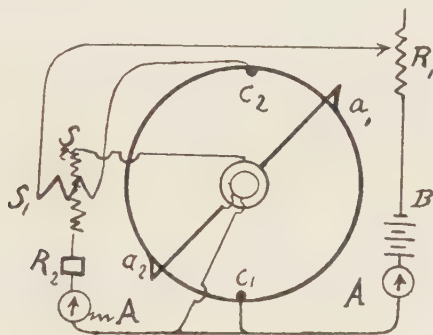


Fig. 1.

furono prese tutte le precauzioni opportune per far sì che la caduta di potenziale da c_1 a c_2 fosse la più simmetrica e regolare possibile.

Sull'asse del conduttore circolare erano fissati: 1° una ruota a denti elicoidali che ingranava in una vite senza fine, la quale, quando era messa in movimento, mediante una puleggia a tre gole, ad essa solidale, e collegata alla puleggia di un movimento di orologeria, poneva in moto la ruota dentata e l'asse; 2° un'asta di legno, normale all'asse stesso, di lunghezza poco maggiore del diametro del conduttore circolare e portante alle sue estremità due spazzole, striscianti su di esso e regolabili in modo da far contatto in punti esattamente diametrali; 3° due piccoli collettori ad anello isolati tra di loro e comunicanti rispettivamente con le spazzole.

Per mezzo di due contatti striscianti sui collettori, potevo così derivare una corrente che evidentemente variava linearmente con la rotazione uniforme dell'asta diametrale, passando per i suoi valori massimi quando le spazzole erano nei punti c_1 e c_2 e per il valore zero nelle due posizioni intermedie. Tale corrente, di pochi milliampère, regolata per mezzo del reostato R_2 e misurata dal milliamperometro mA, passava infine per la spira mobile s_2 costituita da 25 giri di sottile filo di rame.

È evidente che, dato il valore elevato della corrente principale e la piccolezza di quella derivata, potevo ritenere che il valore della prima non fosse affatto alterato dalla derivazione variabile, e quindi rimanesse costante; perciò il momento torcente doveva essere sempre proporzionale al valore istantaneo della corrente derivata, che, come ho detto, avrebbe a sua volta dovuto variare linearmente.

§ 2. *Svolgimento delle esperienze e risultati.* — È ormai evidente come abbia eseguite le esperienze. Posta l'asta, che porta le spazzole, in una delle posizioni in cui l'intensità della corrente derivata deve passare per il valore zero, chiudevo e regolavo i circuiti e quindi ponevo in marcia il movimento di orologeria con la velocità desiderata.

La spira mobile dell'elettrodinamometro che si trovava fissa in posizione di equilibrio, cominciava a deviare in un senso. Leggevo allora, col solito metodo a riflessione, le deviazioni corrispondenti a successive ed equidistanti posizioni dell'asta, nella sua rotazione, facendo particolare attenzione in vicinanza dei massimi (spazzole presso c_1 e c_2).

Le durate dei cicli, corrispondenti ad un giro completo dell'asta diametrale, furono variate da 6 a 60 minuti primi circa.

Per assicurarmi del regolare funzionamento di tutto il dispositivo, sperimentai dapprima su un filo di acciaio di ottima qualità del diametro di mm. 0.25 e della solita lunghezza di cm. 30; poscia su un filo di ferro dolce.

I risultati ottenuti furono quali ci si doveva logicamente attendere:

a) *per il filo d'acciaio.* — La curva tracciata, a partire da una stabile posizione d'equilibrio, ottenuta in seguito ad un lungo riposo della sospensione, dopo non più di due intere successioni dei momenti torcenti applicati, si svolgeva esattamente in un ciclo, la cui *ampiezza nel senso verticale* (vedere la Nota precedente a pag. 314) risultò dipendere dalla durata del ciclo stesso. E più precisamente tale ampiezza *decresce al crescere della durata del ciclo*, tendendo evidentemente a sparire ed a far degenerare il ciclo in una linea, per un durata infinita. (Ciò è in contrasto con quanto avevo osservato per i cicli dei fili di bismuto tracciati per punti, dei quali trovansi i grafici nella Nota suaccennata). Per dare un'idea quantitativa del fenomeno, nel grafico che segue, ho rappresentati tre cicli delle durate rispettivamente di minuti 6, 18 e 55 e percorsi ciascuno nei due sensi. Da essi risulta pure evidente la loro quasi perfetta simmetria rispetto al punto di equilibrio O; fatto cotesto che è pure in contrasto col comportamento del filo di bismuto;

b) *per il filo di ferro dolce.* — L'andamento qualitativo delle curve risultò analogo al precedente, ma la variazione relativa dell'ampiezza sensibilmente minore. Inoltre si presentò un chiaro inizio di dissimetria rispetto al punto O in dipendenza dal senso. Qui è bene notare però che, mentre

col filo di acciaio precedente non riscontrai mai deformazioni permanenti, col filo di ferro dolce tali deformazioni erano evidenti anche in seguito a deviazioni di solo pochi gradi.

Sostituito in fine il *filo di bismuto*, eseguii nello stesso modo numerosi cicli, che risulta opportuno distinguere in due categorie. Chiamerò cicli *normali* quelli che furono ottenuti dopo avere impresso al filo successivi momenti torcenti di senso contrario e di valore assoluto decrescenti e *dopo un lungo periodo di riposo*; cicli *anormali* invece quelli ottenuti *immediatamente dopo* cotesta applicazione di momenti torcenti contrari e decrescenti. Mentre i primi risultarono analoghi a quelli già ottenuti per punti e trac-

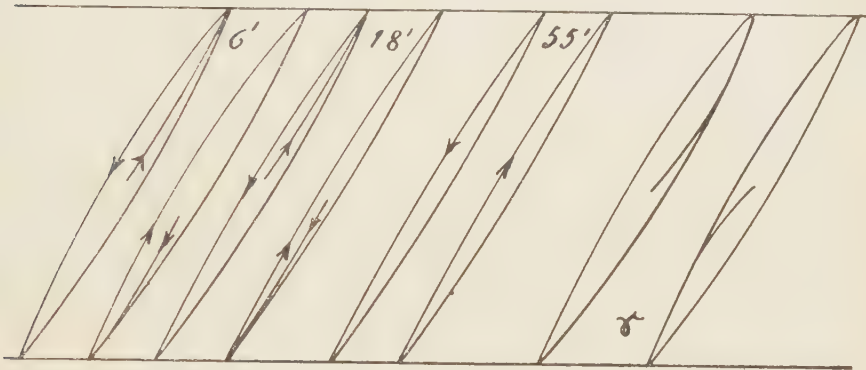


Fig. 2.

ciati nella Nota precedente, i secondi presentarono sempre la caratteristica che il primo tratto della curva partente dal punto O, andava a confondersi col ciclo stazionario definitivo più rapidamente, cioè quasi sempre prima di aver raggiunto un massimo, e ciò tanto per i cicli descritti in un senso, quanto per quelli in senso contrario. Per dare un'idea esatta qualitativa di questo fatto ho tracciati due di questi cicli γ nella parte a destra del grafico precedente.

PARTE SECONDA.

§ 3. *Breve digressione sull'effettivo significato dei cicli precedenti.* — Com'è noto, anche se limitate a piccole ampiezze, le oscillazioni di torsione di un sistema sospeso ad un filo metallico e sottoposto a momenti torcenti periodici dipendono, oltre che da questi momenti applicati, dai momenti resistenti che si sviluppano nel filo e dalle proprietà del sistema stesso; in particolare dal suo momento di inerzia e dalle resistenze passive che esso incontra nel movimento.

Ed è per ciò che è talvolta difficilissimo dedurre, in modo attendibile, dall'osservazione delle oscillazioni, l'andamento dei momenti torcenti applicati, oppure di quelli resistenti del filo.

Nel mio caso specifico non è affatto evidente, *a priori*, che debba sussistere in ogni istante un perfetto equilibrio fra il momento torcente applicato alla spirale mobile e quello opposto dal filo, perchè ciò si verifica solo quando sia costantemente nulla l'influenza dell'inerzia e della resistenza al moto della spirale stessa. E siccome solo in questo caso si può ritenere che la formazione di un vero ciclo (anzichè di una semplice linea) sia esclusivamente dovuta al comportamento elastico del filo, non si potrà *in generale* escludere *a priori* che a tale formazione non abbiano più o meno contribuito l'inerzia e la resistenza del sistema oscillante; anzi, a tutto rigore non possiamo neppure escludere che esse non vi abbiano prevalentemente contribuito.

Ma poche considerazioni teoriche mostreranno che nel mio caso l'influenza dell'inerzia e della resistenza della spirale mobile non possono aver portato alcun sensibile contributo alla formazione del ciclo osservato e che quindi essa deve attribuirsi veramente al comportamento elastico del filo.

Supponiamo infatti per un momento, che il filo si comporti per le piccole oscillazioni, come perfettamente elastico; il momento resistente sarà allora proporzionale all'angolo di deviazione φ , ossia $a^2 \varphi$.

L'equazione differenziale delle oscillazioni libere sarà allora:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + K \frac{d\varphi}{dt} + a^2 \varphi = 0$$

indicando

con J il momento d'inerzia e con K la costante di smorzamento. Quando il valore di K è sufficientemente piccolo la funzione φ risulterà *quasi-periodica* smorzata, col *quasi-periodo*

$$T_0^* = 2\pi \left\{ \frac{a^2}{J} - \frac{K^2}{4J^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

condizione che appunto si verifica per il sistema considerato che, se *libero*, oscilla col *quasi-periodo* di circa 3,5 sec.

Inoltre, per l'elevato valore del momento d'inerzia J e la piccolezza dello smorzamento K , il valore di T_0^* sarà assai prossimo a quello corrispondente alle oscillazioni libere non smorzate

$$T_0 = \frac{2\pi}{a} \sqrt{J}.$$

Ma, come si è detto, sulla spirale agisce il momento periodico $f(t)$ di periodo T , che varia linearmente fra i massimi $\pm A$.

Per tenerne conto sviluppo $f(t)$ in serie di seni, col metodo di Fourier, si avrà:

$$f(t) = A \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{3^2} \sin \frac{3 \cdot 2\pi}{T} t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5 \cdot 2\pi}{T} t + \dots \right).$$

Osserviamo ora che l'ampiezza della prima armonica, eguale a circa $8/10$ dell'ampiezza della funzione periodica, è pure 9 volte maggiore dell'ampiezza dell'armonica successiva. Ne segue che, almeno per quanto riguarda gli ordini di grandezza, non si avranno errori sensibili limitandosi ad assumere per $f(t)$ il valore $C \sin \frac{2\pi}{T} t$. L'equazione differenziale delle oscillazioni diviene allora:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + K \frac{d\varphi}{dt} + J^2 \varphi = C \sin \frac{2\pi}{T} t$$

della quale è noto l'integrale:

$$\varphi = \frac{C}{J \left(\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^2} \right)^2 + \frac{K^2}{J^2 T^2} \right)^{1/2}} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \psi \right) = C' \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \psi \right)$$

con

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{K}{JT} \frac{1}{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}.$$

Da questa espressione risulta che, facendo astrazione dal fattore costante C' , le costanti della spirale J e K possono influire sull'andamento periodico delle oscillazioni e quindi sulla forma dei cicli solamente attraverso allo sfasamento ψ . Ma trasformando ovviamente l'espressione di $\operatorname{tg} \psi$ e tenendo conto che T_0 (pochi secondi) è trascurabile dinanzi a T (parecchi minuti) si può concludere:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{K}{JT} \frac{T_0^2 T^2}{T^2 - T_0^2} = \frac{KT_0^2}{JT} = \text{quantità piccolissima}$$

e quindi praticamente $\psi = 0$.

L'esistenza dei cicli è quindi senza dubbio dovuta al comportamento elastico del filo.

§ 4. CONCLUSIONI. — Potendo attribuire le caratteristiche dei cicli al comportamento elastico dei fili, le conclusioni sono immediate :

a) *filo d'acciaio*. — Il prodursi dei cicli è evidentemente dovuto ad un effetto di *elasticità ereditaria*. La perfetta simmetria rispetto all'origine O, dimostra che si è dissipato rapidamente ed in modo completo l'effetto del periodo iniziale, che cioè si verifica il fenomeno della *dissipazione dell'azione ereditaria*. Il rapido assottigliarsi dei cicli col crescere della loro durata conferma questa conclusione ;

b) *filo di ferro*. — I cicli sono ancora prevalentemente dovuti ad un effetto di elasticità ereditaria. La loro quasi-simmetria rispetto all'origine ne conferma il carattere dissipativo. Ma la non perfetta simmetria d'altra parte induce a ritenere che, anche per quelle piccole deformazioni, il primo ramo del ciclo abbia lasciato una traccia permanente. Se essa sia di natura ereditaria oppure no, le poche esperienze eseguite e sopra tutto l'eseguità della dissimmetria, non consentono di decidere ;

c) *filo di bismuto*. — Si confermano completamente le conclusioni della Nota precedente.

È evidente che siamo di fronte ad un fenomeno di *deformazione permanente* (non dissipantesi col tempo) ma di natura *nettamente ereditaria*. Ciò risulta non solo dall'inversione della dissimmetria rispetto all'origine con la inversione del senso dei cicli, ma anche e meglio, dall'ampliarsi dei cicli al crescere della loro durata.

Questo fatto che è in contrasto, non solo con quanto si osserva per cicli dovuti ad *effetti ereditari dissipantisi col tempo*, quali sono quelli or ora riscontrati per il filo d'acciaio, ma anche con quanto da tempo si era osservato per cicli dovuti ad *effetti permanenti non ereditari*, del tipo di quelli dell'isteresi magnetica (per i quali l'ampiezza dei cicli è indipendente dalla durata), pone in chiarissima luce i vari possibili comportamenti dell'azione ereditaria.

Esso, previsto teoricamente dal prof. Straneo⁽¹⁾, non era mai prima d'ora stato confermato sperimentalmente.

Fisica. — *Sopra l'esistenza dell'elemento a numero atomico « 61 ».*
Nota di RITA BRUNETTI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

AVVERTENZA: Anche questa Nota era racchiusa nel plico del 21 giugno 1924, di cui parla l'avvertenza alla Nota precedente dei sig.ri L. ROLLA e L. FERNANDES (p. 342).

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) P. STRANEO, *Basi fisiche per una estensione della teoria dei fenomeni ereditari*, questi « Rendiconti », vol. III, serie 6^a, 1^o sem., p. 316.

Fisica. — *Sulla identificazione dell'elemento a numero atomico «61».* Nota di RITA BRUNETTI presentata dal Socio G. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Esperienze di controllo di un nuovo metodo interferometrico per la misura di oggetti microscopici od ultra microscopici per mezzo di reticoli di diffrazione.* Nota di G. DE MOTTONI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Campi elettromagnetici aventi nullo sul contorno il campo elettrico (magnetico) e tangenziale sul contorno stesso il campo magnetico (elettrico).* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata⁽¹⁾ dal Socio A. DI LEGGE.

Le considerazioni da me svolte in una Nota dei « Comptes Rendus » (1° semestre 1924) sulla distribuzione del campo elettromagnetico (regolare) in un corpo, isotropo ed omogeneo, in quiete, ed altre che troveranno posto nella presente Nota, permettono di stabilire, in uno spazio a contorno sferico invariabile, la esistenza, con relativa costruzione, di *campi elettromagnetici aventi il campo elettrico (od invece il magnetico) costantemente nullo sul contorno ed in pari tempo il campo magnetico (elettrico) tangenziale sul contorno stesso.*

Come si vede, le circostanze al contorno sono diverse nel loro insieme da quelle che intervengono nel « Randwertaufgabe der Hohlraumstrahlung » [problema che venne trattato principalmente da autori tedeschi in base a metodi dell'Analisi moderna⁽²⁾].

*
* *

Si denotino [nel sistema gaussiano di unità di misura⁽³⁾], con ϵ , λ , μ rispettivamente, la costante dielettrica, la conducibilità elettrica (specifica) e la permeabilità magnetica. Poi si consideri l'equazione

$$(I) \quad \epsilon\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4 \pi\lambda\mu \frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \Delta_2 U$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1926.

(2) Vedasi H. WEYL, *Ueber die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze*, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 143 (1913). Cfr. anche R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik* (Erster Band 1924), p. 358.

(3) Vedasi, ad esempio, M. PLANCK, *Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus*.

(equazione vettoriale in \mathbf{U}), designando c la velocità di propagazione della luce nel vuoto ⁽¹⁾. Insieme con la predetta equazione si consideri la seguente (scalare):

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0.$$

Si chiami con φ una soluzione regolare della equazione scalare

$$(3) \quad \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c^2 \Delta_2 \varphi$$

e con $P - A$ il vettore individuato dal segmento orientato che unisce un prefissato punto A col generico punto P , nel senso da A verso P ; si ponga inoltre

$$(4) \quad \mathbf{E} = (A - P) \wedge \operatorname{grad} \varphi$$

(cioè si denoti con \mathbf{E} il prodotto vettoriale di $A - P$ per il gradiente della φ), intendendo che la φ non sia della (3) soluzione dipendente *soltanto* dalla grandezza del raggio vettore uscente da A e dal tempo.

Il vettore (4) risulta intanto soluzione della (1) e della (2). Invero:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\operatorname{grad} \varphi) \times \operatorname{rot} (A - P) + (P - A) \times \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0;$$

inoltre, dall'essere

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = (A - P) \Delta_2 \varphi + \operatorname{grad} \{ \varphi + (P - A) \times \operatorname{grad} \varphi \},$$

segue

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = (P - A) \wedge \operatorname{grad} \Delta_2 \varphi;$$

quindi

$$\Delta_2 \mathbf{E} = (A - P) \wedge \operatorname{grad} \Delta_2 \varphi;$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= (A - P) \wedge \operatorname{grad} \left(\epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \\ &= (A - P) \wedge \operatorname{grad} (c^2 \Delta_2 \varphi); \end{aligned}$$

pertanto

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \Delta_2 \mathbf{E}.$$

Com'è chiaro, poi, \mathbf{E} , cioè il vettore (4), stante l'ipotesi che la φ non sia della (3) soluzione dipendente soltanto dalla grandezza del raggio vettore e dal tempo, non può risultare identicamente nullo.

(1) Naturalmente la scrittura $\Delta_2 \mathbf{U}$ ha per noi lo stesso significato della notazione $\Delta'_2 \mathbf{U}$ da BURALI-FORTI e MARCOLONGO usata negli *Elementi di Calcolo vettoriale* (seconda edizione) come pure della $\Delta' \mathbf{U}$ che figura nell'*Analyse vectorielle générale* dei medesimi autori. Altri autori, ad esempio il Planck nella citata sua opera, usano, in corrispondenza, la scrittura $\Delta \mathbf{U}$.

Ciò premesso, si supponga che lo spazio, in cui vengono considerate le nostre quantità, sia quello limitato da una sfera invariabile, la quale abbia il centro nel punto A (sfera che denoteremo con σ). Interpretando il costruito vettore \mathbf{E} come forza elettrica di un campo elettromagnetico racchiuso da σ — il che è sempre lecito anche astraendo dalla circostanza di essere σ sferico⁽¹⁾ — la forza magnetica \mathbf{H} risulta come vettore che, nello spazio s limitato da σ , ha

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c} \mathbf{E},$$

e, sulla superficie σ , ha

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \gamma_0 - \frac{c}{\mu} \int_0^t (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}) dt,$$

dove \mathbf{n} rappresenta il solito vettore unitario orientato come la normale alla predetta superficie e γ_0 denota l'arbitraria determinazione iniziale di $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ sul contorno medesimo. Ora s'intenda che φ sia della (3) soluzione nulla sopra σ . Con ciò, in corrispondenza alla σ , il grad φ risulta normale alla superficie in discorso; d'altra parte, cotesta superficie essendo sferica, avremo ivi $(A - P) \wedge \operatorname{grad} \varphi = 0$, cioè $\mathbf{E} = 0$ sul contorno. Ne segue poi (stante cotesto annullamento) $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ sopra σ ; per cui, assumendo $\gamma_0 = 0$, avremo inoltre $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ sul contorno stesso.

Se invece (col medesimo significato per la φ) si fosse posto

$$\mathbf{K} = (A - P) \wedge \operatorname{grad} \varphi,$$

interpretando \mathbf{K} come forza magnetica di un campo elettromagnetico racchiuso dalla sfera σ , poi si fosse introdotto il vettore \mathbf{F} definito mediante

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 & , & \operatorname{rot} \mathbf{F} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} & \text{(entro } s) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{F} = 0 & & & \text{(sopra } \sigma), \end{cases}$$

avremmo ottenuto un campo elettromagnetico avente nullo sopra σ il campo magnetico e tangenziale sul contorno stesso il campo elettrico.

*
* *

Nei riguardi della funzione φ , considerando dapprima il caso $\lambda = 0$ (conducibilità nulla) e ponendo (col significato dei simboli che risulta tosto manifesto)

(1) Cfr. la citata mia Nota dei « Comptes Rendus », pp. 760-61; senza omettere di osservare, intanto, che per il nostro caso (avendosi ora $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$) va posto $\alpha_0 = 0$, dove α_0 rappresenta la determinazione iniziale della $\operatorname{div} \mathbf{E}$.

φ = alla parte reale, oppure al coefficiente dell'immaginario, di $\psi e^{i\varphi}$, con ψ indipendente dal tempo e con $v = c \sqrt{\frac{-b}{\epsilon \mu}}$, avremo

$$h\psi + \Delta_2 \psi = 0,$$

cioè la ben nota equazione della teoria generale delle vibrazioni stazionarie⁽¹⁾, nella quale h designa il parametro.

Nel caso poi di λ diversa da zero, ponendo invece

$$v = \frac{2\pi\lambda}{\epsilon} (1 + \sqrt{1 - k})$$

ed assumendo (con χ indipendente dal tempo)

$$\varphi = \chi e^{-i\varphi},$$

naturalmente alla parte reale, oppure al coefficiente dell'immaginario (coefficiente non nullo per $k > 1$), avremo:

$$\frac{4\pi^2 k \mu \lambda^2}{\epsilon c^2} \chi + \Delta_2 \chi = 0,$$

in cui $\frac{4\pi^2 k \mu \lambda^2}{\epsilon c^2}$ denota il parametro.

Ottica cristallografica. — *Encore sur le dédoublement apparent de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow*⁽²⁾. Nota⁽³⁾ della Sig.^{na} M. PHILIBERT, presentata⁽⁴⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

IV. — Pour étudier la biréfringence des segments, j'ai enlevé la préparation et je l'ai remplacée, entre les segments, par une lame de même épaisseur qu'elle, percée d'un trou circulaire, laissant libre le champ du microscope. J'ai rempli de glycérine la cavité, pour en éliminer l'air.

Dans ces conditions, tous les axes de l'appareil étant à leur zéro, j'ai constaté (en utilisant le double coin de Wright) qu'une rotation de la platine, autour de l'axe A₁ donne quatre positions d'extinction à 90° les unes des autres; ces positions sont:

pour $n_s = 1.516$	$\alpha_1 = 40^\circ$	130°	220°	et	310°
pour $n_s = 1.649$	$\alpha_1 = 20^\circ$	110°	200°	et	290°

(1) Vedansi: F. POCKELS, *Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in mathematischen Physik*; R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*; RIEMANN-WEBER, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, herausgegeben von Dr. Richard v. Mises.

(2) Lavoro eseguito nel laboratorio chimico-petrografico del R. Ufficio Geologico.

(3) Cfr. la Nota precedente nei «Rend. Accademia Lincei», IV (1926) 2° sem., p. 300.

(4) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1926.

Le plan (130° - 310°) pour les segments d'indice $n_s = 1.516$ (ou (20° - 200°) pour ceux d'indice $n_s = 1.649$) étant placé à 45° des nicols, on constate dans ce plan, par une rotation appropriée autour de l'axe A_4 la présence de deux axes optiques, sensiblement symétriques par rapport à la perpendiculaire à la platine.

Chaque couple de deux segments se comporte donc comme une substance biréfringente biaxe dont l'axe $\beta = n_m$ est situé dans le plan de la platine, perpendiculairement au plan (130° - 310°) si $n_s = 1.516$ ou au plan (20° - 200°) si $n_s = 1.649$.

L'étude des caractéristiques de l'indicatrice optique montre qu'elle est positive, avec un angle des axes optiques autour de $\gamma = n_g$ d'environ 63° dans un cas, 57° dans l'autre.

Dans chaque cas j'ai mesuré la biréfringence dans les plans $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$. Les résultats obtenus sont rapportés dans les tableaux suivants.

$n_s = 1.516$			$n_s = 1.649$		
T	Γ $\alpha\gamma$ (130° - 310°) (1)	Γ $\beta\gamma$ (40° - 220°) (2)	T	Γ $\alpha\gamma$ (200° - 20°) (3)	Γ $\beta\gamma$ (290° - 110°) (4)
305°	18.8	30.9	312°	38.4	50.4
310°	12.4	27.5	315°	31.8	48.0
327°	AO'	—	320°	22.0	—
330°	—	16.1	325°	11.2	37.3
0°	9.7	10.5	332°	AO'	—
30°	—	16.4	340°	—	23.3
35°	AO''	—	345°	11.9	—
50°	12.2	31.6	0°	18.5	19.8
60°	21.7	40.3	15°	13.9	—
—	—	—	20°	—	27.3
—	—	—	29°	AO'	—
—	—	—	30°	—	35.1
—	—	—	40°	14.6	42.8
—	—	—	45°	24.4	47.2
—	—	—	50°	34.7	51.5

Les résultats renfermés dans les colonnes 1, 2, 3, 4, ont permis de construire respectivement les courbes S_1 , S_2 , S'_1 , S'_2 de la fig. 1 de cette Note. (Les courbes ne sont pas parfaitement symétriques par rapport à OZ. Le plan $\alpha\beta$ n'est donc pas absolument confondu avec le plan de la platine;

mais, l'identification de ces deux plans est tout à fait admissible étant donné le degré d'approximation qui est dans notre but : but qui est particulièrement minéralogique et pétrographique et non pas physique, et aussi, étant donnée la petitesse des biréfringences que nous mesurons).

V. — Pour m'assurer que la biréfringence mesurée est bien due aux segments eux mêmes, j'ai enlevé le disque circulaire, en verre, de la platine; je l'ai remplacé par une plaque de verre de même épaisseur que lui, mais munie d'un trou circulaire central qui laisse libre le champ du microscope. Dans ces conditions, les segments sphériques absolument seuls, donnent les mêmes résultats qu'en présence du disque de la platine: par

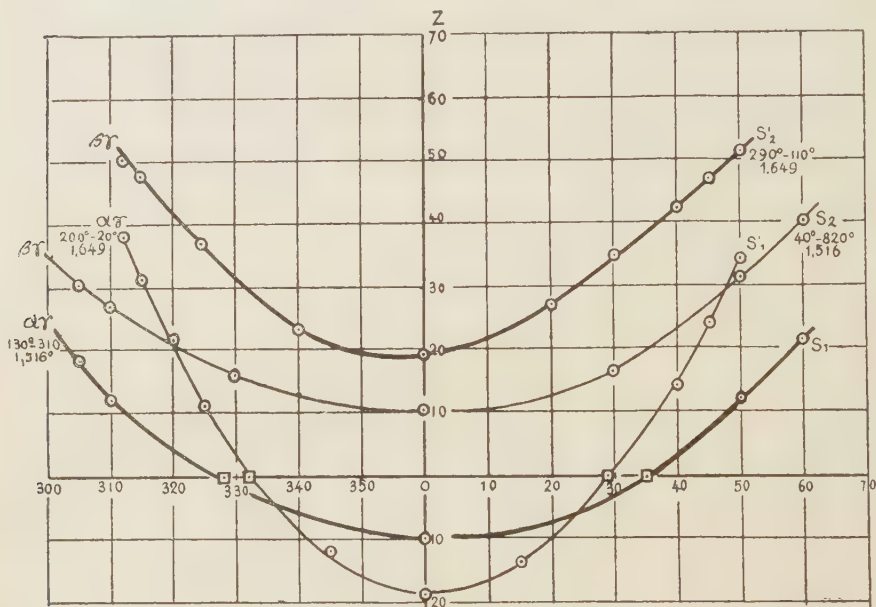


Fig. 1.

exemple, avec les segments d'indice 1.649 j'ai retrouvé dans les mêmes conditions que précédemment les mêmes plans d'extinction ($20^\circ-200^\circ$) et ($110^\circ-290^\circ$) et, dans le plan $\alpha\gamma = (20^\circ-200^\circ)$ j'ai retrouvé les axes optiques sensiblement dans les mêmes positions 332° et 28° .

VI. — De tout ce qui précède, nous pouvons conclure que lorsque la coupe de la calcite est placée entre les deux segments sphériques, nous avons, à tenir compte, entre les deux nicols croisés, de deux substance biréfringentes, la calcite, uniaxe, d'une part, les segments, biaxes, d'autre part.

Dans le cas spécial où nous amenons la section principale de la calcite et une section principale, $\alpha\gamma$ ou $\beta\gamma$, des segments à coïncider, la biréfringence qu'on détermine avec l'aide du compensateur, doit être donc considérée, comme la résultante de la superposition de deux biréfringences : celle de la calcite et celle du verre.

Je me suis proposée de vérifier ce fait: pour cela, laissant tous les axes de l'appareil à leur zéro, j'ai tout d'abord placé le plan $\alpha\gamma$ de l'indicatrice optique des segments perpendiculairement à l'axe A_4 du tambour [d'après l'étude faite antérieurement ce résultats est obtenu quand le cercle A_1 est amené à l'une des divisions $\alpha_1 = 130^\circ$ ou $\alpha_1 = 310^\circ$ (pour les segments $n_s = 1.516$)]. Sans modifier la position de la platine autour d'aucun axe, j'ai alors fait subir à la coupe de calcite des déplacements appropriés entre le disque de la platine et le segment supérieur, jusqu'à en obtenir l'extinction. Lorsque cette coïncidence du plan de section principale de la calcite avec le plan $\alpha\gamma$ des segments est réalisée, on détermine la position des axes optiques apparents (en utilisant le double coin de Wright). Dans ce cas particulier, la moyenne des lectures effectuées a donné pour $\overline{AO'} = 46.2^\circ$ et pour $\overline{AO''} = 55.9^\circ$.

Or, quand, sur le graphique C de la fig. I de la 1^{re} Note (qui représente la courbe de la biréfringence de la calcite dans un plan de section principale), nous reportons les biréfringences mesurées dans le plan $\alpha\gamma$ pour les segments d'indice 1.516, nous obtenons la courbe S_1 , qui rencontre la courbe C en deux points, correspondant aux deux directions 46.2° et 55.2° , valeurs tout à fait en accord avec celles mesurées directement.

Les mesures que nous venons d'indiquer, dans le cas où le plan de section principale de la calcite coïncide avec le plan $\alpha\gamma$ des segments d'indice 1.516, peuvent être reprises pour le plan $\beta\gamma$ de ces mêmes segments et pour les plans $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$ des segments d'indice 1.649. Les résultats des mesures effectuées dans ces différents cas sont résumés dans la ligne supérieure du tableau suivant. Dans la ligne inférieure, j'ai reporté les ordonnées des points d'intersection obtenus en superposant dans chaque cas les courbes S aux courbes C correspondants.

$n_s = 1.516$						$n_s = 1.649$					
plan $\alpha\gamma = S_1$			$\beta\gamma = S_2$			$\alpha\gamma = S'_1$ e S''_1 (1)			$\beta\gamma = S'_2$		
AO'	AO''	2 V	AO'	AO''	2 V	AO' (1)	AO''	2 V	AO'	AO''	2 V
46.0°	55.9°	7° 53'	43.5°	57.5°	11° 28'	$\left\{ \begin{array}{l} 40.4^\circ \\ 39.9^\circ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 50.7^\circ \\ 51.4^\circ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 10^\circ 11' \\ 11^\circ 27' \end{array} \right.$	37.4°	51.5°	14°
									—	—	—
46.2°	55.2°	—	43.4°	57.5°	—	$\left\{ \begin{array}{l} 40.4^\circ \\ 39.5^\circ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 51.1^\circ \\ 51.8^\circ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \\ — \end{array} \right.$	37.5°	52.1°	—
									—	—	—

(1) Pour ce plan $\alpha\gamma$ j'ai inscrit le résultat d'une deuxième série de mesures obtenues après une rotation de 180° autour de A_1 . Dans les autres cas, une semblable rotation entraîne des changements moins notables pour les nombres trouvés, aussi n'ai je rapporté que l'un des deux résultats.

Une simple lecture de ce tableau montre que la concordance entre les valeurs mesurées directement et celles prévues par la superposition des courbes de biréfringence relatives à la calcite et aux segments est, dans chaque cas très satisfaisante. La biréfringence des segments, suffit donc à rendre compte du dédoublement anormal de l'axe de la calcite étudiée.

Dans chacun des cas précédents, j'ai de plus, mesuré la biréfringence de l'ensemble pour la direction qui correspond à l'axe optique vrai de la calcite et j'ai comparé le résultat expérimental obtenu, dans chaque cas, à la valeur donnée par la courbe S correspondante, pour la biréfringence des segments seuls, dans cette même direction.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Plan qui coïncide avec la section principale de la calcite	$N_s = 1.516$		$N_s = 1.149$	
	(Plan $\alpha\gamma$)	(Plan $\beta\gamma$)	(Plan $\alpha\gamma$)	(Plan $\beta\gamma$)
Biréfringence mesurée pour les segments plus la coupe	12.2	26.9	24 (31) (1)	47.5
Biréfringence des seg- ments seuls dans la même direction. . .	12.0	27.5	24 (32)	47.0

(1) Même remarque qu'au tableau précédent.

La concordance des résultats, confirme que la lame de verre porte-objet n'a aucune influence appréciable, puisqu'elle ne change nullement la biréfringence des segments.

Dans le cas général, où le plan de section principale de la calcite ne coïncide pas avec l'un des plans de section principale des segments, le problème devient naturellement plus complexe et il est difficile de prévoir, *a priori*, d'une façon simple, comment la biréfringence des segments se combine avec celle de la calcite; mais, certainement, la cause du dédoublement de l'axe que l'on observe dans tous les cas est encore bien la biréfringence des segments, laquelle trouble celle de la calcite (1).

(1) En étudiant l'ensemble formé par la courbe C et la courbe S_1 (fig. I, 1^{re} Note) on comprend le fait signalé dans la 1^{re} partie de la Note précédente: à savoir que la biréfringence maxima entre les deux axes apparents correspond à une direction différente de celle de l'axe optique vrai de la calcite et est toujours légèrement déplacé vers des inclinaisons plus grandes de la préparation autour de A_4 . La biréfringence mesurée dépend en effet, pour chaque direction, de deux termes, dont l'un se retranche. Le maximum de cette différence ne correspond pas forcément au cas où le terme soustractif est nul, mais à une direction pour laquelle le terme additif qui croît s'est accru d'avantage que le terme soustractif qui croît également mais, moins vite, dans toute la région voisine du minima de la courbe C.

Cette interprétation du dédoublement de l'axe de la calcite par l'intervention de la biréfringence des segments rend également compte du fait noté que l'angle des axes optiques observés pour la préparation Voigt plus épaisse, étudiée avec les mêmes segments sphériques, est plus petit que pour la préparation Steeg et Reuter : avec les segments d'indice $n_s = 1.516$ la préparation la plus épaisse a donné pour le 1^r Axe $\overline{AO'} = 45^\circ 5'$ et pour le 2^{me} $\overline{AO''} = 51^\circ$ ce qui correspond dans le minéral à un angle de $45^\circ 24' - 40^\circ 54' = 4^\circ 30'$ tandis que les angles trouvés pour la coupe moins épaisse varient entre $7^\circ 53'$ et $11^\circ 28'$. En effet, la biréfringence des segments qui modifie celle de la calcite de la coupe doit intervenir plus efficacement quand la biréfringence de la coupe est plus petite par suite d'une épaisseur plus faible.

En résumé le dédoublement de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow est une apparence causée par l'anisotropie des segments sphériques de la platine qui se comportent comme une substance biréfringente biaxe. Cette biréfringence des segments n'est point négligeable : elle provoque dans le cas étudié un angle qui peut atteindre plus de 11° avec un couple de segment, 14° avec l'autre.

Qu'en terminant, il me soit permis d'adresser à l'ing. Aichino, Directeur de l'Office Géologique mes remerciements les meilleurs pour la bienveillance avec laquelle il a bien voulu m'accueillir et pour le fait de m'avoir permis de fréquenter son Office.

Je suis heureuse, également, d'exprimer ma reconnaissance à Mr. le prof. Perrier qui m'a initiée à la méthode universelle de Fédorow. Il a su m'en rendre si minimes les difficultés que j'en ai seulement connu l'intérêt passionnant dont il parle en exposant cette méthode dans un travail récent ⁽¹⁾.

Ottica fisiologica. — *Sulla funzione ottica del liquido lacrimale.* Nota di V. RONCHI presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) C. PERRIER, *Sopra alcune Rocce trachitiche di Porto Scuso, Sardegna*, « Bollettino d. R. Uff. Geologico », L (1925), n. 7.

Chimica. — *Nuove ricerche sopra alcune notevoli sublimazioni vesuviane.* Nota di G. CAROBBI presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

Nella Nota precedente ho riferito sopra i risultati di un'analisi chimica ed anche spettrografica eseguita sulla parte solubile in acqua a freddo di un miscuglio salino costituente alcune sublimazioni raccolte il 5 luglio 1925 sul fondo del cratere vesuviano e precisamente sulle pareti interne di una fumarola situata in un canale lavico della cupola gialla formatasi nell'aprile-maggio 1924 ⁽²⁾.

Tali sublimazioni erano caratterizzate dalla presenza di notevoli quantità di acido borico (il 38.8 %) nonchè di piccole quantità di titanio, di vanadio, sotto forma di sali solubili in acqua, e di fluoro.

Terminata l'analisi quantitativa e anche spettroscopica, si presentava come particolarmente interessante il poter riconoscere quali fasi naturali erano presenti nelle sublimazioni vesuviane studiate.

Il lavoro di identificazione dei vari minerali esistenti nel miscuglio salino è oltremodo difficile per l'estrema piccolezza e spesso per l'imperfetta composizione dei cristalli: in ogni modo sono per ora in grado di riferire sul ritrovamento della fase pura del fluoborato di potassio (Avogadrite) finora mai trovata al Vesuvio.

L'esame microscopico dei materiali della fumarola mi ha permesso di stabilire che in essi esistono diverse fasi cristalline, perfettamente definite, delle quali, però, finora ho potuto identificarne alcune soltanto, data la scarsità del materiale, la difficoltà di isolare le singole fasi, la imperfezione dei cristalli, ed il fatto che alcune non sembrano appartenere ai composti inorganici che sono stati finora studiati cristallograficamente.

L'acido borico (sassolino) è molto facile ad identificarsi, diffuso in tutta la massa del campione, sotto forma di laminette a contorno esagonale, quasi uniassiche, negative, con forte birifrangenza.

Insieme all'acido borico, ho notato dei cristallini minutissimi, tabulari, a birifrangenza debolissima, e con rifrazione inferiore a quella dell'acqua. Questi minuti cristallini presentavano, qualche volta, la stessa forma del cristallo, più grande, ottenuto per ricristallizzazione, rappresentato nella

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1926.

(2) Vedi A. MALLADRA, *L'attività del Vesuvio nel 1924*. « Annali del Reale Osservatorio Vesuviano » [3] 1, p. 83 (1924).

fig. 1. Ora, questo *habitus*, unito alle proprietà ottiche, ed al fatto che qualche minuscolo ciuffetto di quei cristalli aveva permesso di stabilire allo spettroscopio la presenza del potassio e del boro, mi fece pensare che si trattasse di avogadrite, del fluoborato di potassio naturale recentemente scoperto al Vesuvio sotto forma di cristalli misti contenenti circa il 9 % di fluoborato di cesio ⁽¹⁾.

Le indagini eseguite hanno confermato la giustezza della supposizione.

Trattando con acqua a freddo una parte delle sublimazioni in questione ed evaporando la soluzione fino a secchezza su acido solforico, a pressione ridotta, ho ottenuto un deposito cristallino in cui l'esame microscopico permise di riconoscere, anzitutto, la presenza, di cloruri alcalini e di una grande quantità di acido borico sotto forma di lamelle a contorno esagonale, quasi uniassiche, negative, fortemente birifrangenti.

La mia attenzione è stata, poi, richiamata dai soliti cristallini tabulari, allungati, molto poco birifrangepti con estinzione parallela alla direzione di allungamento (che era otticamente negativa), a cui ho accennato sopra. I cristallini, che nel prodotto di ricristallizzazione si presentavano di dimensioni notevolmente maggiori di quelle osservate nel prodotto naturale, erano terminati da due spigoli formanti fra loro un angolo piano di 76-77°; questo angolo era quasi sempre smussato da uno spigolo più o meno esteso, otticamente positivo.

L'analisi spettroscopica di qualche cristallino, accuratamente isolato, dimostrò la presenza del boro e del potassio. Pensai, quindi, che si trattasse effettivamente del fluoborato di potassio, rombico, studiato cristallograficamente dal prof. Brugnatelli ⁽²⁾.

La determinazione del peso specifico e dell'indice di rifrazione medio, nonché alcuni dati cristallografici hanno confermato le mie previsioni.

Col metodo della sospensione, usando tetrabromuro d'acetilene successivamente diluito con toluene e la bilancia di Westphal, ho trovato a 18° ps = 2.498 come media di varie determinazioni su diversi cristallini accuratamente isolati. Zambonini ⁽³⁾ per il fluoborato di potassio puro ha trovato 2.505. Stolba aveva dato valori compresi fra 2.498 e 2.524.

L'indice di rifrazione medio, determinato col metodo della linea di Becke, è risultato, per la luce del sodio, eguale a 1.325. Zambonini ha trovato, sempre per la luce del sodio:

$$n_p = 1.3239 \quad n_m = 1.3245 \quad n_s = 1.3247.$$

(1) Cfr. F. ZAMBONINI, *Sulla presenza tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio di una varietà cesifera del fluoborato di potassio*, « Rend. R. Accad. Naz. Lincei » [3], 6, 644 (1926).

(2) Nella Nota di C. MONTEMARTINI, *Dimorfismo del fluoborato potassico*, « Rend. R. Accad. Naz. Lincei » [5], 3, 339 (1894).

(3) Loc. cit.

Ho potuto misurare al goniometro i seguenti angoli della zona di allungamento:

	Limiti delle misure	N	media	Calcolato per KBF_4 con le costanti di Brugnatelli $a : b : c ::$ $= 0.7898 : 1 : 1.2830$
$(001) : (102)$	$38^{\circ} 42' - 39^{\circ} 18'$	6	$39^{\circ} 2'$	$39^{\circ} 5'$
$(001) : (011)$	—	—	$52^{\circ} 6'$	$52^{\circ} 4'$

Nei miei cristalli sono presenti solo le forme:

$c\{001\}$, $d\{102\}$, $m\{110\}$, $n\{011\}$ subordinato.

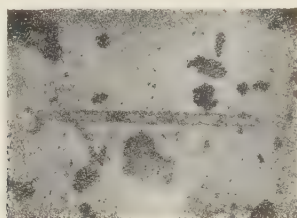


Fig. 1.



Fig. 2.

Generalmente i cristalli sono allungati secondo y : se ne sono però osservati alcuni allungati secondo x ed altri ugualmente estesi in queste due direzioni. La fotografia della fig. 1 ed il disegno della fig. 2 danno un'idea dell'*habitus* dei cristalli di Avogadrite identificati nelle sublimazioni descritte in questa Nota.

In altre Note verranno descritti altri minerali ritrovati in questi notevoli prodotti dell'attuale attività del Vesuvio.

Concludendo:

È stata per la prima volta rinvenuta al Vesuvio l'avogadrite, fluoborato di potassio, nella sua fase pura.

Chimica. — *Nuovo processo di deidrogenazione del mentolo* ⁽¹⁾
Nota di GUIDO CUSMANO, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRA-
VANO.

È noto che per preparare il mentolato di sodio si fa sciogliere il metallo nel mentolo fuso, elevando man mano la temperatura, per facilitare la reazione e fino a che si forma una massa solida ⁽³⁾. Ora, io ho osservato che, continuando a riscaldare e portando la temperatura intorno ai 300°, si ha un forte sviluppo d'idrogeno, mentre la massa diviene spugnosa. Se a questo punto si lascia raffreddare, poi si aggiunge acqua, la parte organica si separa come un liquido incolore che galleggia e odora fortemente di mentolo; però non cristallizza neppure in miscuglio frigorifero, e con l'innescare d'un cristallino di quella sostanza. Trattandone la soluzione acquosa-alcoolica con acetato di semicarbazide, in buona parte si trasforma quasi subito in un precipitato cristallino bianco, che, raccolto su filtro alla pompa e lavato con alcool a 50°, fonde a 184°, come il semicarbazone del mentone attivo: e difatti si può constatare facilmente che trattasi appunto di esso. Nelle madri rimane mentolo, ma inquinato da piccola quantità di timolo svelabile con la reazione con cloroformio e idrato di potassio.

La massa porosa è quindi un miscuglio di mentolato di sodio di un sodiomentone e di una scarsissima quantità di timolato di sodio.

Se la massa medesima si polverizza rapidamente al riparo dell'umidità e si torna a riscaldare in una provetta poco oltre 300°, essa fonde e sviluppa rapidamente idrogeno.

Munendo la provetta d'un tappo con tubo di sviluppo affilato si può far bruciare il gas e a un certo momento osservare che la fiamma diviene fumosa: conviene allora interrompere il riscaldamento. Il contenuto della provetta si tratta con una corrente di vapor d'acqua e così si ha un liquido odoroso, costituito da mentone e timolo; quest'ultimo si può separare dal primo mediante gli alcali ed avere facilmente cristallizzato.

Nel secondo tempo della decomposizione sparisce dunque il mentolato di sodio e una parte del sodio mentone si trasforma in timolato di sodio. Naturalmente, anche sciogliendo a caldo un gr. atomo di sodio in una gr. molecola di mentone e portando il prodotto ottenuto a una temperatura poco superiore a 300°, si passa al timolo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica farmaceutica della Regia Università di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1926.

(3) FEIST, in «Berichte d. deut. Chem. Ges.», 45, 945 (1912).

Riassumendo, nelle condizioni sopra dette, il mentolato di sodio perde 2 at. d' idrogeno, trasformandosi in un sodio mentone, il quale perde ancora 4 at. d' idrogeno e si trasforma in timolato sodico:

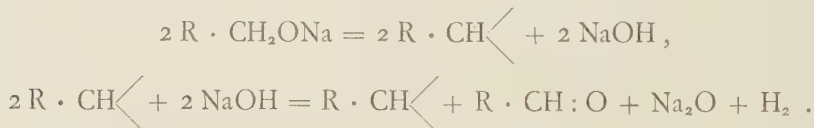


Non posso precisare se il passaggio da mentone a timolo si faccia attraverso un mentenone $\text{C}_{10}\text{H}_{16}\text{O}$, cioè se i 4 at. d' idrogeno si distacchino a due a due in tempi diversi. Non ho constatato la presenza di cetoni ciclici non saturi; ma ciò non vuol dire che non possansi essere formati e siano stati poi ridotti dall' idrogeno, che si sviluppava nella reazione: difatti in qualche altro caso, che sto studiando, ho avuto insieme con i prodotti della deidrogenazione anche quelli della riduzione.

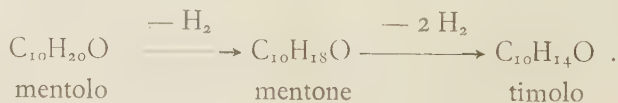
La prima parte della reazione — separazione di due atomi d' idrogeno dal mentolato — trova qualche riscontro nei risultati avuti da Nef⁽¹⁾, già molti anni addietro, cimentando al calore alcuni alcoolati della serie grassa; ebbe aldeidi e cetoni, ma insieme con grande quantità d' idrocarburi non saturi e osservò che il processo di decomposizione era piuttosto lento.

La seconda parte della reazione, che descrivo, cioè la trasformazione del sodio mentone nel timolato di sodio, non credo che sia stata ancora segnalata; poichè probabilmente altri cetoni terpenici agiranno in modo analogo, essa potrà servire per determinare in quelli con speditezza la posizione dell'ossigeno cetonico in base al riconoscimento del fenolo che forniranno.

Nef ammette (l. c.) che, nella decomposizione dei suoi alcoolati, le aldeidi o i cetoni si formino secondariamente dagli alchilideni generati in prima fase:



La decomposizione del mentolato di sodio, secondo me, consiste in un processo di deidrogenazione paragonabile a quello che subisce il mentolo in presenza di rame riscaldato. Sappiamo difatti che nel 1910 L. Brunel⁽²⁾ conducendo vapori di mentolo su rame a 230-240° osservò formazione di timolo e che, d'altro canto, nel 1912 G. B. Neave⁽³⁾ nella stessa reazione eseguita a 300° ebbe mentone. Per catalisi del rame si ha quindi:



(1) « Ann. », 318, 137 (1901).

(2) « C. r. d. l'Ac. », 137, 1268.

(3) « Chem. Zentralblatt », 1912, I, 1714.

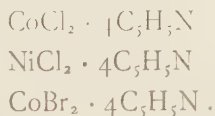
lo stesso schema di reazione che ho scritto sopra per il mio caso. Il mentolo e il mentone di per sè stabilissimi all'azione del calore, nei due processi si decompongono invece con grande velocità a una temperatura non molto superiore al loro p. e. Probabilmente la causa intima della decomposizione è per tutt'e due i processi la medesima: il sodio, come atomo, nei sistemi atomici di cui fa parte (mentolato sodico o sodiomentone) compie lo stesso ufficio di catalizzatore del rame, fase dei sistemi mentolo, rame o mentone, rame.

Chimica. — *Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche* ⁽¹⁾. Nota III di G. SCAGLIARINI e G. TARTARINI ⁽²⁾, presentata dal Corrisp. MARIO G. LEVI.

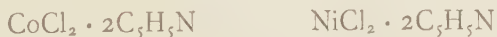
È notorio che la teoria della coordinazione werneriana riesce a spiegare quasi sempre assai bene la costituzione dei complessi che si formano in seno alle soluzioni acquose. Lo stesso non può dirsi però quando all'acqua si sostituisca qualche altro solvente.

In questa Nota, come già in altre Note precedenti ⁽³⁾, si mettono in evidenza altre anomalie, in cui il numero di coordinazione del metallo non è più costante e che perciò sfuggono alla interpretazione di predetta teoria.

Già Reitzenstein ⁽⁴⁾ e Grossmann ⁽⁵⁾ agendo con piridina rispettivamente su cloruro di cobalto e di nichel il primo, su bromuro di cobalto il secondo, ottennero i seguenti complessi:



Lo stesso Reitzenstein ⁽⁶⁾ trattando i cloruri di cobalto e di nichel, anzichè in soluzione piridica, in soluzione alcoolica con piridina ottenne complessi meno ricchi di piridina:



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1926.

(3) « Rend. Acc. Lincei », serie VI, vol. I, p. 582; id., serie VI, vol. II, p. 269; id., serie VI, vol. IV, p. 318.

(4) « Zeit. Anorg. Chemie », 11 (1896), p. 254.

(5) « Ber. », 37 (1904), p. 1256.

(6) « Annalen », 282, p. 267 (1894).

che tuttavia potrebbero ancora interpretarsi come due neutroni ammettendo il numero di coordinazione tanto per il cobalto che per il nichel uguale a quattro. Ma ciò non vale più quando si esaminano i complessi che questi alogenuri fanno coll'esametilentetrammina. Infatti G. A. Barbieri e F. Calzolari ⁽¹⁾ da soluzioni acquose di cloruro di cobalto, cloruro di nichel, e bromuro di cobalto per aggiunta di soluzioni acquose di esametilentetrammina ottenere i seguenti sali idrati:



In questi idrati secondo gli autori l'esametilentetrammina non si leghebbe all'atomo metallico centrale ma andrebbe a far parte della sfera esterna. Indubbiamente già questi idrati, come parecchi altri idrati della chimica inorganica, restano male interpretabili col mezzo della teoria della coordinazione, fatto che si accentua quando all'acqua si sostituisca l'alcool come solvente. Difatti da soluzioni alcooliche di cloruro di cobalto, cloruro di nichel, bromuro di cobalto anidri per aggiunta di soluzioni alcooliche di urotropina, abbiamo potuto ottenere i seguenti sali:



Riferendosi alla teoria della coordinazione si tratterebbe di complessi non saturi.

Tutti questi fatti che oggi non trovano una spiegazione soddisfacente in base alla concezione classica dello stato delle soluzioni, è possibile che, interpretati da un nuovo punto di vista e per es.: da quello delle più recenti vedute sulle soluzioni, trovino anche essi una adeguata spiegazione. E per riferirci al caso ora descritto è ovvio che, supponendo puramente elettrostatiche le forze interioniche e intermolecolari che si esercitano in una soluzione, grandissima deve essere la influenza che la costante dielettrica del mezzo spiega sul formarsi o meno di questi aggruppamenti.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione del composto di addizione:



Si prepara aggiungendo ad una soluzione concentratissima di cloruro di cobalto anidro in alcool etilico, una soluzione pure concentrata e in alcool

(1) « Rend. Acc. Lincei » (1910), II, p. 583.

di esametilentetrammina. Il composto si separa in bei cristalli di colore azzurro oltremare. Questi cristalli filtrati alla pompa vennero seccati fra carta da filtro. All'aria il composto è stabile; si scioglie in poca acqua colorandosi in rosa. I dati analitici sono i seguenti:

	Trov. %	Co 21.97	Cl 26.28	N 20.36
per $\text{CoCl}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	Calc. »	» 21.84	» 26.27	» 20.75

Preparazione del composto d'addizione:



Si ottiene in modo analogo al precedente da soluzioni concentrate di bromuro di cobalto e di esametilentetrammina in alcool etilico. Cristalli azzurri di un colore più intenso del corrispondente sale ottenuto dal cloruro. Solubilissimi in acqua con colorazione rosa. Filtrati alla pompa ed essiccati fra carta da filtro furono sottoposti all'analisi:

	Trov. %	Co 15.73	Br 44.54	N 15.46
per $\text{CoBr}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	Calc. »	» 16.43	» 44.53	» 15.61

Preparazione del composto di addizione:



Per ottenerlo si tratta una soluzione in alcool etilico di cloruro di nichel anidro con una soluzione pure alcoolica di esameteilentetrammina. Cristalli di colore giallo leggermente tendente al verde. Molto solubili in acqua con colorazione verde. Filtrati alla pompa furono seccati tra carta da filtro:

	Trov. %	* Ni 22.12	Cl 26.17	N 20.85
per $\text{NiCl}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	Calc. »	» 21.75	» 26.29	» 20.77

Chimica. — *Prodotti di addizione tra anidride solforosa ed idrocarburi aromatici.* Nota di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Elettrochimica. — *Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo.* Nota di L. MAZZA, presentata dal Corresp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. -- *Resti di un apparato eruttivo di età giurese scoperti in Sicilia.* Nota di R. FABIANI, presentata dal Socio G. DAL PIAZ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *Ricerche cristallografiche su alcuni eteropoli-composti.* Nota di F. RODOLICO presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. -- *Comportamento fotoreattivo in girini e avannotti alimentati con tiroide⁽¹⁾.* Nota di ETTORE REMOTTI, presentata⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

In ricerche ultimamente da me condotte⁽³⁾ su avannotti di Salmonidi al fine di rilevare possibili reazioni o eventuali meccanismi fisico-chimici di difesa di fronte alla luce, avevo scelto come mezzo rivelatore la reazione all'idrochinone del sistema fotosensibile proteine-sale d'argento, reazione fotosierologica particolarmente studiata nel nostro Laboratorio e che deve considerarsi come una derivazione della reazione di Kottmann.

Poichè quest'ultima, applicata dal Kottmann allo studio degli stati tiroidei, aveva permesso una valutazione di questi, attraverso le modificate proprietà fisico-chimiche del siero di sangue, consentendo, almeno entro certi limiti, un mezzo diagnostico per il loro riconoscimento, mi è sembrato interessante riprenderne lo studio, applicandola agli stati tiroidei provocati sperimentalmente con ingestione di tiroide.

Le nuove esperienze furono prima condotte su avannotti di *Salmo lacustris* e *irideus*, alimentati questa volta con poltiglia di glandola tiroidea fresca: e poi, come vedremo, su girini di *Rana esculenta* sottoposti a vario trattamento.

Due lotti di avannotti al medesimo stadio di sviluppo e soggetti entrambi al trattamento tiroideo, erano mantenuti, rispettivamente, l'uno al buio l'altro alla luce, secondo le modalità esposte nella nota precedente.

Ottenevo sieri nel modo già indicato e praticavo, secondo il metodo descritto, la reazione.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Bologna, diretto dal prof. E. Giacomini.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1926.

(3) «R. Acc. Lincei», vol. III. Roma, 1926.

Con sorpresa dovetti constatare che, contrariamente a quanto accadeva per gli avannotti normali, la differenza precedentemente notata, per cui quelli allevati alla luce sembravano divenuti fotoresistenti presentando un ritardo nella reazione, si manifestava molto meno distinta, i due gruppi di animali reagendo presso a poco con la medesima rapidità di fronte all'idrochinone.

Era una modificazione da riferirsi ai sieri degli avannotti tenuti all'oscurità, o di quelli tenuti alla luce?

A risolvere il dubbio, che i nuovi risultati prospettavano, si rendevano necessarie esperienze di controllo con avannotti normali. Ho istituito quindi una seconda serie di ricerche, allevando rispettivamente al buio ed alla luce avannotti con e senza somministrazione di tiroide.

I risultati, che da queste ricerche, procedendo con il solito metodo, si ottennero, stanno a dimostrare che la convergenza dei tempi di reazione — tenendo come unità di misura la durata media presentata dagli avannotti normali di controllo — derivava prevalentemente dal fatto che gli animali tiroidati tenuti al buio presentavano sui normali, nelle medesime condizioni, un ritardo nella velocità del viraggio, avvicinandosi per tal modo a quelli divenuti fotoresistenti.

Tale risultato mi sembra notevole, dimostrandoci direttamente nella tiroide, attraverso il modificato andamento della reazione fotosierologica, un fattore nel determinismo delle proprietà fisico-chimiche dei colloidi organici, e forse anche un elemento modificatore della capacità di reazione degli organismi agli stimoli esterni.

Se infatti le variazioni della velocità di reazione del sistema sono da ascrivere, secondo l'ipotesi già espressa in rapporto alle precedenti ricerche, a un differente grado di dispersione dei colloidi del siero, gli effetti constatati si potrebbero riferire ad un'azione dispersiva della tiroide che, agendo nello stesso modo che la luce, porterebbe gli animali tenuti al buio ad avvicinarsi, quanto alle condizioni di equilibrio colloidale, a quelli esposti alla luce, ammettendo il concetto di un limite nel grado della dispersione. Questa interpretazione collimerebbe del resto con le idee di Kottmann a proposito dell'aumento che egli poté constatare, quanto ai tempi di reazione, negli stati ipertiroidei.

Si potrebbe, d'altro lato, ritenere che l'azione della tiroide si esplichi attraverso una maggiore sensibilità del sistema alla luce, spiegabile a sua volta secondo un duplice meccanismo. Potrebbe infatti trattarsi di una particolare instabilità che il secreto tiroideo conferirebbe ai colloidi protoplasmatici, per cui questi, sotto lo stimolo della luce passerebbero, più rapidamente, da uno stato di minore ad uno stato di maggiore dispersione; ovvero di un fatto più strettamente chimico, per cui lo iodio introdotto con la tiroide potrebbe costituire con i sali d'argento una sorta di vera e propria gelatina fotografica particolarmente sensibile.

Tale seconda ipotesi, di una ipersensibilità creata dalla tiroide, m'indusse a controllare le precedenti con nuove esperienze, nelle quali però si

eliminava, nella preparazione dei sieri provenienti dall'oscurità, qualsiasi azione della luce prima dello svolgersi della reazione specifica, con tutte quelle precauzioni che si usano per le ordinarie lastre fotografiche. Ho quindi ripetuto le mie esperienze con avannotti tiroidati e normali, tenuti rispettivamente alla luce e al buio, avendo però cura di preparare i sieri completamente all'oscurità prima di procedere alla reazione fotografica.

Così procedendo nei due lotti di animali tornano a manifestarsi le differenze già note, di una minore rapidità di reazione per quelli allevati alla luce, sebbene tali differenze siano meno intense che per gli avannotti normali.

Sembra dunque effettivamente da ammettersi che l'azione della tiroide si espliciti — seppure in parte attraverso forse una maggiore dispersione dei colloidi — in parte però almeno modificando direttamente la sensibilità del protoplasma alla luce, per quanto non sia possibile definire quale dei due supposti meccanismi — instabilità colloidale, reazione chimica dello iodio — possa entrare in gioco.

Delle due condizioni surriferite, la prima potrebbe rientrare nel quadro del modo generale d'azione della tiroide, in quanto tale particolare instabilità dei colloidi o meglio la loro facilità di dispersione potrebbe, entro certi limiti, darci ragione, attraverso i fenomeni di superficie, dell'accelerato metabolismo che caratterizza gli stati ipertiroidi. Meno vasta e significativa sarebbe invece la portata della seconda spiegazione.

In considerazione dei risultati ottenuti dai quali emergerebbe, in armonia con le vedute di Kottmann, un particolare comportamento degli stati ipertiroidi anche sperimentali, era giusto portare la reazione stessa nello studio di condizioni fisiologiche nelle quali è presumibile uno stato di particolare funzionabilità della tiroide.

Da tutta una serie di ricerche (Gudernatsch, Giacomini, Cotronei, ecc.) troppo note perchè sia necessario, anche brevemente, accennarle qui, si sa che la tiroide ha un'importanza fondamentale nel determinismo del processo della metamorfosi.

Si deve perciò ammettere che questa fase dello sviluppo sia accompagnata da una attività particolarmente intensa della glandola e sia correlativa quindi ad uno stato di ipertiroidismo fisiologico.

Avere di quest'ultimo una testimonianza con la presente reazione significava nello stesso tempo saggiare su più larga base il valore dirò così diagnostico della reazione stessa e controllare d'altro lato per questa via le condizioni endocrine di una tale fase critica dello sviluppo.

L'operazione venne eseguita rispettivamente su girini di Rana esculenta non ancora in metamorfosi e su girini in periodo di metamorfosi naturale.

Anche in questo caso i risultati ottenuti furono positivi.

In tal modo, per una via del tutto nuova, attraverso il modificato equilibrio colloidale del siero, si dimostrerebbe la partecipazione del secreto tiroideo al processo della metamorfosi.

A questo punto venne istituita una nuova serie di ricerche, sostituendo alla somministrazione di tiroide, quella di iodio, sotto forma di tuorlo di uovo iodato.

La reazione, condotta sui girini col metodo usato per le precedenti esperienze, diede anche per gli animali alimentati con lo iodio e in via di metamorfosi, risultati positivi.

Un tale reperto collimerebbe con quelli (Giacomini) che ci dimostrano che lo iodio agisce nello stesso senso della tiroide.

Sfugge per ora il meccanismo sulla base del quale varia la fotosensibilità di cui avevamo più sopra accennato.

Prima di chiudere, accennerò ancora ad alcune osservazioni intese a stabilire se la luce avesse o meno importanza sul manifestarsi dell'azione tiroidea.

Utilizzando al solito, come controllo biologico, l'accelerazione di sviluppo provocata dalla tiroide sui girini, sono state iniziate alcune esperienze allevandoli con tiroide rispettivamente al buio e alla luce.

I risultati finora ottenuti furono però negativi, il che ci farebbe pensare che l'azione della glandola sulla metamorfosi abbia a base un altro determinismo che non sia quello strettamente dipendente dall'ordine dei fenomeni relativi ai colloidi organici qui considerati.

Non è facile neppure poter precisare le modalità di un fenomeno così complesso che deve interessare molteplici meccanismi fisico-chimici [ad es. tenore in acqua dei tessuti (Cotronei) ecc.], relativi fra l'altro alla riserva alcalina, come dimostrano anche le recenti ricerche di Aleskin⁽¹⁾ sulla variazione della reazione dei liquidi organici di queste forme in periodo di metamorfosi normale e sperimentalmente provocata.

In particolare, ricorderò come a proposito dell'azione della tiroide sulla metamorfosi, come pure di quella eguale dello iodio, sia stato espresso (Giacomini) il pensiero che essa consista nello stimolo portato alla moltiplicazione cellulare.

*
* *

Concludendo, i sieri di girini e avannotti sottoposti a trattamento tiroideo, presentano importanti modificazioni nell'equilibrio colloidale, modificazioni in parte riferibili ad una maggiore dispersione.

Attraverso questi risultati verrebbe dimostrata, per via del tutto nuova, che la tiroide interviene nell'equilibrio fisico-chimico del mezzo interno con un'azione che, come risulta dalla natura stessa dei sieri presi in considerazione nelle presenti esperienze, deve esplicarsi direttamente senza l'intermediario del sistema nervoso e che potrebbe anzi darci ragione del suo meccanismo generale di azione.

(1) « Biochemische Zeit. », Bd. 170, I.

Embriologia. — *Ricerche sui placodi dei Ciclostomi, Ganoidi e Teleostei con particolare riguardo al destino del primo placode epibranchiale*⁽¹⁾. Nota preventiva di SILVIO RANZI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Ho precedentemente dimostrato⁽³⁾ che dal primo placode epibranchiale dei Selaci si forma l'organo di senso spiracolare; sappiamo d'altra parte per le ricerche di Vitali⁽⁴⁾ che un organo di senso omologo (organo paratimpanico) si trova negli Uccelli e nei Chiroteri e manca in tutti gli altri Amnioti e negli Anfibi che egli ha studiato, mentre lavori più antichi descrivono un organo di senso derivato dal primo placode epibranchiale, che si conserva nell'adulto, in Dipnodi⁽⁵⁾ e Ganoidi⁽⁶⁾; restava quindi da stabilire quale destino avesse il primo placode epibranchiale nei Ciclostomi e Teleostei, dato che nessuno se ne è mai di proposito occupato. Bisognava inoltre confermare i reperti del Müller⁽⁶⁾ sui Ganoidi, perchè sebbene, come già dissi, essi a me sembrassero indiscutibili, il Landacre⁽⁷⁾, studiando parecchi anni dopo i placodi epibranchiali del *Lepidosteus osseus* (la stessa specie studiata dal Müller) e non conoscendo il lavoro di questi, conclude che il primo placode sparisce senza lasciare traccia, tanto che il Brachet⁽⁸⁾ nel suo trattato (p. 440) domanda che si facciano nuove ricerche sull'argomento. A parte questo, restava ancora in sospeso la questione dell'innervazione, perchè secondo il Müller il ramo nervoso, che si porta all'organo di senso spiracolare, proviene dal primitivo contatto del ganglio genicolato sul placode che si conserva mentre, come io ho dimostrato, nei Selaci il primitivo contatto del nervo sul placode sparisce e il ramo, che nell'adulto si porta all'organo, vi giunge secondariamente.

Inoltre, come il Vitali⁽⁹⁾ ed io (op. cit.) abbiamo già detto, il trovare che un organo di senso deriva dal primo placode epibranchiale, riaccende

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1926.

(3) RANZI, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei » (Classe Sc. fis. mat. e nat.), S. 6, vol. 1, 1925; Pubbl. Staz. Zool. Napoli, vol. 7, 1926. Vedi pure VITALI, « Monit. Zool. Ital. », Vol. 36, 1925; « Arch. ital. di Biol. », T. 76, 1926.

(4) VITALI, « Int. Monatss. f. Anat. u. Physiol. », Bd. 30, 1914; « Ricerche di Morfol. », Vol. 4, 1924.

(5) AGAR, « Anat. Anz. », Bd. 28, 1906. GREIL, « Verh. Anat. Ges. », 20 Vers 1906; ibid. 21 Vers 1907.

(6) MÜLLER, « Arch. f. mikr. Anat. », Bd. 47, 1897.

(7) LANDACRE, « Journ. of comp. Neurol. », Vol. 22, 1912.

(8) BRACHET, *Traité d'Embryologie des Vertébrés*, Masson, Paris, 1921.

(9) Op. cit; vedi pure: VITALI, « Annali d. Università Toscane », Vol. 1, 1926.

interesse sulla antica questione della comunanza di origine dei placodi epibranchiali e della linea laterale, problema già affrontato dal Vitali e da me nei Selaci e risolto nel senso affermativo per queste forme. Anche a questo soggetto restava, quindi, ancora da stabilire quali condizioni si riscontrino negli altri Pesci, potendo lo studio di questi fornirci nuovi elementi che non debbono essere trascurati per una completa risoluzione del problema.

Nella larva di *Lepidosteus osseus* L. di 5.4 mm. sull'abbozzo dello spiracolo, costituito da un solido cordone entodermico, nel punto in cui raggiunge la superficie dell'ectoderma, si porta l'abbozzo del faciale costituito da un cordone fatto di poche cellule. Esso aderisce allo spiracolo sulla sua faccia caudo-dorsale e all'ectoderma, che riveste il capo, nella zona immediatamente vicina, e che si presenta ispessito a formare il placode epibranchiale. Progredendo lo sviluppo, dal placode epibranchiale nasce una massa di cellule che si dispone a formare un manicotto che avvolge la superficie caudale e dorsale dello spiracolo; su questo manicotto si porta sempre l'abbozzo del faciale e la sua aderenza, sullo strato ectodermico che riveste lo spiracolo, è in stadi posteriori sempre più lontana dalla superficie del corpo; questo spostamento può porsi in relazione allo spostamento del placode epibranchiale, che si osserva nei Selaci in zone sempre più profonde dello spiracolo. Subentrano a questo punto nuove condizioni (larva di 8.5 mm.), perchè mentre l'abbozzo dello spiracolo da un lato va scavandosi per tramutarsi in tubulo, dall'altro comincia a separarsi dall'ectoderma, che riveste il corpo (come è noto lo spiracolo nel *Lepidosteus* non si apre all'esterno). È a questo stadio che Landacre crede non si possa trovare più traccia del placode, ma, se questo è vero per il primitivo placode, non è vero per il mantello di cellule nate da questo, che rivestono la faccia caudale e dorsale dello spiracolo e che restano nella medesima posizione formando uno strato continuo, che delimita il lume del condotto spiracolare. Fino a questo stadio si osserva la primitiva aderenza del faciale sulle cellule nate dal placode, la quale interessa ora la faccia ventro-laterale del ganglio genicolato, ma, dopo questo stadio, l'aderenza sparisce e nel frattempo si origina il *ramus oticus VII*, che dal ganglio dorso-laterale del faciale si porta fino sulle cellule derivate dal placode (larva di 11 mm.). Si osserva come si vede, parallelamente a quanto misi in evidenza nei Selaci, un cambiamento di innervazione.

In stadi posteriori, la parte distale (più prossima all'ectoderma) del condotto spiracolare va tramutandosi in una vescicoletta, che è l'organo di senso spiracolare, nella quale, a spese delle cellule derivate dal placode, si forma un epitelio cilindrico unistratificato con caratteri di epitelio di senso. Questo epitelio forma la parete che guarda verso il labirinto; le altre pareti della vescicola appaiono invece costituite da un epitelio con due o tre strati di cellule molto piatte. La cavità della vescicola è in libera comunicazione col faringe per mezzo del condotto spiracolare, che va allargan-

dosi in forma di cono con la base volta verso il faringe. Questo condotto ha le pareti costituite da un doppio strato di cellule appiattite.

Un tale stato di cose si conserva nella larva più avanzata di cui dispongo (lunga 22 mm.); sappiamo d'altra parte dal Müller che l'organo di senso spiracolare si trova anche nell'adulto.

Un organo simile si trova in tutte le forme studiate a questo proposito dagli AA. (*Amia*, *Polyodon*, *Scaphirhynchus*, *Acipenser*)⁽¹⁾ e si può ammettere, sebbene a questo soggetto manchino notizie, derivato sempre dal primo placode epibranchiale⁽²⁾.

In *Salmo phario* L., nell'embrione di 9 giorni, si nota, nella zona del faciale, un'aderenza della massa di cellule nate dalla cresta gangliare sull'ectoderma che riveste il corpo e che è localmente fortemente ispessito rappresentando il primo abbozzo del placode epibranchiale. Col progredire dello sviluppo, mentre si abbozza lo spiracolo, l'aderenza, che in un primo tempo è molto estesa, va delimitandosi nel senso dorso-ventrale e, riducendosi ancora, resta localizzata ad un ispessimento, che si osserva caudo-dorsalmente al cordone cellulare solido, che rappresenta l'abbozzo dello spiracolo, e che si continua nell'ispessimento sul quale questo aderisce. Le cellule, che nascono dal placode, formano una massa posta dorso-caudalmente all'abbozzo dello spiracolo e che connette il placode con l'abbozzo del ganglio genicolato, che nel frattempo se ne è alquanto allontanato (embrione di 16 giorni); questa massa corrisponde allo strato di cellule ectodermiche, che riveste l'abbozzo dello spiracolo del *Lepidosteus*, ma è destinata a scomparire. Poco dopo la sua scomparsa, anche il ganglio si distacca dall'abbozzo entodermico dello spiracolo, che appare ora come un diverticolo del faringe, e ogni traccia del placode epibranchiale è scomparsa.

Il *ramus oticus VII*, che si forma in stadi più avanzati dello sviluppo, si porta al canale della linea laterale squamosale, ma non appare mai, nemmeno in stadi posteriori, nessun organo che possa paragonarsi all'organo di senso spiracolare; un tronco del *amus oticus VII* si porta d'altra parte allo stesso canale della linea laterale anche nei Selaci e Ganoidi. Queste stesse condizioni si osservano anche in larve molto avanzate o adulti di *Anguilla vulgaris* Flemm., *Hippocampus brevirostris* Cuv., *Singnathus acus* Mich., *Belone acus* Risso, *Solea monochir* Bp., nei quali manca un organo paragonabile all'organo di senso spiracolare, nè nella ricca bibliografia sui Teleostei ho trovato cenno di qualche formazione omologabile.

In *Petromyzon Planerii* Bl. il placode epibranchiale del faciale si presenta nell'embrione lungo 1.3 mm. come un ispessimento ectodermico posto dorso-caudalmente alla corrispondente fessura branchiale. Si conserva con

(1) Vedi a questo soggetto NORRIS « Journ. of comp. Neurol. », vol 39, 1925.

(2) Ricerche, che ho in corso mentre correggo le bozze di stampa di questa Nota, mi permettono di confermare pienamente questa ipotesi per *Amia calva* L. e *Acipenser ruthenus* L.

gli stessi caratteri per breve tempo, poi regredisce e scompare (larva lunga 4.4 mm.). Mai si mostrano, nemmeno in stadi posteriori dello sviluppo, formazioni paragonabili all'organo di senso spiracolare e nella bibliografia non trovo cenno in alcun ciclostoma di formazioni, che possano essere ritenute per tali.

Venendo alla questione dei rapporti tra placodi epibranchiali e dorso-laterali, e tra placodi dorso-laterali e linea laterale, sono costretto a ridurre al minimo le citazioni bibliografiche rimandando al lavoro in esteso. Nei Selaci, come dissi, in corrispondenza del IX ⁽¹⁾ e dei singoli rami branchiali del X, placodi epibranchiali e dorso-laterali provengono dallo stesso abbozzo; ma lo stesso non avviene per il VII i due placodi del quale si originano indipendentemente. Nel *Lepidosteus osseus* in corrispondenza del X, del VII, e forse anche del IX, l'abbozzo dei placodi epibranchiali e dorso-laterali è lo stesso. Nel *Salmo phario* l'abbozzo della linea laterale del tronco, che almeno nella sua parte più rostrale deve essere considerata come placode dorso-laterale corrispondente agli ultimi rami branchiali del X, si origina dallo stesso abbozzo dei corrispondenti placodi epibranchiali; una simile condizione si osserva per il VII; il IX e il primo ramo branchiale del X non hanno invece placode dorso-laterale. Nel *Petromyzon Planerii* solo in corrispondenza del X si ha un placode dorso-laterale, che è l'abbozzo della linea laterale del tronco e che proviene dalla stessa piastra che formerà i placodi epibranchiali del X; in corrispondenza del VII e IX non si formano placodi dorso-laterali, perchè tali non possono ritenersi le aderenze descritte dal Kupffer ⁽²⁾, nè gli abbozzi della linea laterale che in seguito appaiono.

Si può da quanto ho detto rilevare come la condizione quasi generale, che si osserva, sia che il primo abbozzo dei placodi epibranchiali e dorso-laterali è unico, e che probabilmente è questa la condizione primitiva ⁽³⁾. I placodi dorso-laterali rappresentano d'altra parte il primo abbozzo della linea laterale, ma non tutta la linea laterale si origina dai placodi dorso-laterali. Già nei Selaci alcuni bottoni non provengono da placodi: quelli del canale infraorbitale innervati dal *ramus oticus VII* e quelli innervati dal *ramus iomandibularis VII*. Condizioni interessanti in questo ordine di fatti ci offre il *Salmo* nel quale gli organi della linea laterale, corrispondenti a quelli che nei Selaci e *Lepidosteus* si formano dai placodi dorso-laterali del IX ⁽⁴⁾ e del primo ramo branchiale del X, si originano, in stadi molto avanzati dello sviluppo, indipendentemente da ogni placode, perchè, come ho detto, mai si formano i placodi dorso-laterali corrispondenti, e sono

(1) In corrispondenza dei IX del Batoidi non si forma placode dorso-laterale.

(2) KUPFFER, *Studien zur vergleichenden Entwicklungsgeschichte des Kopfes der Krayen*, Heft 3, Munchen, 1895.

(3) Vedi pure RANZI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», Vol. 7, 1926, p. 67.

(4) Questo vale solo per Squali e *Lepidosteus* (vedi sopra).

innervati da tronchi nervosi, che si stabiliscono secondariamente, ma che sono perfettamente omologhi ai tronchi che si osservano nei Selaci e nel *Lepidosteus* (*ramus supratemporalis IX*, *ramus supratemporalis X*). Stando così le cose, non si può certo negare un'omologia tra questi organi della linea laterale, sebbene nei Selaci e in *Lepidosteus* si originano dal placode dorso-laterale, nel *Salmo* indipendentemente, poichè il placode non appare mai. Per essi è certamente primitiva la condizione che si osserva nei Selaci e in *Lepidosteus* e, generalizzando la cosa, si può ammettere che, per tutti gli organi della linea laterale, sia primitiva condizione quella di derivare dai placodi dorso-laterali corrispondenti.

Stabilito questo, vediamo che linea laterale e placodi epibranchiali provengono da uno stesso abbozzo; ma è bene rilevare come questa conclusione vada presa non troppo alla lettera e non sia tale da farci senz'altro concludere: che i singoli placodi epibranchiali rappresentano abbozzi di organi della linea laterale destinati a scomparire o in alcuni casi a conservarsi (organo di senso spiracolare, organo paratimpanico). Se come dissi (op. cit.), è vero che l'origine dei placodi epibranchiali e dorso-laterali è comune, è altrettanto vero che in uno stadio molto precoce dello sviluppo i due sistemi si separano e seguono vie molto diverse, tanto da farci ritenere che esista tra loro una profonda differenza, a meno che non si voglia mettere in uno stesso gruppo tutte queste formazioni sol perchè hanno un abbozzo primitivo comune; ma allora in questo sistema dovrebbe rientrare pure il labirinto, poichè in stadi un po' precedenti e quelli che ho descritti sui lati del capo si trova una piastra ispessita (piastra laterale) ⁽¹⁾, che comprende gli abbozzi di tutti i placodi e della piastra uditiva.

(1) Ho trovato questa piastra in stadi molto giovani di *Petromyzon* e *Salmo* ed è molto probabile sia presente pure in *Lepidosteus*. La piastra è presente nei Selaci (vedi LOCY, « Journ. of Morphol. », vol. 11, 1895) e negli Anfibi (RAFFAELE, « Int. Monatss. f. Anat. u. Physiol. », Bol, 17, 1900. LANDAGRE, « Journ. of comp. Neurol. », vol. 40, 1926).

Batteriologia. — *Il comportamento del « Bacterium Typhi » nel latte*⁽¹⁾. Nota del prof. COSTANTINO GORINI, presentata⁽²⁾ dal Socio ORESTE MATTIROLO.

È nota la questione tuttora dibattuta intorno ai rapporti fra il *Bacterium Coli* e il *Bacterium Typhi* ed è noto pure che uno dei pochi caratteri differenziali bene assodati fra i due germi risiede nel comportamento in latte in quanto il B. Tifoso, contrariamente al B. Coli, è universalmente considerato incapace di coagulare il latte, per quanti tentativi siano stati fatti onde conferirgli o, meglio, ravvisargli tale proprietà. E tale anch'io lo ritenevo fino alle mie ultime ricerche sulla stimolazione delle attività batteriche nel latte.

Già da tempo ho dimostrato che per lo studio preciso del comportamento dei batteri nel latte occorre ridurre al possibile le modificazioni che questo subisce per effetto della temperatura di sterilizzazione; infatti, avendo cura di sterilizzare il latte per tindalizzazione in guisa da conservargli il suo colorito bianco, sono riuscito ad accertare il potere coagulante e più precisamente proprietà acido-presamigene in una serie di germi che ne erano ritenuti privi fra i gruppi dei fermenti lattici, del B. Coli, del mamnococco-gastrococco-caseococco-enterococco, degli streptococchi e del pneumococco, ecc., e che si rivelarono pertanto appartenere alla categoria dei miei fermenti misti o acidoproteolitici (1892).

Ho osservato però che i risultati, massime con certe specie, non sono sempre costanti verosimilmente per la impossibilità nella sterilizzazione di risparmiare sempre sufficientemente e in ugual grado gli elementi chimici (caseina, albumina, lattosio, ecc.) e biologici (enzimi, vitamine, ecc.) del latte che sono evidentemente necessari alle attività batteriche. Per ottenere una maggior costanza ho trovato utile abbondare nella dose della semente, innestando ad esempio $\frac{1}{2}$ -1 cmc. di brodo-cultura in 10 cmc. di latte. Sapendo però per mia antica esperienza (1892) che la produzione di chimosina per opera dei batteri può verificarsi anche in substrati privi di caseina (brodo, agar), mi venne il sospetto che la coagulazione del latte fosse dovuta all'enzima eventualmente contenuto nella brodo-cultura. Ma ho ottenuto i medesimi effetti favorevoli aggiungendo al latte la stessa proporzione di brodo sterile, incapace per sè solo di coagulare, e seminando poi colla solita ansa di platino. Ciò veniva altresì a dinotare che la benefica influenza dell'abbondante semente era d'attribuire non tanto alla forte carica microbica quanto

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1926.

agli elementi costitutivi del brodo, e per vero ebbi un esito analogo aggiungendo al latte, invece del brodo, un po' di peptone oppure di estratto di carne Liebig; parimenti opportuna riuscì l'addizione di altre sostanze altamente nutritive, quali l'acqua di lievito oppure il sangue defibrinato recentemente proposto dal mio collaboratore dottor Callerio. Con tenuissime dosi di queste sostanze, che sono per se stesse incapaci di coagulare, si riesce, ad esempio, a dimostrare che anche lo *Streptococcus pyogenes* nonchè il *Pneumococcus* coagulano il latte, oppostamente all'opinione dominante che li vorrebbe differenziare dai comuni streptococchi saprofitici del latte (*Streptococcus lacticus*) per la loro incapacità di coagulazione.

Si porrebbe ora il quesito, quale elemento o quali elementi vengano deteriorati dalle temperature elevate nel latte per cui questo ha bisogno di essere compensato dalle succitate aggiunte. Siamo di fronte ad una reintegrazione della nutrizione azotata ovvero ad una influenza propizia di vitamine oppure di tamponi oppure di coenzimi che possono essere anche di natura minerale? La risposta non è facile; sarebbe certamente agevolata se si potessero fare le colture in latte non sterilizzato al calore ma raccolto amicrobico mediante mungitura asettica; senonchè questo ideale non è più raggiungibile dacchè io ho rivelato la presenza normale endomammaria dei mammococchi che escono inevitabilmente col latte. Ad ogni modo mi piace mettere in luce che le suddette aggiunte sembrano esercitare piuttosto una azione stimolante delle attività enzimatiche coagulanti e caseolitiche dei batteri anzichè un'azione eugenetica; infatti non si riscontrano sensibili diffe- renze nello sviluppo e nella carica microbica delle lattocolture semplici in confronto alle lattocolture addizionate degli stimolanti. Sorprendente a questo riguardo è la rapidità di coagulazione e di peptonificazione quasi improvvisa a cui si assiste con un'aggiunta postuma di lievito o di sangue a latte-colture già ben sviluppate da più giorni ma non peranco modificate; e la dose di stimolante necessaria all'uopo è tanto piccola da legittimare l'opinione trattarsi di una azione catalizzatrice.

Comunque sia da ciò, i suddetti reperti mi spinsero ad estendere le indagini al B. Tifoso; ne ebbi un esito affatto inopinato che rivela in questo germe attività del tutto nuove e singolarmente interessanti anche nei riguardi patologici. Le esperienze eseguite sopra numerosi ceppi (una cinquantina) provenienti da diversi Laboratori, mi diedero risultati concordi che si possono riassumere come segue:

Se si prende del latte sterilizzato per tindalizzazione, che abbia conservato il colorito bianco, e lo si semina con una quantità abbondante (5-10 per cento) di brodocoltura di B. Tifoso e si mantiene la coltura a temperatura non troppo elevata (30-35° C.) si osserva che dopo un'incubazione molto prolungata (di un mese almeno) il latte tende a limpidificarsi assumendo aspetto opalino, tinta leggermente gialla e reazione decisamente alcalina. Questo fenomeno di manifesta solubilizzazione della caseina, che va

intensificandosi lentamente col tempo, l'ho incontrato in tutti gli stipiti; per esso il B. Tifoso si diversifica nettamente dal B. Coli, mentre si avvicina a stipiti di B. Paratifi, di B. Enteritidis, di *Alcaligenes* che ho pure sottoposto ad esame. Quest'attività, che non si rivela finchè si usa latte sterilizzato all'autoclave e lo si semina colla solita ansa di platino, rappresenta già un fatto nuovo nella biologia del batterio di Eberth. Ma v'ha dell'altro.

Avendo io notato presso alcuni ceppi, durante la lunga incubazione, accenni fugaci di acidificazione, e ricordando l'esperienza fatta sugli *Streptococchi* piogeni e sul *Pneumococco* circa la labilità del potere coagulante a misura che il germe si allontana dalla data di suo isolamento dall'ammalato, ho pensato di concentrare le ricerche sopra ceppi appena estratti dal sangue dei tifosi, avendo avuto la fortuna di ottenerne sette dalla Clinica Medica dell'Università di Pavia. Volli inoltre accrescere l'effetto stimolante addizionando il latte sia con acqua di lievito, sia con sangue, in confronto col latte semplice. Sono venuto così in possesso di fatti inattesi, la cui singolarità garantita dalla sicurezza di aver lavorato con colture pure e virulente e dalla costanza dei risultati per tutti i sette stipiti esaminati, mi induce ad esporli nudamente in questa Nota preventiva riserbandomi di trarne argomento per un lavoro particolareggiato. Ecco in succinto quanto ho constatato sui ceppi di Clinica in piena virulenza:

1° Un acceleramento del sovraccennato processo di limpidificazione e alcalinizzazione del latte, con anticipazione di 10 a 15 giorni sui ceppi di Laboratorio; 2° Un successivo lento riaddensamento e riopacamento del latte, con progressiva ricomparsa del colorito bianco, progressivo inacidimento e coagulazione definitiva in capo ad altri venti a quaranta giorni. Questo fenomeno di reversione in cui si verifica una ricostituzione della caseina solubilizzata con ritorno al prisco stato colloidale è veramente fuori dell'ordinario; io non l'ho mai riscontrato nè nella letteratura nè in nessuna delle tante specie microbiche da me esaminate.

In conclusione, il meccanismo del batterio del tifo *virulento* nel latte presenta due fasi. Una prima fase di alcalinizzazione e solubilizzazione, per cui si allontana dal B. Coli, e una seconda fase di inacidimento e coagulazione per cui si avvicina al B. Coli. E poichè nel gruppo del B. Coli ho distinto due tipi, uno forte acidificatore capace di coagulare il latte per semplice acidificazione, che prevale nei ceppi di origine estranea all'organismo, e un secondo tipo debole acidificatore coagulante per via acido-presamica, che prevale nei ceppi di origine intestinale, soggiungerò che il bacillo del tifo, nella seconda fase, si approssima particolarmente al secondo tipo; infatti l'inacidimento dato dal bacillo del tifo non raggiunge mai un grado sufficiente alla coagulazione (come risulta dalle prove parallele in bianco); inoltre i suoi coaguli presentano fenomeni di retrazione con espulsione di siero acido come si verifica appunto nel B. Coli acido-presamico. Onde il bacillo del tifo verrebbe ad appartenere pur esso alla categoria dei miei fermenti misti o acidoproteolitici.

Notevole la coincidenza che anche nel gruppo degli Streptococchi ho potuto distinguere i suddetti due tipi e che il tipo forte acidificatore predomina fra i ceppi saprofiti, mentre il tipo acido-presamico predomina fra i ceppi parassiti.

Non intendo indugiarmi qui in ulteriori considerazioni, limitandomi per ora a lasciare intravedere come le mie ricerche sul comportamento dei batteri nel latte rivestano un'importanza inopinata non solamente per il biochimismo microbico speciale e generale, ma altresì per i riflessi eziologici riguardanti le malattie infettive fornendo nuovi criteri alla differenziazione dei germi patogeni dai germi similari.

RIASSUNTO.

In precedenti lavori ho dimostrato che, mediante opportune condizioni di ambiente e aggiunta di sostanze stimolanti, si riesce ad attivare le funzioni microbiche nel latte, e più particolarmente il potere coagulante e proteolitico in una serie di germi appartenenti ai gruppi dei fermenti lattici, del B. Coli, dei cocchi acidoproteolitici (*Mammococcus-Gastrococcus-Caseococcus-Enterococcus*), dello *Streptococcus-Pneumococcus* etc.

Ora, avendo esteso le mie ricerche al B. del tifo, sono riuscito a dimostrare che anch'esso, *in opposizione a quanto era fin qui ritenuto*, è capace di coagulare il latte, però con un meccanesimo del tutto nuovo e singolare, che lo differenzia dal B. Coli e da altri germi similari. Tale meccanesimo è molto lento e presenta due fasi: una prima fase alcalinizzante e solubilizzante, e una seconda fase acidificante e coagulante.

La prima fase è preceduta talora da un accenno fugace di acidificazione; onde vien fatto di pensare che il B. tifico è capace di attaccare il lattosio, ma, preferendo la caseina, proteolizza dapprima questa con produzione di basi alcalinizzanti; quando poi ha abbastanza demolito la caseina e si è creato un buon ambiente, si rivolge al lattosio con produzione di acidità.

Il passaggio dalla prima alla seconda fase sarebbe caratterizzato da un processo di reversione della caseina dallo stato disciolto allo stato colloidale.

Non sarebbe questo un esempio di correlazione e di mutuo appoggio fra Batteriologia e Chimica fisica?

BIBLIOGRAFIA

GOVINI C., 1. *Sul comportamento del B. Coli nel latte* («Rend. R. Acc. Lincei, febbraio 1920»). 2. *Ulteriori ricerche sulla microflora mammaria* («Rend. R. Acc. Lincei, gennaio 1925»). 3. *Sur le gastrococcus* («C. R. Acad. Sciences», 16-XI-925). 4. *Ueber die Eulerkokken* («Centr. f. Bakter.», II, 1926, 67°, p. 11). 5. *Action des streptocoques sur le lait* («C. R. Ac. Sc.», 12-IV-926). 6. *Sur les streptocoques acidoprotéolytiques* («C. R. Soc. Biologie», 12-VI-926). 7. *Stimulation des activités bactériennes dans le lait* («C. R. Ac. Sc.», 19-VII-926).

CALLERIO C., *Sul comportamento degli streptococchi piogeni nel latte* («Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett.», I-VII-926).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio prof. GARBASSO, assumendo la presidenza dell'assemblea, ringrazia nuovamente i Soci che gli attestarono la loro fiducia nominandolo vicepresidente dell'Accademia. Non ostante la perplessità nell'accettare tale carica, assicura che lavorerà per la prosperità e l'avvenire dell'Accademia. Aggiunge che questa non può separarsi dalla vita della Nazione, soprattutto nel momento attuale di rinascita italiana. Ricorda come il Capo del Governo Nazionale, S. E. Mussolini, il quale a questa rinascita dedica la sua opera geniale, è stato fatto segno, con esecuzione, di due attentati durante le ferie: sicuro d'interpretare i sentimenti di tutti i Soci, esprime la commozione degli Accademici Lincei per lo scampato pericolo del Duce e quanto essi siano lieti di averlo, per i destini della Patria, immune ed incolume. L'Assemblea consente plaudendo.

Il PRESIDENTE aggiunge che S. E. Mussolini, come dichiarò nel Congresso delle Scienze a Bologna, intende e vuole particolarmente interessarsi alle scienze sperimentali in Italia e che all'uopo ha nominato una Commissione, composta in parte da Soci dell'Accademia, allo scopo di coordinare il lavoro scientifico degli Istituti Italiani, in vista anche dei vantaggi che all'economia della Nazione possono derivare dagli studi di scienze pure e applicate. Propone di esprimergli con un telegramma la comune soddisfazione e la profonda gratitudine per l'impegno assunto di occuparsi dell'incremento delle Scienze sperimentali in Italia. I presenti si associano plaudendo alla proposta dell'on. Presidente.

Questi, a nome di tutta la Classe, rivolge un fervido saluto al Socio A. Martelli, chiamato dalla fiducia del Primo Ministro a far parte del Governo Nazionale.

Il PRESIDENTE comunica alla Classe che hanno ringraziato, per la nomina a Socio Nazionale i professori A. Ruffini, G. Levi, F. Severi, E. Giacomini, V. Aducco e il sen. P. Ginori Conti; per la nomina a Socio Corrispondente i professori G. Abetti, L. Petri, A. Dionisi, L. Rolla, G. Scorza, A. Stella e il barone on. G. A. Blanc; per la nomina a Socio Straniero i professori L. F. Hennequy, T. B. Robertson, A. P. Mathews, E. Cartan, W. W. Campbell, A. H. Compton e F. W. Aston.

Il PRESIDENTE dà il triste annunzio della morte del Socio Nazionale prof. A. Naccari, avvenuta in Torino il 2 ottobre 1926. Lasciando ad altri il compito di commemorare il compianto Socio in modo più degno ed esauriente, ne ricorda l'attività scientifica e soprattutto le sue ricerche

sui fenomeni termoelettrici e sul calore specifico. Con parole commoventi rievoca la nobile figura del prof. Naccari come maestro incomparabile e carissimo a tutti gli allievi, fra i quali annovera se stesso.

Il PRESIDENTE comunica che il prof. Tschermak ha mandato una lettera per ringraziare l'Accademia delle felicitazioni inviategli in occasione del 90° anniversario della sua nascita.

Il PRESIDENTE, per analoga richiesta degli autori, dissuggella un plico, spedito all'Accademia il giorno 21 giugno 1924 e rinchiuso nell'Archivio accademico il 4 luglio 1924; il plico contiene la Nota del Corrispondente L. Rolla e di L. Fernandes «Sopra un nuovo elemento: il Florenzio (numero atomico "61")» e la Nota della Sig.na dott. R. Brunetti «Sopra l'esistenza dell'elemento a numero atomico "61"»; perchè l'Accademia ne prenda atto il Presidente dà lettura di queste Note, facendo presente che gli autori ne domandano la pubblicazione sui «Rendiconti» con due postille pervenute all'Accademia il 20 ottobre 1926.

Il socio O. M. CORBINO, compreso dell'importanza delle Note stesse, propone che il testo sia gelosamente custodito nell'Archivio dell'Accademia e ne sia mandata in tipografia la copia. Propone inoltre che tale criterio si segua anche in altri casi simili; i Soci approvano all'unanimità.

L'on. PRESIDENTE presenta dodici plichi del Socio prof. E. Paternò, perchè siano conservati nell'Archivio dell'Accademia.

Presenta inoltre un plico del sig. Giuseppe Candiani, uno del signor Cesare Noè Mei e uno del dott. Vittorio Vanni, perchè siano conservati nell'Archivio dell'Accademia.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Il Socio prof. MILLOSEVICH, per incarico ed a nome del Socio Corrispondente L. BRUGNATELLI, sottopone all'esame di una Commissione la Memoria del prof. A. CAVINATO: «Nuove osservazioni sulle zeoliti del gruppo della natrolite (natrolite e metanatrolite, scolecite e metascolecite, mesolite e metamesolite)».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio prof. MILLOSEVICH (relatore), anche a nome del Socio F. ZAMBONINI, riferisce favorevolmente sulla Memoria del prof. F. RANFALDI: «Sullo zolfo rombico dell'isola di Vulcano (Eolie)» per l'inserzione negli Atti dell'Accademia. L'Accademia approva l'inserzione colle solite riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio LEVI-CIVITA, a nome del prof. UGO AMALDI e proprio, presenta in omaggio la parte prima del Vol. II delle loro « Lezioni di meccanica razionale ». Il volume è dedicato alla dinamica del punto e dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà. La seconda parte (che comprenderà i problemi particolari sul moto dei solidi, i sistemi canonici, i principi variazionali e gli impulsi) già si trova in corso di stampa.

In un campo così classico non si può ragionevolmente aspirare ad essere originali. Piuttosto gli AA. si lusingano di avere apportata in più punti discreta economia di pensiero, pur sottolineando le interpretazioni fisiche e avendo cura costante di sviscerarne il nesso con le formule.

In questo volume II, hanno trovato posto tra altro: una nuova discussione circa l'influenza della resistenza dell'aria sulla deviazione orientale dei gravi, la caratterizzazione dei riferimenti di minima energia, nonché alcuni contributi personali sullo spostamento dell'equilibrio, sulle equazioni del moto dei sistemi anolonomi, sulla stabilità e sulle piccole vibrazioni.

Il Socio Corrisp. L. LOMBARDI fa omaggio della IV edizione del suo « Corso teorico pratico di Elettrotecnica ».

Il PRESIDENTE si compiace con l'Autore per la meritata fortuna dell'opera.

L'accademico segretario prof. CASTELNUOVO presenta le opere giunte in dono, segnalando in particolare quelle dei Soci GINORI CONTI, MATTIROLO, SILVESTRI, SABBATANI, RUSSO e CLIFFORD DOBELL.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 novembre 1926

- ALDRICH J. M. — North American Two-Winged Flies of the Genus *Cylindromyia* Meigen. (Ocyptera of Authors) (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-27.
- ALLEN W. H. — North American Species of Two-Winged Flies belonging to the Tribe Miltogrammini. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-106.
- BATTAGLIA M. — Degenerazione grassa e necrosi acuta del fegato e del rene da *Trypanosoma Brucei*. (Estr. da « Patologica ». N. 417). Genova, 1926, 4°, pp. 1-2.
- BEZZI M. — A New Genus and Species of Borborid Flies from South America (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-6.
- CAMPBELL L. — Radio Talks from the Harvard Observatory. (Repr. from the « Scientific Monthly ». Vol. XXII, pagine 411-415). S. l., 1926, 8°.
- CAMI FAUD BASSLER R. S. — Studies on the Cyclostomatous Bryozoa. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67). Washington, 1926, 8°, pp. 1-124.
- CASTALDI L. — Scritti biologici. Siena, 1926, 8°, pp. 1-226.
- CHAUDET E. — Evolución de las Ciencias en la República Argentina. La Evolución de la Astronomía (1872-1922). Buenos Aires, 1926, 8°, pp. 1-87.
- COTOLA A. — Metastasi neoplastiche. Roma, 1925, 8°, pp. 1-343.
- CORRAL J. I. — Nueva solución del problema de Lord Kelvin sobre ecuaciones de coeficientes reales. Madrid, 1926, 8°, pp. 1-89.
- CORTESE E. — Studi e ricerche per petroli e rocce bitumifere in Campania, Puglie, Calabria, e Sicilia. Firenze, 1924, 8°, pp. 1-168.
- CRAM E. B. — A New Nematode from the Rat and its Life History. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-7.
- CRUMB S. E. — The Nearctic Budworms of the Lepidopterous Genus *Heliothis*. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-8.
- CUSHMAN J. A. — Foraminifera of the Genera *Siphogenerina* and *Pavonina*. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67). Washington, 1926, 8°, pp. 1-24.
- ID. — The New North American Ichneumon-Flies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67). Washington, 1926, 8°, pp. 1-13.
- DOBELL C. — On the cultivation of *Entamoeba histolytica* and some other Entozoic Amoebae. (From « Parasitology ». Vol. XVIII, pp. 283-318). Cambridge, 1926, 8°.
- ID. — On the species of *Isospora* parasitic in Man. (From « Parasitology ». Vol. XVIII, pp. 74-85). Cambridge, 1926, 8°.
- DOBELL C. and LAIDLAW P. P. — The Action of Ipecacuanka Alkaloids on

- Entamoeba histolytica* and some other Entozoic Amoebae in Culture. (From «Parasitology». Vol. XVIII, pp. 205-223). Cambridge, 1926, 8°.
- EULERIUS L. — *Commentationes Physicae*. Series III. Vol. I. Lipsiae, 1926, 4°, pp. 1-XXVIII, 1-590.
- EWING H. E. — A Revision of the American Lice of the Genus *Pediculus*, Together with a Consideration of the Significance of their Geographical and host Distribution. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-27.
- FISHER W. S. — Descriptions of New West. Indian Longicorn Beetles of the Subfamily Lamiinae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-40.
- FOSHAG W. F. — The Minerals of Obsidian Cliff Yellowstone National Park and their Origin. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-18.
- HERRERA L. A. — *Progresos de la Plasmogénia en 1925*. (Estr. da la «Semana Medica». N. XIV). Buenos Aires, 1926, 8°, pp. 1-30.
- HOXMARK G. — *Evolución de las Ciencias en la República Argentina. La Evolución de la Meteorología*. Buenos Aires, 1925, 8°, pp. 1-30.
- HUNG S.-L. — A New Species of Fluke, *Parametorchis Noveboracensis*, from the Cat in the United States. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 69). Washington, 1926, pp. 1-2.
- HUYGENS C. — *Œuvres complètes*. Tome XV. La Haye, 1925, 4°, pp. 1-618.
- KELLOG R. — Supplementary Observations on the Skull of the Fossil Porpoise *Zarhachis Flagellator* Cope. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 67). Washington, 1926, 8°, pp. 1-18.
- LASAREFF P. — General theory of Flickers in the Case of central and peripheral Vision. (From the «Journal experim. Biology». Pp. 93-109). Moscow, 1926, 8°.
- ID. — Les théories physico-chimiques de l'adaptation. (Extr. du «Journal experim. Biology». Pp. 103-130). Moscow, 1925, 8°.
- ID. — Sur des relations entre les anomalies de magnétisme terrestre et celles de gravité. (Extr. de «Le Journal de Physique et Radium». T. V, pp. 191-192). Paris, 1924, 8°.
- ID. — Sur les anomalies du magnétisme terrestre et de la gravité dans le Gouvernement de Kourse (Russie centrale). (Extr. de «Le Journal de Physique et Radium». T. V, pp. 180-190). Paris, 1924, 8°.
- ID. — Sur l'influence des images successives sur l'équation de l'adaptation visuelle. (Extr. du «Journal experim. Biology». Pp. 42-51). Moscow, 1926, 8°.
- ID. — The experimental Basis of the ionic Theory of peripheral Vision. (From the «Journal experim. Biology». Pp. 78-82). Moscow, 1925, 8°.
- ID. — The Kursk magnetic Anomaly. (From «Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity». 1925, pp. 11-14). S. 1., 1925, 8°.
- LEONE S. — *Profilassi del tracoma e visiva in provincia di Girgenti. III relazione*, 1925-1926. Siracusa, 1926, 4°, pp. 1-16.
- LEVI-CIVITA T. e AMALDI U. — *Lezioni di meccanica razionale*. Vol. II. Bologna, 1926, 8°, pp. 1-IX, 1-526.
- LOMBARDI L. — *Corso teorico-pratico di Elettrotecnica*. Vol. I, II. Milano, 1926, 8°, pp. 1-XII, 1-642; 1-XI, 1-869.
- LOCHYER W. J. S. — The spectrum of the Bright-Hydrogen-Line Stars H. D. C. 20336 in *Camelopardalis* (Sp. Type Bope). (Repr. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. LXXXVI, pp. 607-618). Edinburgh, 1926, 8°.

- LOCHYER W. J. S. — The Spectrum of Persei (Sp. Type Bope) throughout a complete Cycle (1925-1926). (Repr. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Volume LXXXVI, pp. 474-498). London, 1926, 8°.
- LOZANA N. and PAITOVÍ A. — Evolución de las Ciencias en la República Argentina. La higiene pública y las obras sanitarias Argentinas. Buenos Aires, 1925, 8°, pp. 1-33.
- LUYTEN W. J. — The Properties of Stars in the Solar Neighborhood. (Repr. from the «Scientific Monthly». Vol. XXII, pp. 494-498). London, 1926, 8°.
- MALLOCH J. R. — New Genera and Species of Acalyptrate Flies in the United States National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-35.
- ID. — Sistematic Notes on and Descriptions of North American Wasps of the Subfamily Brachycistiinae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-28.
- MARSHALL W. B. — New Fossil Fresh-Water Mollusks from Florida. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-4.
- MASSINI C. L. — Maurice Letulle, Banti, Golgi. Notizie, chiose e postille. (Estr. da «Le opere e i giorni. 1926»). Genova, 1926, 8°, pp. 1-15.
- MAY O. P. — A Collection of Pleistogene Vertebrates from Southwestern Texas. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-8.
- MEATEE W. L. — Revision of the American Leaf Hoppers of the Jassid Genus Typhlocyba. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pagine 1-47.
- PASTORE F. — Evolución de las Ciencias en la República Argentina. Nuestra Mineralogía y Geología (1872-1922). Buenos Aires, 1925, 8°, pp. 1-47.
- PEARL R. — Adam Smith on Medical Education and Related Matters. (Repr. from the «Journal of the American Medical Association». Vol. 85). Chicago, 1925, 8°, pp. 1-8.
- ID. — A synthetic Food Medium for the Cultivation of *Drosophila*. (Repr. from the «Journal of General Physiology». Vol. IX, N. IV, pp. 513-519). Baltimore, 1926, 8°.
- ID. — Some recent Biological Texts. (Repr. from «Biologia Generalis». Vol. I). S. l., s. d., 8°, pp. 1-4.
- ID. — Span of Life and Average Duration of Life. (Repr. from «Natural History». Vol. XXVI, pp. 26-30). New York, 1926, 8°.
- ID. — Statistical Characteristics of a Population composed of Necropsied Persons. (Repr. from the «Archives of Pathology and Laboratory Medicine». Vol. I, pp. 329-347). Chicago, 1926, 8°.
- ID. — The constitutional Element in the Etiology of Pneumonia. (Repr. from the «Proceedings of the Society for Experimental Biology and Medicine». Vol. XXIII, pp. 573-576). Baltimore, 8°.
- ID. — The Quarterly Review of Biology. Foreword (Repr. from the «Quarterly Review of Biology». Vol. I). Baltimore, 1926, 8°, pp. 1-3.
- ID. — Vital statistics of the National Academy of Sciences. I. Age at Election. (Repr. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Volume XI, pp. 751-768). Washington, 1925, 8°.
- ID. — Vital Statistics of the National Academy of Sciences. V. The Growth of the Academy. (Repr. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XII, pp. 258-261). Washington, 1926, 8°.
- PEARL R. and ALLEN A. — The influence of Alcohol upon the Growth of Seedlings.

- (Repr. from the « Jacques Loeb Memorial Volume, the Journal of General Physiology ». Vol. XIII, pp. 215-231). Baltimore, 1926, 8°.
- POPLAVSKY I. A. — Méthode et pratique de la statistique conjoncturale du transport des marchandises. Moscou, 1926, 8°, pp. 1-80.
- Proceedings of the Pan-Pacific Science Congress Australia, 1923. Vol. I, II. Melbourne, 1923, 8°, pp. I-XVIII, 1-1024; I-VIII, 1-1677.
- REYCHLER L. — De la possibilité de provoquer chez les plantes systématiquement: a) L'apparition de phénomènes vitaux nouveaux; b) La mutation. Bruxelles, 1926, 8°, pp. 1-75.
- ROSS C. S. — The Optical Properties and Chemical Composition of Glaucomte. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926, 8°, pp. 1-12.
- RUSSO A. — Studi sulla pesca nel golfo di Catania. (Estr. dal « Bollettino di pesca, di piscicoltura e di idrobiologia ». Anno II, fasc. III). Roma, 1926, 8°, pp. 1-47.
- RUSSO G. — Contributo alla conoscenza degli Scolytidi. Studio morfo-biologico del *Chaetoptelius Vestitus* (Muls. Rey) Fuchs e dei suoi simbrionti. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Volume XIX, pp. 103-260). Portici, 1926, 8°.
- SABBATANI L. — La Cattedra dei semplici fondata a Bologna da Luigi Ghini. Imola, 1926, 8°, pp. 1-43.
- SCARPA G. — Di una cura fisioterapica della pleurite e della tubercolosi polmonare mediante un nuovo apparecchio detto « Emi-Esotorace pneumatico ». (Estr. dal « Giornale della Reale Accademia di Medicina di Torino ». Vol. XII, fasc. VI-VII). Torino, 1906, 8°, pagine 1-6.
- ID. — Di un metodo razionale di terapia che guarisce sistematicamente la tubercolosi polmonare e le pleuriti. Torino, 1926, 8°, pp. 1-35.
- SCARPA G. — Nuova cura fisio-meccanica della tubercolosi polmonare e della pleurite mediante l'« Emi-Esotorace pneumatico ». Torino, 1907, 8°, pp. 1-45.
- SCHWARTZ B. — Parasitic Nematodes from China. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-9.
- SHAEMAKER C. R. — Amphipods of the Family Bateidae in the Collection of the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-26.
- SILVESTRI F. — Descrizione di tre specie di *Prospaltella* e di una di *Encarsia* (Hym. Chalcididae) parassite di *Aleurocanthus* (Aleyrodidae). (Estr. da la « Revista Española de Entomología 'Eos' ». Tomo II, pp. 179-189). Madrid, 1926, 8°.
- SNYDER T. E. — Termites Collected on the Mulford Biological Exploration to the Amazon Basin. 1921-1922. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-76.
- SPRINGER E. — Unusual Forms of Fossil Crinoids. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67). Washington, 1926, 8°, pagine 1-135.
- Structure et activité chimiques; deuxième Conseil de Chimie. Paris, 1926, 8°, pp. 1-672.
- SUŠKIN P. — List and distribution of birds of the Russian Altai and nearest parts of N. W. Mongolia, with a description of new or imperfectly known forms. Leningrad, 1925, 8°, pp. 1-78.
- TIMBERLAKE P. H. — Miscellaneous New Chalcid-Flies of the Hymenopterous Family Eucyrtidae. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926, 8°, pp. 1-34.
- ULRICH E. O. and BASSLER R. S. — A Classification of the Toothlike Fossils, Co-

- nodonts, with Descriptions of American Devonian and Mississippian Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-63.
- VERRI A. — Commemorazione di Antonio Verri, tenente generale del genio, tenuta a Città della Pieve da Gioacchino De Angelis d'Ossat, (21-IV-1926). Perugia, 1926, 8°, pp. 1-22.
- VILLAVECCHIA G. V. — Dizionario di merceologia e di chimica applicata. Vol. IV. Milano, 1926, 8°, pp. 841-1803.
- WELD L. H. — Field Notes on Gall-Inhabiting Cynipod Wasps with Descriptions of New Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 68). Washington, 1926, 8°, pp. 1-131.

G. C.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 novembre 1926.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Un lemma sul prolungamento nel corpo complesso di talune algebre reali.* Nota del Corrisp.⁽¹⁾ G. SCORZA.

Per una ricerca sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito che costituirà l'oggetto di una Nota successiva giova stabilire a parte il seguente lemma:

Se \bar{B} è il prolungamento nel corpo complesso di un'algebra reale B , la quale sia il prodotto diretto di un'algebra primitiva P di ordine 2 e di un'algebra regolare R di ordine p^2 , \bar{B} è la somma diretta di due algebre regolari \bar{R}' ed \bar{R}'' , di ordine p^2 ; e, se per un elemento x di B (indi anche di \bar{B}) si ha

$$x = x' + x''$$

con \bar{x}' in \bar{R}' ed x'' in \bar{R}'' , la traccia di \bar{x}' in \bar{R}' e quella di x'' in \bar{R}'' sono numeri complessi coniugati.

Senza venir meno alla generalità si può supporre che P ed R abbiano entrambe per modulo quello di B e che quindi gli elementi di P ed R siano anche elementi di B .

Allora P ed R saranno certo prolungabili nel corpo complesso, e, detti \bar{P} ed \bar{R} i loro prolungamenti rispettivi, sarà

$$\bar{B} = \bar{P} \times \bar{R}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1926.

Giacchè P è un'algebra reale primitiva di ordine 2, P è somma diretta di due algebre regolari (di ordine 1) \bar{P}' e \bar{P}'' (C. N., p. 397, numero 288)⁽¹⁾; quindi, se si pone

$$\bar{R}' = \bar{P}' \times \bar{R} \quad \text{ed} \quad \bar{R}'' = \bar{P}'' \times \bar{R},$$

\bar{R}' ed \bar{R}'' sono algebre regolari di ordine p^2 ed è

$$\bar{B} = R' \dot{+} R''.$$

Ciò posto, sia u il modulo di B (P ed R) e v un elemento di P per il quale sia $v^2 = -u$ (C. N., p. 398); inoltre siano \bar{u}' ed \bar{u}'' i moduli di \bar{P}' e \bar{P}'' .

Badando che \bar{u}' ed \bar{u}'' sono i soli automoduli di \bar{P} , diversi da u (C. N., p. 322), si riconosce subito che u' ed u'' sono dati da

$$\frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot v,$$

quindi possiamo supporre

$$u' = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot v \quad \text{e} \quad u'' = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot v.$$

Segue che, se

$$y = \alpha u + \beta v,$$

con α e β numeri reali, è un qualunque elemento di P , essendo

$$\alpha u + \beta v = (\alpha - \beta\sqrt{-1})\bar{u}' + (\alpha + \beta\sqrt{-1})\bar{u}'',$$

le coordinate di y in \bar{P} , rispetto ad \bar{u}' e \bar{u}'' , sono numeri complessi coniugati.

Ciò posto, siano $w_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, p$) p^2 elementi indipendenti di R .

Essendo $B = P \times R$, per l'elemento x di B (C. N., p. 245) sussisterà un'eguaglianza del tipo

$$x = \sum_{i,j}^{1 \dots p} y_{i,j} w_{i,j},$$

con le $y_{i,j}$ elementi di P ; e dunque sarà

$$y_{i,j} = \lambda'_{i,j} \bar{u}' + \lambda''_{i,j} \bar{u}'',$$

(1) Con la sigla C. N. si intende di richiamare il trattato: *Corpi numerici e algebre*, da me pubblicato presso la Ditta Principato di Messina nel 1921.

con $\lambda'_{i,j}$ e $\lambda''_{i,j}$ numeri complessi coniugati, e

$$x = \bar{u}' \sum_{i,j}^{1\dots p} \lambda'_{i,j} w_{i,j} + \bar{u}'' \sum_{i,j}^{1\dots p} \lambda''_{i,j} w_{i,j}.$$

Di qua, badando che x si può decomporre in un modo solo nella somma di un elemento di R' ed un elemento di R'' , si trae che

$$\bar{x}' = \bar{u}' \sum_{i,j}^{1\dots p} \lambda'_{i,j} w_{i,j} \quad \text{ed} \quad \bar{x}'' = \bar{u}'' \sum_{i,j}^{1\dots p} \lambda''_{i,j} w_{i,j}.$$

Ora le $\lambda'_{i,j}$ (le $\lambda''_{i,j}$) sono le coordinate di \bar{x}' (di \bar{x}'') rispetto alle unità di R' (di R'') date dai prodotti $\bar{u}' w_{i,j}$ ($\bar{u}'' w_{i,j}$), dunque, dall'essere numeri complessi coniugati $\lambda'_{i,j}$ e $\lambda''_{i,j}$, segue che tali sono pure la traccia di \bar{x}' in R' e quella di \bar{x}'' in R'' .

Meccanica celeste. — *Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili.* Nota⁽¹⁾ del Socio Corrisp. G. ARMELLINI.

1. Recentemente il Vogt, in un importante articolo⁽²⁾ sopra la diminuzione che subisce la massa delle stelle a causa dell'energia irradiata, ha richiamato l'attenzione degli astronomi sul problema dei due corpi di masse variabili. Il Vogt calcola che il Sole perda per irradiazione circa quattro milioni di tonnellate al minuto secondo e che le stelle di massa maggiore subiscano una perdita non solo assolutamente ma anche relativamente più grande. Se dunque sono esatte le nostre idee sulla trasformazione della materia in energia, è chiaro che non sarà impossibile verificare con le osservazioni astronomiche gli effetti di questa lenta diminuzione di massa. In proposito il Vogt attira l'attenzione degli astronomi sopra le stelle doppie, notando che le più giovani, appartenenti ai primi tipi spettrali, hanno in media orbite meno ampie e meno eccentriche delle altre; ciò che mostra che, in progresso di tempo, le orbite dei sistemi binari aumentano di dimensioni e di eccentricità.

Il primo incremento è in perfetto accordo con l'ipotesi di una lenta diminuzione della massa totale del sistema⁽³⁾, mentre per il secondo non

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1926.

(2) Cfr. H. VOGT, *Die Massenabnahme der Sterne infolge Ausstrahlung von Energie*, «Scientia», 1925, CLXIII.

(3) Cfr. G. ARMELLINI, *Un teorema sul problema dei due corpi di masse crescenti*, «Rend. Lincei», 1925, 1° sem., fasc. 11.

possiamo ancora dir nulla, non essendo il problema integrabile e non potendo ricorrere ai noti teoremi del Lehmann e del Poincaré (1), secondo cui l'eccentricità osculatrice resta costante, giacchè questi teoremi sono validi solo per breve tempo e per piccole variazioni della massa del sistema.

In conseguenza ho creduto utile di esaminare più profondamente la questione; ed in particolare nella presente Nota, mi propongo di *ricercare le condizioni a cui deve soddisfare la legge, secondo cui la massa del sistema varia col tempo, affinchè l'eccentricità osculatrice resti costante*. In proposito indicherò con $m(t)$ la massa stessa, variabile col tempo t , supponendo solo che $m(t)$ sia funzione continua e derivabile due volte rispetto a t .

2. Chiamando con r il raggio vettore, con ϑ la longitudine vera, con ω la longitudine del periastro, con p il parametro e con e l'eccentricità della conica osculatrice K , si ha

$$(1) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\vartheta - \omega)}$$

dove gli elementi osculatori p , e , ω , sono costanti se la massa del sistema rimane costante, mentre nel caso opposto variano generalmente col tempo. Dal teorema delle aree, ponendo uguale all'unità il coefficiente attrattivo f e la costante delle aree c si ha poi facilmente (2):

$$(2) \quad p = \frac{1}{m(t)}$$

onde la (1) può scriversi più semplicemente:

$$(3) \quad \frac{1}{r} = m \{ 1 + e \cos(\vartheta - \omega) \}.$$

Ciò posto immaginiamo che in un istante t la massa del sistema s'incrementi di dm passando da m ad $m + dm$ e siano $p + dp$, $\omega + d\omega$, $e + de$ gli elementi della nuova conica osculatrice K' . Poichè la conica K' deve passare per la posizione occupata dall'astro nell'istante t ed essere ivi tangente all'antica conica osculatrice K , avremo dalla (3) con calcoli analoghi a quelli già eseguiti altra volta (3):

$$(4) \quad dm + dme \cos(\vartheta - \omega) + mde \cos(\vartheta - \omega) + me \sin(\vartheta - \omega) d\omega = 0$$

$$(5) \quad dme \sin(\vartheta - \omega) + mde \sin(\vartheta - \omega) - me \cos(\vartheta - \omega) d\omega = 0$$

(1) LEHMANN, *Ueber Centralbewegungen*, « Astr. Nachr. », 3479; POINCARÉ, *Hypothèses Cosmogoniques*, p. 75 (Paris, 1913, 2^e ed.).

(2) Cfr. ARMELLINI, nota citata.

(3) Cfr. ARMELLINI, « Rend. Lincei », nota citata.

da cui moltiplicando per $\cos(\vartheta - \omega)$ e $\sin(\vartheta - \omega)$ e sommando abbiamo

$$(6) \quad dm \cos(\vartheta - \omega) + edm + mde = 0.$$

Analogamente moltiplicando per $\sin(\vartheta - \omega)$ e $\cos(\vartheta - \omega)$ e sottraendo si avrebbe:

$$(7) \quad dm \sin(\vartheta - \omega) + mcd\omega = 0.$$

Ammettiamo ora, secondo la nostra ipotesi, che l'eccentricità osculatrice e debba conservarsi costante ed eguale p. es. ad E . Si ha allora $de = 0$ e quindi la (6) ci dà

$$(8) \quad E + \cos(\vartheta - \omega) = 0.$$

Questa equazione ci mostra subito che deve aversi $E \leq 1$ e cioè che il caso di eccentricità osculatrice costante non può verificarsi per orbite iperboliche⁽¹⁾; ci mostra inoltre che deve aversi $\vartheta - \omega = \text{cost}$ e cioè che in questa ipotesi la linea apsidale deve ruotare con velocità angolare eguale a quella dell'astro.

Sostituendo ora nella (3) abbiamo:

$$(9) \quad \frac{1}{r} = m(1 - E^2).$$

Ciò posto ricordiamo che nel problema dei due corpi, ponendo sempre eguale all'unità la costante delle aree ed il coefficiente attrattivo, il raggio vettore è legato al tempo dalla ben nota equazione:

$$(10) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{r^3} - \frac{m}{r^2}$$

la quale, sostituendo al posto di r il suo valore dato dalla (9), diviene con calcoli elementari:

$$(11) \quad \frac{d^2 m}{dt^2} - \frac{2}{m} \left(\frac{dm}{dt} \right)^2 = m^3 E^2 (1 - E^2)^3.$$

Ponendo $m = x$ e $\frac{dm}{dt} = y$ la (11) si abbassa al primo ordine riducendosi a

$$(12) \quad y \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y^2 = x^3 E^2 (1 - E^2)^3$$

(1) Ulteriori considerazioni fanno immediatamente escludere anche il caso di orbita osculatrice parabolica, giacchè per $E = 1$ la (9) darebbe $r = \infty$.

che diviene:

$$(13) \quad \frac{d\chi}{dx} - \frac{4}{x} \chi = 2 x^5 E^2 (1 - E^2)^3$$

con la sostituzione:

$$(14) \quad y = \left(\frac{dm}{dt} \right)^2 = \chi.$$

Essendo E costante, la (13) è un'equazione differenziale lineare che s'integra immediatamente dando:

$$(15) \quad \chi = E^2 (1 - E^2)^3 x^6 + c x^4$$

dove con c abbiamo indicato la costante arbitraria.

Sostituendo nella (14) si ha

$$(16) \quad t = c_1 + \int \frac{dm}{m^3 \sqrt{\frac{c}{m^2} + E^2 (1 - E^2)^3}}$$

essendo c_1 la nuova costante arbitraria.

La quadratura si esegue facilmente ponendo:

$$(17) \quad \frac{c}{m^2} + E^2 (1 - E^2)^3 = M$$

ciò che la trasforma in:

$$(18) \quad t = c_1 - \frac{1}{2c} \int \frac{dM}{\sqrt{M}}.$$

Eseguita l'integrazione e sostituito al posto di M il suo valore dato da (17) abbiamo infine:

$$(19) \quad m(t) = \frac{1}{\sqrt{c t^2 + 2 c c_1 t + c c_1^2 - \frac{E^2 (1 - E^2)^3}{c}}}$$

od anche, chiamando per semplicità i coefficienti costanti con $a_0, 2 a_1, a_2$:

$$(20) \quad m(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0 t^2 + 2 a_1 t + a_2}}.$$

È questo il caso d'integrabilità del Mestschersky⁽¹⁾, che è quindi l'unico in cui l'eccentricità osculatrice possa essere costante, ben inteso ammettendo la continuità e derivabilità di $m(t)$. In particolare, ponendo $E = 0$ si vede che, affinché l'orbita osculatrice possa essere costantemente circolare, è necessario che il polinomio sotto al segno di radice nella (19) si riduca ad un quadrato perfetto, e cioè che si abbia:

$$(21) \quad m(t) = \frac{1}{at + b}$$

essendo a e b costanti⁽²⁾.

Idromeccanica. — *Una notevole eccezione del teorema di Kutta Joukowski.* Nota di U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Su di un fenomeno termico residuo.* Nota⁽¹⁾ del Socio Q. MAJORANA.

In relazione ad altre ricerche, di cui spero dar notizia fra qualche tempo, ho avuto occasione, negli ultimi anni, di sperimentare con un dispositivo termostatico, che mi ha offerto la constatazione di un fenomeno imprevisto, quantunque la spiegazione di esso non appaia difficile.

Ho così rilevato che alcuni corpi, e in particolare dei metalli (sinora ho solo sperimentato col piombo, col ferro e col rame), se riscaldati notevolmente, e poi raffreddati sino alla temperatura ambiente, presentano sovrarelevazioni termometriche non giustificabili con le ben note leggi del progressivo raffreddamento dei corpi.

Accenno senz'altro alla disposizione più opportuna, che mi ha permesso la constatazione dell'accennato fenomeno. In una cassa di legno foderata di zinco, indicata nella figura, che è puramente schematica, trovasi dell'acqua

(1) Cfr. MESTSCHERKY, *Ueber die Integration der Bewegungsgleichungen in Problem zwei Körper von veränderlicher Masse*, « Astr. Nach. », 3807.

(2) Un problema analogo sarebbe quello di ricercare i casi in cui la linea degli apsidi non ruota, in cui si ha cioè $\omega = \text{costante}$. Dalla (7) si ha allora:

$$dm \sin(\vartheta - \omega) = 0$$

e quindi o dm sempre nullo, ciò che riconduce al caso di masse costanti, oppure $\vartheta - \omega = K\pi$ essendo K un intero. Essendo però allora $\omega = \text{costante}$ per ipotesi, ne risulta immediatamente $\vartheta = \text{costante}$ e quindi ricadiamo nel caso eccezionale del moto rettilineo, in cui cioè la costante delle aree è nulla. Tutto ciò naturalmente ammettendo $m(t)$ continua e derivabile.

(3) Presentata nella seduta del 7 novembre 1926.

tenuta in permanente agitazione meccanica mediante quattro agitatori a palette mossi da un motorino elettrico di $\frac{1}{10}$ di cavallo. Gli agitatori non sono indicati nella figura.

La temperatura dell'acqua è mantenuta costante, con una approssimazione di $\frac{1}{100}$ di grado centigrado circa. Per ottenere tale risultato, due resistenze elettriche, immerse nell'acqua ed isolate elettricamente da questa, possono essere attraversate da correnti elettriche comandate da due relais (un primario ed un secondario). Questi relais sono messi in funzione da un regolatore termico, costituito da un dilatometro ad alcool e mercurio che

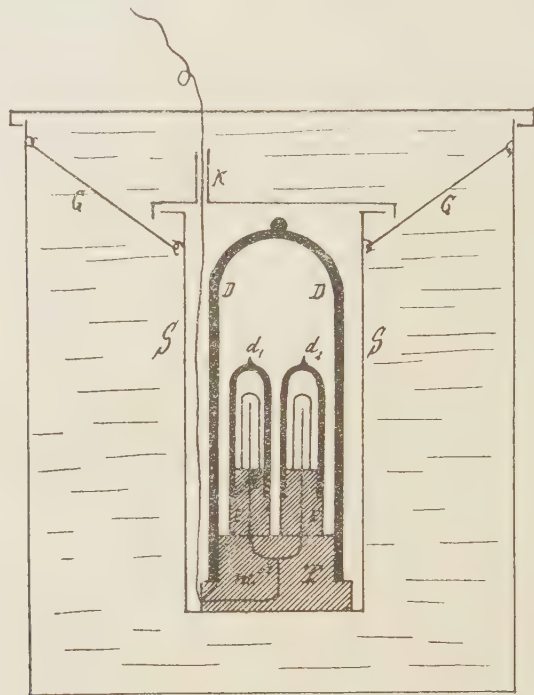


Fig. 1.

chiude od apre il circuito del relais primario. Poichè la colonna di mercurio di tale dilatometro si sposta per circa 10 cm. per ogni grado centigrado, si comprende come possa avvenire il regolaggio con la predetta sensibilità e precisione. Le due resistenze, disposte in parallelo, sono attraversate da una corrente di circa 1 ampère complessivamente, prelevata dalla conduttura stradale di corrente alternata a 120 volt.

Da quanto si è detto, deriva che necessariamente la temperatura del termostato deve essere superiore a quella dell'ambiente. Tale sovraelevazione può variare a seconda dei casi da uno sino a cinque gradi circa. Ma è bene che lo squilibrio tra la temperatura del termostato e quella media dell'ambiente sia il minimo possibile. Inoltre, perchè l'apparecchio funzioni con

la massima regolarità, la temperatura dell'ambiente in cui si esperimenta, non deve variare troppo, nel corso delle ventiquattro ore. Tuttavia ottime osservazioni si possono fare se tali variazioni non superano i due gradi circa.

Le esperienze di cui dirò, possono avere una durata di più settimane ciascuna. Per cui il motorino, gli agitatori, il regolatore a relais con il dilatometro, debbono necessariamente funzionare ininterrottamente per tale periodo di tempo. Speciali accorgimenti ho adottato per assicurare tale continuità. In particolare il motorino per gli agitatori, è bene che sia a corrente alternata trifase e senza spazzole.

Completamente immersa nell'acqua del termostato, si trova una scatola cilindrica SS di ottone del diametro di cm. 25 e dell'altezza di cm. 50. Essa è sospesa mediante i ganci GG alle pareti della cassa. Nell'interno di SS è collocato un grande tubo dewar cilindrico di porcellana DD, con la bocca rivolta in basso. Il suo diametro interno è di cm. 13 e l'altezza cm. 40. Esso è chiuso in basso mediante un tappo T di legno duro, secco e ben verniciato. Talvolta ho modificato tale chiusura adoperando un tubo sferico dewar che penetra nell'interno di D.

La scatola di ottone è fornita di speciali tubi come K, che emergono dalla superficie dell'acqua del termostato, destinati a lasciar uscire opportune connessioni elettriche, dall'interno del grande dewar.

Esperienze preliminari mi hanno permesso di constatare, che, se è verificata la costanza della temperatura dell'acqua dentro il centesimo di grado come si è detto, quella nell'interno del dewar (che dirò in seguito semplicemente *interno del termostato*) è verificata dentro il millesimo; e ciò con tutta precisione, durante il periodo di esperimento, che, come si è detto, può anche essere di più settimane.

Nell'interno del termostato sono collocati due piccoli dewar cilindrici d_1, d_2 del diametro interno di cm. 3 e alti cm. 10. Essi hanno i loro assi posti verticalmente e sono accostati l'uno all'altro. Opportuni tappi EE di sostanze poco conduttrici del calore, non porose, e non alterabili (come vetro, ebanite, porcellana, ecc., e non sughero, stoffa, legno, ecc.), servono a chiudere le bocche dei due dewar. È essenziale osservare tale criterio nella scelta dei tappi, perchè ho dovuto osservare che in generale le sostanze ora indicate come da escludersi, danno luogo a produzione od assorbimento di calore in modo notevole, variabile da caso a caso e col tempo. Ciò dicasi particolarmente per le sostanze porose. Quando cominciai a sperimentare, non avendo posto mente alla possibilità di tale fatto, adoperavo frequentemente sughero o stoffe di lana. Orbene i risultati delle osservazioni in tal modo eseguite, erano frequentemente affetti da errori grossolani, che spesso mascheravano il fenomeno di cui sarà fatto qui parola. L'ebanite ben lavorata e lucidata è un materiale ottimo per lo scopo.

A traverso le due chiusure EE, penetrano nell'interno dei dewar, le estremità di una pinza termoelettrica costituita di solito da un certo numero

di coppie di costantana e rame o costantana e ferro. La pinza è, così, piegata due volte ad angolo retto, con le sue estremità rivolte in alto. Dal suo punto medio m emergono i due reofori di rame che uscendo, come si è detto, dall'interno del termostato, vanno ad un galvanometro con convenienti caratteristiche. Così per es., con una pinza di 9 coppie di costantana e ferro, lunga cm. 25, un galvanometro Kipp, di estrema prontezza e completamente aperiodico, ha una sensibilità di mm. 1530 per grado centigrado, su una scala posta a m. 1.50 dal galvanometro. Non è questa però la massima sensibilità da me usata: in certi casi essa è stata portata a valori circa dieci volte maggiori.

Le prime esperienze che mi lasciarono intravedere il fenomeno, furono eseguite col piombo. Ma poichè questo metallo, come è noto, si ricopre in pochi giorni di un ossido superficiale, mi venne il dubbio (giustificato da controlli di cui qui non parlo) che tale processo di ossidazione potesse in qualche modo costituire una delle cause dei fatti osservati. Dopo parecchie serie di osservazioni col piombo, passai ad adoperare del ferro e dell'acciaio. E ho osservato che per questi materiali, specialmente per il secondo, l'effetto che ora descriverò assume valori veramente cospicui.

Dentro i due dewar d_1 d_2 sono dunque introdotti due cilindri di ferro o meglio di acciaio del peso ciascuno di circa gr. 300. Ciascuno di essi ha un foro assiale, nel quale comodamente può entrare la corrispondente estremità della pinza termoelettrica.

I due cilindri di ferro o di acciaio differiscono per la loro preparazione. Uno di essi, p. es. quello in d_1 (che dirò A), è ricavato da un blocco di metallo non recentemente sottoposto a riscaldamenti, lavorato al tornio e pulimentato. L'altro, in d_2 (che dirò B), ha la stessa origine; ma, subito dopo la sua lavorazione, è stato arroventato al rosso aranciato, e a seconda dei casi lasciato raffreddare lentamente o bruscamente temperato in acqua fredda. Sembrami che le migliori condizioni per osservare il fenomeno, corrispondano all'adoperare acciaio, e al sottoporlo alla tempera, come si è detto. Anche B è poi pulimentato al tornio come A. Ma successivamente i due cilindri A e B, sono entrambi posti in acqua corrente, l'uno accanto all'altro, e lì, lasciati per un'ora circa. Poi, asciugati e lasciati all'aria della stanza per un'altra ora circa. Infine essi vengono introdotti nel termostato, rispettivamente chiudendoli nei dewar d_1 e d_2 ; avvertendo inoltre di non provocare in essi, col maneggiarli, probabili notevoli squilibri termici.

Chiuso allora il grande dewar di porcellana; fermata ermeticamente la scatola di ottone SS, questa viene calata dentro l'acqua del termostato, che è agitata e regolata termicamente nel modo sopraccennato.

Comincia allora il periodo di osservazione. E si nota subito uno squilibrio accidentale di temperatura, che inevitabilmente fa uscire l'immagine luminosa data dallo specchietto del galvanometro, dai limiti della scala, in un senso o nell'altro. Occorrono di solito dai due ai tre giorni, perchè tale

squilibrio accidentale scompaia del tutto. Ma dopo tale periodo, si nota sempre che il cilindro B ha una temperatura più elevata del cilindro A. Tale sovraelevazione può corrispondere a più centimetri di deviazione sulla scala del galvanometro, e sino a 15 circa, nel caso in cui si tratti di acciaio. Se dunque B è d'acciaio, esso apparisce, nelle indicate condizioni, più caldo di A, per più di $\frac{1}{10}$ di grado. Esperienze di controllo mi hanno fatto vedere che se i cilindri A e B sono stati preparati esattamente nelle stesse condizioni, il galvanometro non accusa, dopo un paio di giorni circa, alcuna sensibile deviazione.

Ma la constatata deviazione, che come si è detto può anche essere di circa 15 cm., va gradatamente diminuendo col tempo. Dopo altri due giorni è ridotta a metà circa; dopo otto giorni a circa un decimo; e occorrono più settimane perchè essa possa dirsi praticamente scomparsa.

Mi sono voluto rendere conto dell'ordine di grandezza della quantità di calore che corrisponde alle sovraelevazioni di temperatura constatate. A tal uopo ho rimosso dai due dewar i due cilindri A e B. E nell'interno di uno di essi ho introdotto una piccolissima lampadina elettrica da 500 ohm di resistenza. Avendo rimontato il termostato, in guisa da ristabilire l'equilibrio termico tra i due dewar (la qual cosa è così assai rapida, giacchè le capacità calorifiche dei loro spazi interni sono divenute piccolissime per la rimozione di ogni corpo), ho inviato nella lampadina una corrente elettrica tale da produrre stabilmente una deviazione del galvanometro, paragonabile a quella osservata quando i due cilindri A e B erano nell'interno dei dewar. Con una corrente di circa 0.0012 ampère si ha una deviazione di cm. 13 nel galvanometro, che rimane costante fintanto che dura la corrente stessa. La differenza di potenziale ai reofori della lampadina riscaldante risulta di circa 0.5 volt; per cui, si può dire, che il consumo di energia è di watt $0.5 \times 0.0012 = 0.0006$. Questa energia corrisponde a quella emessa nei primi tempi (dopo la sua tempera e la sua introduzione nel termostato) dal cilindro di acciaio B, che, come si è detto, ha una massa di gr. 300.

*
* *

Il ferro, come si è detto, dà un effetto meno notevole, ma sempre comparabile a quello dell'acciaio. Il piombo dà un effetto assai più piccolo, ma complicato dalla sua progressiva ossidazione. Il rame dà un effetto che per ora mi è apparso dubbio.

Occorre eseguire una serie molto numerosa e necessariamente assai lunga di determinazioni, per passare in rivista gli altri metalli ed eventualmente gli altri corpi solidi.

Probabilmente i liquidi non possono manifestare l'effetto, in conseguenza della loro struttura fluida.

Inoltre sarà interessante vedere se un effetto diverso a quello constatato, può osservarsi raffreddando, anzichè riscaldando, i corpi.

Mi piace poi richiamare l'attenzione dei fisici e dei chimici sul termostato da me adottato, e ciò indipendentemente dal constatato fenomeno. Tale apparecchio potrà rendere utili servizi nello studio o nella ricerca di formazioni di piccolissime quantità di calore, quali lente modificazioni di carattere fisico, lenti processi chimici, come ossidazioni e simili, lente trasformazioni allotropiche, ecc. In tali casi potrà darsi che le piccolissime quantità di calore che in ogni istante si formino, accumulandosi progressivamente, finiscano per dare sensibili squilibri termici.

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.* — VII. *Solfati di lantanio e ammonio*⁽¹⁾. Nota del Socio F. ZAMBONINI e della dott.ssa A. STOLFI⁽²⁾.

Continuando le nostre ricerche⁽³⁾, daremo conto, nella presente Nota, dei risultati ottenuti mediante lo studio di una parte del sistema $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$ — $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$, come al solito per l'isoterma di 25° , e seguendo i metodi già impiegati nei sistemi analoghi studiati⁽⁴⁾.

Di solfati doppi di lantanio e ammonio sono stati finora descritti, almeno per quanto ci è noto, i seguenti:

$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$	o	1 — 1 — 8
$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	o	1 — 1 — 2
$2\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot$	o	2 — 5
$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	o	1 — 5

Di questi, il primo è stato preparato e studiato dal Marignac⁽⁵⁾, il quale ne ha anche determinato la forma cristallina monoclina: più com-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1926.

(3) Cfr. le Note di ZAMBONINI e CAROBBI, ZAMBONINI e CAGLIOTI, ZAMBONINI e RESTAINO pubblicate nei « Rendiconti » di questa Accademia a partire dal 2° semestre 1924.

(4) Cfr. la Nota di ZAMBONINI e RESTAINO, *Sui solfati di cerio (ceroso) e ammonio*. « Rend. R. Accad. Lincei » (6*), 1926, 1° sem., III, 178.

(5) *Œuvres*, I, 393. Nel *Lexikon der anorganischen Verbindungen* di M. K. HOFFMANN (Bd. I, 2^{te} Hälfte, Leipzig, 1919, p. 1524) è indicato anche un monoidrato



come preparato da Marignac, e con riferimento alla p. 393 del vol. I delle *Œuvres*. Ma nè alla p. 393, nè negli altri lavori del Marignac, io ho trovato ricordato quel composto, che non si trova nemmeno menzionato da Clève negli articoli sul lantanio scritti per il GMELIN-KRAUT's *Handbuch der anorganischen Chemie* e per l'*Encyclopédie Chimique* di FRÉMY.

plete e recenti indagini cristallografiche sono dovute a E. H. Kraus⁽¹⁾. Clève⁽²⁾, dal canto suo, constatò che i cristalli perdono a 100° sette delle otto molecole di acqua di cristallizzazione in essi contenute.

Gli altri tre sali sono stati ottenuti dal Barre⁽³⁾ in un lavoro sistematico sui solfati doppi di lantanio e ammonio.

I risultati da noi ottenuti sono riuniti nella seguente

TABELLA I.

N. dell'espe- rienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo				Costituenti il corpo di fondo
	$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	H_2O	$\frac{(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	H_2O	$\frac{\text{La}_2(\text{SO}_4)_3}{(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4}$	
1	0.88	6.24	92.88	0.067	92.29	13.82	3.89	5.95	$1-1-2+$ $+ \text{La}_2(\text{SO}_4)_3 9\text{H}_2\text{O}$
2	0.88	6.26	92.86	0.0674	77.08	18.00	4.92	4.28	
3	0.75	7.19	92.06	0.068	77.24	17.99	4.77	4.29	
4	0.73	11.11	88.16	0.126	77.19	18.05	4.76	4.27	$1-1-2$
5	0.34	14.48	85.18	0.170	77.22	17.94	4.84	4.30	
6	0.32	22.89	76.79	0.298	77.15	17.90	4.95	4.31	
7	0.30	22.80	76.90	0.296	67.52	30.07	2.41	2.24	$1-1-2+$ $+ 1-3$
8	0.28	25.12	74.60	0.336	58.70	41.10	—	1.43	
9	0.26	27.97	71.77	0.355	58.66	41.32	—	1.42	
10	0.22	29.37	70.41	0.417	58.60	41.48	—	1.41	$1-3$
11	0.22	29.40	70.38	0.418	58.64	41.35	—	1.42	
12	0.19	30.40	69.41	0.438	46.00	54.12	—	0.850	
13	0.05	33.60	66.35	0.506	46.10	53.95	—	0.851	$1-5$
14	0.05	36.85	63.10	0.584	46.06	54.02	—	0.853	
15	0.02	39.21	60.74	0.616	42.67	57.44	—	0.743	
16	0.02	39.30	60.68	0.647	42.29	57.60	—	0.732	$1-5+1-6$
17	0.02	42.48	57.50	0.738	41.76	58.28	—	0.716	
18	0.02	43.24	56.74	0.762	41.89	58.20	—	0.719	
19	0.00	44.64	55.36	0.806	16.88	84.24	—	0.200	$1-6+$ $+ (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$

(1) « Zeitsch. für Kryst. », 1901, XXXIV, 319.

(2) « Bull. Soc. Chim. de France », 1874, 2, XXI, 196.

(3) « Compt. rend. », 1910, CLI, 871.

Valori teorici per i vari composti:

	1 : 1 · 2H ₂ O	2 : 5	1 : 3	1 : 5	1 : 6
La ₂ (SO ₄) ₃	77.10	63.15	58.82	46.15	41.66
(NH ₄) ₂ SO ₄	17.99	36.85	41.18	53.85	58.34
H ₂ O	4.90				

Dalla tabella e dalla fig. 1, nella quale sono riportati i risultati sperimentali col solito metodo, segnando in un sistema cartesiano, cioè, sulle ascisse i rapporti $\frac{(NH_4)_2SO_4}{H_2O}$ delle fasi liquide, e sulle ordinate quelli $\frac{La_2(SO_4)_3}{(NH_4)_2SO_4}$ dei corpi di fondo, risulta chiaramente che nelle nostre condi-

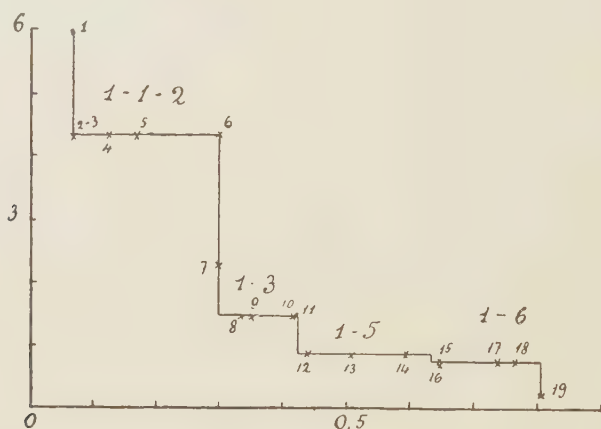


Fig. 1.

zioni sperimentali sono stabili a 25°, in contatto delle soluzioni indicate, i seguenti composti:

La ₂ (SO ₄) ₃ · (NH ₄) ₂ SO ₄ · 2H ₂ O	o	1 — 1 — 2
La ₂ (SO ₄) ₃ · 3(NH ₄) ₂ SO ₄	o	1 — 3
La ₂ (SO ₄) ₃ · 5(NH ₄) ₂ SO ₄	o	1 — 5
La ₂ (SO ₄) ₃ · 6(NH ₄) ₂ SO ₄	o	1 — 6

È assai notevole il fatto, che, sia nelle esperienze del Barre, a 18°, che nelle nostre a 25°, non si forma il sale doppio 1 — 1 — 8, ottenuto da Marignac e da Kraus per lenta evaporazione di una soluzione di solfato di lantanio diluita e mescolata con un eccesso di solfato d'ammonio.

I due sali doppi 1 — 1 — 2 e 1 — 5 sono stati, come abbiamo detto, già preparati dal Barre. Noi, però, non abbiamo potuto ottenere mai il composto 2 — 5 del Barre, ed abbiamo, invece, potuto identificare con si-

curezza due sali doppi di lantanio e ammonio finora non descritti: 1 — 3 e 1 — 6. Quest'ultimo riveste una particolare importanza, perchè rappresenta un tipo nuovo per i solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.

Il composto $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ è stabile, puro, in contatto di soluzioni che contengono da 0.9 a 0.3 % $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$ e da 6.3 a 22.9 % $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$. Possiede, perciò, un campo di stabilità molto esteso. Si presenta sotto forma di piccolissimi cristallini incolori, molto allungati. Nella zona di allungamento si vedono, al microscopio, sei facce, due a due parallele. Di solito, sono appoggiati su una coppia di facce, sulle quali una direzione di massima estinzione forma, con la direzione di allungamento, un angolo di 29° – 30° per la luce bianca.

Il sale doppio $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ ha un campo di stabilità più limitato. Può esistere, infatti, in presenza di soluzioni contenenti da 0.3 a 0.2 % $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$, e da 22.8 a 29.4 % $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$. Forma piccoli cristallini incolori, prismatici. Su una delle facce della zona di allungamento si ha estinzione parallela all'asse della zona, ed in luce convergente si osserva l'emergenza di una bisettrice di un grande angolo degli assi ottici, la traccia del cui piano è parallela all'allungamento.

Il composto $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ è stabile, a 25° , in contatto di soluzioni che contengono da 0.2 a 0.02 % $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$ e da 30.4 a 39.2 % $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$. Cristallizza in piccoli prismetti incolori.

Il sale doppio $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 6(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ è il più importante di quelli da noi preparati, rappresentando, come si è detto, un tipo del tutto nuovo. Il suo campo di stabilità è abbastanza esteso: può esistere in presenza di soluzioni che contengono tracce di solfato di lantanio e da 39.3 a 44.6 % di solfato ammonico. Forma nitidissimi prismetti, terminati ai due estremi. Su una faccia di pinacoide della zona prismatica, una direzione di massima estinzione forma un angolo di 44° con quella di allungamento. A giudicare dall'habitus osservato al microscopio, potrebbe trattarsi di cristalli monoclini, prismatici secondo $[001]$, con le forme $\{110\}$ e $\{010\}$ nella zona verticale. Come facce terminali si osserva un prisma $\{okl\}$ e due prismi $\{hhl\}$ e $\{\bar{h}hl\}$.

Se si confrontano i risultati ottenuti, per l'isoterma di 25° , dallo studio parziale dei due sistemi $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 - (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$ e $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 - (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$, risaltano subito delle notevolissime differenze di comportamento fra il cerio ed il lantanio. Non si hanno, infatti, che due soli solfati doppi di cerio ed ammonio, stabili, a 25° , in contatto con soluzioni, 1 — 1 — 8 e 1 — 5, mentre se ne hanno ben quattro di lantanio e di ammonio: 1 — 1 — 2; 1 — 3; 1 — 5; 1 — 6. E di questi, soltanto uno, quello di formula 1 — 5, si rinviene, in quelle condizioni sperimentali, nel sistema solfato ceroso-solfato di ammonio-acqua. Se con questo confronto si pongono in luce le differenze di comportamento del Ce e

del La nel formare sali doppî con uno stesso elemento, l'ammonio, confrontando, invece, i risultati ottenuti dallo studio dei tre sistemi formati dal solfato di lantanio, dall'acqua e da uno dei tre solfati K_2SO_4 , Tl_2SO_4 , $(NH_4)_2SO_4$, appare ben evidente il diverso comportamento di questi tre solfati nel formare sali doppî col solfato di lantanio:

Solfati doppî di lantanio

e		
Potassio	Ammonio	Tallio (talloso)
—	I — 6	—
I — 5 — 2	—	—
—	I — 5	—
I — $4\frac{1}{2}$ — 2	—	—
—	—	I — $4\frac{1}{2}$
I — 4 — I	—	—
I — 3	I — 3	I — 3
2 — 3 — 8	—	—
I — I — 2	I — I — 2	I — I — 2

Soltanto i composti I — I — 2 e I — 3 si trovano in tutte e tre le serie: parecchi si rinvencono, invece, in una sola od al massimo in due, qualora si prescinda dallo stato di idratazione e si prenda in considerazione soltanto il rapporto solfato di lantanio : solfato di ammonio.

Notevole è il fatto, che nelle serie su indicate il solfato doppio I — I — 2 ha un campo di stabilità molto ristretto se il metallo alcalino è il potassio, molto più esteso, invece, se al posto del potassio si ha il tallio talloso o l'ammonio: diventa addirittura il solo stabile, come risulta da altro lavoro, quando il metallo alcalino è rappresentato dal sodio. Anche col cerio ed il neodimio i solfati doppî I : I (di - tetra - od otto-idrati secondo i casi) diventano molto più stabili quando l'elemento monovalente non è il potassio, ma, invece, il tallio, l'ammonio, e, secondo i risultati di nostre indagini ancora incomplete, il rubidio. Il potassio viene a presentare, perciò, un comportamento del tutto speciale.

È interessante anche l'osservare, che rubidio, ammonio e tallio (talloso), molto affini rispetto al maggior campo di stabilità dei solfati doppî di tipo I — I, presentano anche, notoriamente, strettissime relazioni per quanto riguarda i diametri atomici, o, meglio, ionici. Secondo W. L. Bragg, rubidio e tallio talloso hanno lo stesso diametro ionico (4.50 \AA) ed un valore molto vicino deve spettare al gruppo NH_4 , se si pensa che i volumi

molecolari dei composti di ammonio sono assai prossimi a quelli dei corrispondenti di rubidio. In un suo recentissimo lavoro V. M. Goldschmidt⁽¹⁾ dà per i raggi degli ioni monovalenti Na^+ , K^+ , Rb^+ e NH_4^+ i valori 0.98; 1.33; 1.49 e 1.43, mentre per Tl^+ si avrebbe, come per il rubidio, 1.49.

Geologia. — *La questione dell'età degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino.* Nota di F. SACCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla deformazione infinitesima del campo di integrazione nelle equazioni di Fredholm.* Nota di G. KRALL, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sieno $K = K(P_1, P_2)$ e $f = f(P)$, ($P = P_1$ o P_2), due funzioni date di due, rispettivamente d'un solo punto P di un campo finito S . Indicato l'elemento di spazio dS , con dS_1 o dS_2 , a seconda che convenga esprimerlo nelle coordinate di P_1 o P_2 , con λ un parametro moltiplicativo, si formino le due relazioni funzionali integrali di Fredholm,

$$(1) \quad u(P_1) - \lambda \int_S K(P_1, P_2) u(P_2) dS_2 = \begin{cases} 0, \\ f(P_1); \end{cases}$$

in una incognita funzione $u = u(P)$ dei punti P di S .

In tal maniera, ove si noti che, nella generalità dei problemi d'analisi come di fisica matematica che si riportano a equazioni di questo tipo, la funzione $K(P_1, P_2)$, o il « nucleo » che dir si voglia, è essenzialmente dipendente dalla forma del contorno σ del campo S , si viene implicitamente a stabilire una relazione funzionale,

$$(2) \quad u(P) = F[\sigma],$$

(1) *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente. VII. Die Gesetze der Krystallochemie*, « Skrifter utgitt an det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo », I. « Mat.-Naturv. Klasse », 1926, n. 2.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1926.

tra detto contorno e la cercata funzione $u = u(P)$, alla quale compete, come vedremo, un notevole interesse.

Fissando in particolare l'attenzione sulla (2), consideriamo un intorno $d\sigma$ di un generico punto P di σ e, fermo restando il resto del contorno, spostiamolo d'una quantità δn nella direzione della normale esterna.

Allora, se con $F'[\sigma, P]$ indichiamo la derivata⁽¹⁾ della F in P , l'incremento $\delta F[\sigma, P]$ (o meglio, con locuzione più espressiva, l'incremento parziale relativo a P) corrispondente alla specificata variazione di σ , sarà dato da

$$\delta F[\sigma, P] = F'[\sigma, P] \delta n d\sigma.$$

Epperziò, ove in ogni punto si effettui con continuità una deformazione del tipo suindicato, vale a dire si trasformi σ in una nuova configurazione vicinissima σ^* , la variazione totale $\delta u(P)$ sarà eguale a,

$$(3) \quad \delta u(P) = \int_{\sigma} F'[\sigma, P] \delta n d\sigma.$$

Il calcolo in forma esplicita ed accessibile nel concreto di tale variazione, per sole deformazioni infinitesimali di σ , è compito di questa Nota. Fine precipuo cui mira è di pervenire in tal modo ad assegnare un metodo risolutivo delle (1) per forme complesse di σ , quantitativamente prossime a forme particolarmente semplici, o quanto meno tali da concedere l'adito alla loro effettiva soluzione sulla scorta di metodi e criteri consueti.

Procedendo ordinatamente si ricerca in primo luogo la variazione $\delta u(P)$ di una soluzione $u(P)$ delle (1) corrispondente ad una variazione $\delta K(P_1, P_2)$ del nucleo $K(P_1, P_2)$. Indi, assegnando a titolo di concetto direttivo di metodo, in un caso concreto di notevolissima importanza, la dipendenza funzionale tra la $\delta K(P_1, P_2)$ ed una variazione del contorno σ cui corrisponde il nucleo $K(P_1, P_2)$, si perviene facilmente ad assolvere la questione proposta.

Rileveremo che in questa Nota si considerano nuclei simmetrici⁽²⁾, positivi e definiti nel senso inteso da Hilbert, tali da poter sfruttare le seguenti proprietà qualitative delle soluzioni $u = u(P)$ delle (1), utili nella nostra ricerca:

a) Esistenza per l'equazione omogenea o di prima specie, di infinite soluzioni (autofunzioni) $u^{(r)}(P)$, $r = 1, 2, \dots$; costituenti un sistema orto-nor-

(1) V. VOLTERRA, *Leçons sur les Fonctions de Lignes*, Cap. II, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

(2) G. VIVANTI, *Teoria delle Equazioni integrali lineari*, pp. 207-241, Hoepli, Milano, 1916.

RIEMANN-WEBER, *Differentialgleichungen der Physik*, herausgegeben von R. v. MISES, pp. 433-439. Verlag Wieweg & Sohn, Braunschweig, 1925.

male chiuso, conformemente ad infiniti valori (autovalori) λ_r , $r = 1, 2, \dots$; di λ ricavabili come radici d'una equazione algebrica, d'ordine infinitamente grande, di tipo noto.

b) Sviluppabilità di una funzione arbitraria $f = f(P)$, che in tutto S soddisfi alle condizioni cosiddette di Hilbert-Schmidt, in una serie di autofunzioni $u^{(r)}(P)$,

$$(4) \quad f(P) = \sum_1^{\infty} f_r u^{(r)}(P),$$

con f_r coefficienti costanti calcolabili alla Fourier secondo la relazione,

$$f_r = \int_S f(P) u^{(r)}(P) dS.$$

c) Esistenza per l'equazione non omogenea, o di seconda specie, (ove la funzione data $f = f(P)$ sia sviluppabile in serie delle soluzioni dell'equazione omogenea) d'una soluzione del tipo,

$$(5) \quad u(P) = \lambda \sum_1^{\infty} \frac{f_r u^{(r)}(P)}{\lambda_r - \lambda} + f(P),$$

purchè il parametro dato λ sia distinto, salvo noti casi particolari, da tutti gli autovalori λ_r .

§ 2. Ciò posto, entrando direttamente in quistione, supponiamo che il nucleo $K = K(P_1, P_2)$, che per le applicazioni che abbiamo in vista vogliamo supporre nullo al contorno, s'incrementi d'una funzione $\delta K = \delta K(P_1, P_2)$, (pur essa simmetrica e tale che il suo massimo valore $\delta K_{\text{mass.}}$ sia sufficientemente piccolo perchè se ne possa trascurare il quadrato), dipendente ad esempio da una deformazione infinitesimale del campo.

Indicata con $u^{*(r)} = u^{*(r)}(P)$ la nuova generica soluzione che, per la specificazione quantitativa della variazione di K , riterremo prossima alla $u^{(r)} = u^{(r)}(P)$, e tanto, che la differenza $\delta u^{(r)}(P) = u^{*(r)}(P) - u^{(r)}(P)$ sia dell'ordine di δK , se con λ_r^* chiamiamo il nuovo autovalore prossimo al primitivo λ_r , con \tilde{S} il campo ottenuto per deformazione da S , dovremo avere,

$$(6) \quad u^{*(r)}(P_1) = \lambda_r^* \int_{\tilde{S}} \left\{ K(P_1, P_2) + \delta K(P_1, P_2) \right\} u^{*(r)}(P_2) dS_2,$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Per calcolarne le soluzioni, sfruttando la conoscenza delle primitive $u^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots$) poniamo genericamente,

$$(7) \quad u^{*(r)}(P) = \sum_1^{\infty} a_s^{(r)} u^{(s)}(P), \quad (r = 1, 2, \dots),$$

con $a_s^{(r)}$ coefficienti incogniti costanti, e,

$$(8) \quad \tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \delta\lambda_r,$$

con $\delta\lambda_r$ piccolo, vogliamo supporlo, dell'ordine di δK .

Allora, ritenendo, com'è legittimo, che i coefficienti $a_s^{(r)}$ sieno, per $s \neq r$ piccoli pur essi dell'ordine di δK , introducendo lo sviluppo (7) e l'espressione (8) nella (6), trascurando i termini quadratici, ove si osservi che il termine addizionale dovuto alla variazione infinitesima del volume del campo, è nullo per K nullo al contorno⁽¹⁾, avremo,

$$(9) \quad \sum_1^\infty a_s^{(r)} u^{(s)}(P_1) = \lambda_r \int_S \delta K(P_1, P_2) u^{(r)}(P_2) dS_2 + \\ + \frac{u^{(r)}(P_1)}{\lambda_r} \delta\lambda_r + \lambda_r \sum_1^\infty a_s^{(r)} \frac{u^{(s)}(P_1)}{\lambda_s}.$$

Se moltiplichiamo questa equazione per $u^{(s')}(P_1) dS_1$, ($s' \neq r$), ed integriamo rispetto a P_1 in tutto S , risulta, per le richiamate proprietà di ortogonalità e normalità, in quanto, a integrazione eseguita, si ponga s al posto di s' :

$$(10) \quad a_s^{(r)} = \frac{\lambda_r \lambda_s}{\lambda_s - \lambda_r} \iint_S \delta K(P_1, P_2) u^{(s)}(P_1) u^{(r)}(P_2) dS_1 dS_2, \quad (s \neq r).$$

Moltiplicando invece tutto per $u^{(r)}(P_1) dS_1$, ($r = r$), l'integrazione estesa a tutto S dà: $a_r^{(r)} = 1$ e,

$$(11) \quad \delta\lambda_r = -\lambda_r^2 \iint_S \delta K(P_1, P_2) u^{(r)}(P_1) u^{(r)}(P_2) dS_1 dS_2.$$

Con che, la determinazione delle autofunzioni $u^{(r)}(P)$ corrispondenti alle $u^{(r)}(P)$ e degli autovalori prossimi ai $\tilde{\lambda}_r$ primitivi λ_r , si può ritenere senz'altro conseguita.

(1) Infatti, posto $\tilde{S} = S + \delta S$, tale termine correttivo è dato dall'integrale,

$$\int_{\delta S} K(P_1, P_2) u^{(r)}(P_2) dS_2,$$

od anche, sopralineando i valori al contorno di K e della $u^{(r)}$, da,

$$\int_{\sigma} \overline{K(P_1, P_2) u^{(r)}(P_2)} \delta n d\sigma_2.$$

Ne scende quindi senz'altro, per $\overline{K(P_1, P_2)} = 0$, l'annullarsi di detta correzione.

Per quanto riguarda il calcolo della soluzione variata $u^*(P)$ dell'equazione non omogenea, basterà notare che, conformemente alle (4a) e (5), si dovrà avere,

$$u^*(P) = f(P) + \lambda \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_r^* u^{(r)}(P)}{\lambda_r - \lambda},$$

con

$$f_r^* = \int_S f(P) u^{(r)}(P) dS = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(r)} f_i.$$

Indicando con δf_r la differenza $\hat{f}_r - f_r$, risulta, con qualche trasformazione, a meno di infinitesimi d'ordine superiore ad 1,

$$(12) \quad \delta u(P) = \hat{u}(P) - u(P) = \lambda \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{u^{(r)}(P) \delta f_r + f_r \delta u^{(r)}(P)}{\lambda_r - \lambda} - \frac{\delta \lambda_r}{(\lambda_r - \lambda)^2} f_r u^{(r)}(P) \right\}.$$

§ 3. Il secondo ed ultimo passo che resta a fare riguarda la caratterizzazione della relazione funzionale che lega la variazione $\delta K(P_1, P_2)$ del nucleo $K(P_1, P_2)$ ad una deformazione infinitesimale del contorno σ . La quistione, coi metodi soliti, non può esser considerata in generale, chè ogni problema specifico richiede una trattazione a sè. Ma, tanto per fissare le idee, e per fornire qualche criterio direttivo, vogliamo soffermarci sul problema funzionale offerto dall'integrazione dell'equazione classica

$$(13) \quad \Delta u + \lambda u = 0,$$

alla quale si ricollegano notoriamente molte quistioni d'analisi e fisica matematica.

Prendendo le mosse dall'equazione (13) (dove il segno Δ indica, secondo l'uso più invalso, l'operatore laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, x ed y essendo le coordinate d'un generico punto P del campo piano rispetto a due assi cartesiani), cominciamo ad introdurre una funzione $G(P_1, P_2)$ (la funzione di Green ⁽¹⁾) di due punti P_1 e P_2 , tale, che in tutto S si abbia, $\Delta G(P_1, P_2) = 0$, P_1 variabile e P_2 fisso o viceversa; e che si possa porre,

$$G(P_1, P_2) = -\frac{1}{2\pi} \log r(P_1, P_2) + g(P_1, P_2)$$

con $r(P_1, P_2)$ eguale alla distanza tra P_1 e P_2 e, $g(P_1, P_2)$ funzione dei punti P_1 e P_2 finita e continua con le sue due prime derivate.

(1) R. MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Cap. I, Hoepli, Milano, 1904.

Allora, considerando la condizione al contorno,

$$\overline{G(P_1, P_2)} = 0,$$

cui in molti problemi deve soddisfare la funzione $u(P)$, fatto centro in P_1 e tracciato un cerchio k di periferia κ e raggio ρ , applichiamo la formola classica relativa a due generiche funzioni U e V che soddisfino a certe condizioni di continuità e derivabilità ben note,

$$(14) \quad \int_S (U \Delta V - V \Delta U) dS = \int_s \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma,$$

per $S = S - k$ e $s = \sigma + \kappa$, $U = u(P)$ e $V = G(P_1, P)$.

Si ottiene così una relazione che al limite, per $\rho \rightarrow 0$ dà,

$$u(P_1) - \lambda \int_S G(P_1, P_2) u(P_2) dS_2 = 0.$$

Confrontando questa con la (1) ne risulta manifesta la caratterizzazione, nel problema specifico che ci occupa, del nucleo $K(P_1, P_2)$ come funzione di Green del tipo suindicato. Pertanto la ricerca della variazione $\delta K(P_1, P_2)$ che compete ad una variazione infinitesimale di σ è ricondotta alla ricerca della variazione $\delta G(P_1, P_2)$ della funzione di Green. Specificando una tale variazione coi valori della distanza normale δn tra σ ed il nuovo contorno vicinissimo σ^* , col criterio di Hadamard si trova⁽¹⁾, applicando adeguatamente la formola (14) alla primitiva (e cognita) funzione $G(P_1, P_2)$ ed alla funzione variata $\tilde{G}(P_1, P_2)$ (incognita) con la condizione $\overline{G(P_1, P_2)} = 0$ su σ ,

$$(15) \quad \tilde{G}(P_1, P_2) - G(P_1, P_2) = \delta G(P_1, P_2) = \int_{\sigma} \frac{\partial G(P_1, P)}{\partial n} \frac{\partial G(P_2, P)}{\partial n} \delta n d\sigma.$$

Ponendo quest'espressione di $\delta G(P_1, P_2)$ al posto di $\delta K(P_1, P_2)$ nelle (10) e (11) si ottiene l'espressione funzionale cercata.

§ 3. Per quanto riguarda la portata pratica del metodo esposto, segnalaremo l'applicazione che se ne può fare, non senza profitto, in teoria delle oscillazioni. Si sa bene come una vasta classe di problemi del moto vibratorio dei sistemi continui si riporti ad equazioni del tipo (13) con la stessa condizione al contorno dianzi specificata. Perciò, quando la complessità di questo sia tale da precludere l'adito, sia alla costruzione della

(1) J. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations*, pp. 393-495, Hermann et Fils, Paris, 1910.

$G(P_1, \bar{P}_2)$ sia alla risoluzione diretta della (1), converrà cercare se esso è prossimo ad una forma semplice ed accessibile al calcolo.

Se sì, una volta note le soluzioni che vi si riferiscono, basterà assegnare l'espressione della distanza normale δn perchè con sole quadrature risultino le correzioni da apportare alle medesime per farle rispondere alle specifiche condizioni del problema.

Lo studio delle piccole oscillazioni d'un liquido in un recipiente di cui la forma sia poco discosta da una forma semplice, al quale notoriamente si schematizzano molti quesiti della teoria delle maree; oppure la caratterizzazione del moto vibratorio d'una membrana o d'una piastra sottile a contorno qualitativamente complesso, quantitativamente poco discosto da una forma semplice, costituisce, nelle sue linee generali almeno, una quistione tipica di quest'ordine di considerazioni, additate per primo da Lord Rayleigh in un trattato classico⁽¹⁾; su alcuna delle quali mi riprometto di ritornare in una prossima Nota.

Geometria. — *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Inizio con questa Nota una serie di ricerche sulle trasformazioni di contatto di cui delinea brevemente lo scopo partendo dalla analogia con la teoria proiettiva delle curve e delle superficie.

A quest'ultima teoria ho dato un fondamento geometrico diretto mediante la considerazione sistematica di certi invarianti (birapporti) finiti o infinitesimi che si presentano spontaneamente nelle questioni proiettive⁽²⁾.

Analoga teoria mi propongo di sviluppare per le trasformazioni di contatto: si capisce che il suo campo d'applicazione sarà la teoria delle equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali nell'indirizzo aperto da Lie.

Il primo passo per questa costruzione è la ricerca di invarianti (analoghi a quelli sopra ricordati). Comincio dal caso più semplice stabilendo il seguente

TEOREMA. — *Tre o rispettivamente quattro curve piane aventi in comune un elemento del primo ordine (punto e tangente; Linienelement di Lie) posseggono sempre un invariante (finito) per qualsiasi trasformazione puntuale o rispettivamente di contatto.*

(1) J. W. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, London 1894-1896.

(2) Per un'esposizione riassuntiva dei risultati da me ottenuti vedasi: *I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie*, appendice II alla *Geometria proiettiva differenziale* di FUBINI e ČECH (Zanichelli, 1926).

O se si vuole: tre o rispettivamente quattro elementi del secondo ordine (nel piano) aventi lo stesso elemento del primo ordine posseggono un invariante per trasformazioni puntuali o rispettivamente di contatto.

Si noti la differenza con il caso proiettivo nel quale due tali elementi posseggono già un invariante (proiettivo) di contatto che ho chiamato *invariante di Segre*.

2. TRASFORMAZIONI PUNTUALI. — La trasformazione sia rappresentata da due equazioni direttrici $\Omega_1(x, y, X, Y) = 0$ e $\Omega_2(x, y, X, Y) = 0$ avendo riferiti i due piani a coordinate p. es. cartesiane x, y e X, Y . Possiamo supporre l'elemento lineare (comune ai tre del secondo ordine), costituito nel primo piano dall'origine O e dall'asse x , e analogamente nel secondo. Le equazioni della trasformazione, supposta regolare fino agli intorni del secondo ordine dei punti corrispondenti O ed O' si scrivono

$$\begin{aligned} x &= b_{10} X + b_{01} Y + b_{20} X^2 + 2 b_{12} XY + b_{02} Y^2 + \dots \\ y &= b'_{01} Y + b'_{20} X^2 + 2 b'_{12} XY + b'_{02} Y^2 + \dots \end{aligned}$$

ed è $b_{10} b'_{01} \neq 0$, altrimenti le precedenti relazioni non sarebbero invertibili negli intorni di O ed O'.

Una curva \mathcal{C} di equazione $y = \alpha x^2 + \dots$ ha per trasformata una curva \mathcal{C}' di equazione $Y = AX^2 + \dots$ ove $A = (\alpha b_{10}^2 - b'_{20})/b'_{01}$. Presi tre valori di α_i ed i tre corrispondenti di A_i si ha l'uguaglianza di birapporti:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \infty) = (A_1, A_2, A_3, \infty)$$

il cui significato è questo:

Date tre curve aventi in comune un elemento del primo ordine in O siano M_1, M_2, M_3 i loro punti d'intersezione con una retta r prossima ad O, tendenti ad O con r , e sia M un quarto punto arbitrario di r (con la sola condizione che $\lim M \neq O$ quando r tende ad O): il limite del birapporto (M_1, M_2, M_3, M) quando r tende ad O non dipende nè dalla posizione limite di r (purchè diversa dalla tangente comune) nè dalla posizione limite di M ed è invariante per trasformazioni puntuali⁽¹⁾.

Quest'ultima affermazione esprime che se si fa la costruzione analoga su tre curve trasformate delle primitive si ha lo stesso limite per l'analogo birapporto; mentre è chiaro che non solo non è invariante per trasformazioni puntuali quel birapporto, ma addirittura perde significato, e sta proprio in ciò l'interesse del teorema.

(1) Avendo comunicato al prof. W. Blaschke l'esistenza dell'invariante ora trovato, egli mi informò di esservi pure giunto considerando gli elementi del 2° ordine del piano con un punto comune come punti di un cono di uno S_4 sui quali le trasformazioni puntuali piane operano come omografie.

3. TRASFORMAZIONI DI CONTATTO. — Facciamo corrispondere gli elementi lineari dei due piani individuati dalle origini O, O' e dagli assi x e X . Negli intorno di O e O' l'equazione direttrice $\Omega(x, y, X, Y) = 0$ della corrispondenza si scrive:

$$a_{01}y + b_{01}Y + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + b_{20}X^2 + 2b_{11}XY + b_{02}Y^2 + \\ + c_{11}xX + c_{12}xY + c_{21}yX + c_{22}yY + \dots = 0;$$

la nota condizione (di Lie) affinchè $\Omega = 0$ individui effettivamente una trasformazione di contatto impone che sia $a_{01}b_{01}c_{11} = 0$.

Sia ora data la curva \mathcal{C} di equazione $y = f(x) = \alpha x^2 + \dots$ nel piano (xy) : la curva corrispondente nel piano (X, Y) si ottiene eliminando x fra $\Omega(x, f(x), X, Y) = 0$ e $\frac{d\Omega}{dx} = 0$; si trova l'equazione $Y = AX^2 + \dots$ con

$$A = \frac{\left(\frac{c_{11}}{4} - b_{20}a_{20} \right) - a_{01}b_{20}\alpha}{b_{01}(a_{20} - a_{01}\alpha)}.$$

L'uguaglianza dei due birapporti

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = (A_1 A_2 A_3 A_4)$$

costruiti per quattro curve \mathcal{C}_i e per le loro trasformate s'interpreta così:

Si tagliano 4 curve \mathcal{C}_i ($i = 1, \dots, 4$) aventi in O la stessa tangente con una retta r prossima ad O , poi si faccia variare la retta fino a passare per O e si consideri il limite del birapporto dei 4 punti (tendenti ad O con r) d'intersezione di r con le \mathcal{C}_i ; questo limite non dipende affatto dalla posizione limite di r (nè dal modo di giungervi) ed è un invariante delle 4 curve per trasformazioni di contatto; cioè se si fa la costruzione analoga per le curve trasformate delle \mathcal{C}_i per una qualsiasi trasformazione di contatto si ottiene per limite dell'analogo birapporto lo stesso valore ottenuto operando sulle \mathcal{C}_i .

È chiaro anche qui che solo il limite considerato (e non il birapporto che è servito a costruirlo) è invariante.

Geometria. — *Una generalizzazione della trasformazione di Koenigs.* Nota di B. SEGRE, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

In questa Nota determino quando è che una rete ammette una trasformata F , tale che su ogni raggio della congruenza coniugata i punti delle due reti formino coi due fuochi birapporto costante.

1. Sia data una rete $x = x(u, v)$, soddisfacente all'equazione di LAPLACE

$$(1) \quad x_{uv} = A_v x_u + B_u x_v + Cx.$$

Consideriamo una qualunque congruenza ad essa coniugata; se su ogni suo raggio scegliamo un punto y distinto da x , disponendo convenientemente del fattore di proporzionalità delle sue coordinate, dovrà aversi:

$$(2) \quad \begin{cases} y_u = (\alpha + \omega) x_u + \beta x \\ y_v = (-\alpha + \omega) x_v + \gamma x \end{cases}^{(2)}$$

ed i due fuochi saranno:

$$(3) \quad \begin{cases} \chi = y - (\alpha + \omega) x \\ \chi' = y - (-\alpha + \omega) x, \end{cases}$$

onde sarà $\alpha \neq 0$.

La (1) deve coincidere colla condizione di integrabilità delle (2), e cioè deve aversi:

$$(4) \quad \begin{cases} \beta = -\alpha_u - 2\alpha B_u + \omega_u \\ \gamma = \alpha_v + 2\alpha A_v + \omega_v \end{cases}$$

$$(5) \quad 2C\alpha = \gamma_u - \beta_v.$$

Sostituendo nella (5) a β, γ i valori dati dalle (4), si ottiene:

$$(6) \quad \alpha_{uv} = -A_v \alpha_u - B_u \alpha_v + (C - A_{uv} - B_{uv}) \alpha.$$

Pertanto: *Preso una soluzione α non nulla dell'equazione (6) aggiunta della (1), e determinate β e γ colle (4), le equazioni (2) forniscono y mediante*

(1) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(2) Questa è la forma, a cui (con opportuna scelta del citato fattore) si possono ridurre le equazioni esprimenti che la congruenza delle rette xy ha le u, v come sviluppabili.

quadrature, in guisa tale che la retta xy descrive una congruenza coniugata alla rete (x) .

Si hanno tutte le congruenze coniugate a questa rete, al variare della soluzione α che si considera ⁽¹⁾; invece ω è una *arbitraria* funzione di u e v , mutando la quale il punto y non fa che scorrere lungo il raggio xy . Preso $\omega = 0$ il corrispondente punto y è il coniugato armonico di x rispetto ai fuochi, e con ciò la nostra determinazione delle congruenze coniugate ad una rete assegnata, assume un carattere *puramente proiettivo*, che non sempre si trova nelle usuali trattazioni.

2. Affinchè il punto y di cui al principio del n. 1 descriva una rete, occorre che fra le (2) e le equazioni che si hanno derivandone la prima rispetto a v , la seconda rispetto ad u , si possano eliminare x , x_u , x_v , x_{uv} , ossia che si abbia:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{\beta}{\alpha + \omega} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\gamma}{-\alpha + \omega}.$$

Se inoltre i due punti y ed x devono formare coi due fuochi ζ, ζ' dati dalle (3), un assegnato birapporto *costante* θ , dovrà essere:

$$(8) \quad \omega = \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \alpha.$$

Tenendo presenti le (4) e la (8), la (7) si scrive:

$$(9) \quad (\theta + 1) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \alpha + \theta A_{uv} + B_{uv} = 0.$$

Questa relazione mostra che si hanno due casi ben distinti a seconda che la quaderna $yx\zeta\zeta'$ deve essere *armonica*, oppure no. Nel primo caso ($\theta = -1$) la (9) diventa una relazione *indipendente da α* , che esprime semplicemente l'uguaglianza degli invarianti della data rete (x) . È questo il classico risultato di KOENIGS: in corrispondenza ad ogni congruenza coniugata ad una rete (x) ad *invarianti uguali* si ha una rete (y) del tipo in esame, con $\theta = -1$ (trasformata K della prima).

Per $\theta \neq -1$ la (9) è invece una equazione differenziale per la α , certo non equivalente alla (6), onde si potranno avere delle reti (y) che soddisfino alle condizioni imposte, *solo in corrispondenza ad alcune delle congruenze coniugate alla rete data (x)* : precisamente a quelle determinate giusta il n. 1 dalle soluzioni α (supposte esistenti) comuni alle (6), (9). Le reti (y) che così si ottengono verranno dette *trasformate K_θ* della rete (x) .

(1) Si può precisamente vedere che si hanno due congruenze coniugate coincidenti, *solo* in corrispondenza a due valori di α aventi un rapporto costante.

Ora la (9) si integra subito e fornisce:

$$(10) \quad \log \alpha + \frac{\theta}{\theta + 1} A + \frac{1}{\theta + 1} B + \frac{\theta}{\theta + 1} U(u) + \frac{1}{\theta + 1} V(v) = 0$$

e sostituendo nella (6) ad α il valore dato dalla (10):

$$(11) \quad (A_u - B_u + U') (A_v - B_v - V') + (\theta + 1) K + \frac{\theta + 1}{\theta} H = 0$$

essendo:

$$(12) \quad \begin{cases} K = -B_{uv} + A_v B_u + C \\ H = -A_{uv} + A_v B_u + C \end{cases}$$

i due invarianti della (1).

Si ha quindi una trasformata K_θ della data rete, ogni qual volta sia possibile di determinare una funzione U della sola u ed una funzione V della sola v , per cui valga la (11).

3. Se il punto y descrive una rete trasformata K_θ della rete (x) , si può eseguire l'eliminazione di cui al principio del n. 2, con che si otterrà per y un'equazione di LAPLACE:

$$y_{uv} = \bar{A}_v y_u + \bar{B}_u y_v + \bar{C} y.$$

e precisamente per le (4), (8) si ha:

$$\bar{A}_v = A_v + \frac{\alpha_v}{\alpha}$$

$$\bar{B}_u = B_u + \frac{\alpha_u}{\alpha}$$

$$\bar{C} = 0.$$

Tenendo presenti le (6), (9), si hanno per gli invarianti della rete trasformata K_θ , le espressioni:

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{H} = \frac{2}{\theta + 1} H + \frac{\theta - 1}{\theta + 1} K \\ \bar{K} = \frac{1 - \theta}{\theta + 1} H + \frac{2\theta}{\theta + 1} K. \end{cases}$$

4. Vogliamo ora data una rete (x) determinare se essa ammette delle trasformate K_θ . Premettiamo l'esame di alcuni casi particolari.

Dalle (11), (12) risulta facilmente che *affinchè una rete ad invarianti uguali ammetta una trasformata K_θ , devono i suoi invarianti valere il pro-*

dotto di una funzione della sola u per una funzione della sola v , e quindi possono ridursi (cambiando in modo acconcio le variabili u , v) ad essere uguali e costanti. Inversamente: una rete siffatta ammette infinite trasformate K_θ (per ogni valore del birapporto θ)⁽¹⁾, per le (13) tutte le trasformate K_θ sono ancora ad invarianti uguali fra loro, ed uguali a quelli della rete di partenza.

In base alle (11), (12) si può dimostrare che se una rete (x) avente una trasformata K_θ , ha gli invarianti il cui rapporto è una costante diversa da 1, tali invarianti (mediante un acconcio cambiamento di variabili) possono ridursi a:

$$\begin{aligned} H &= \frac{c_1}{(u+v)^2} \\ K &= \frac{c_2}{(u+v)^2} \end{aligned} \quad (c_1, c_2 \text{ costanti disuguali})$$

Inversamente una rete siffatta ammette due diverse trasformate K_{θ_1} , K_{θ_2} , le quali (per le (13)) sono ancora di quel tipo, in corrispondenza alle soluzioni θ_1 , θ_2 dell'equazione:

$$c_2 \theta^2 + \{c_1 + c_2 + (c_1 - c_2)^2\} \theta + c_1 = 0.$$

Possiamo ora supporre che il rapporto dei due invarianti H , K non sia una costante.

Deriviamo i due membri della (11) rispetto ad u , rispetto a v , e rispetto ad u e v . Abbiamo così tre relazioni; se fra di esse eliminiamo le U'' e V'' tenendo presenti le (11), (12), otteniamo:

$$\begin{aligned} (14) \quad & (KH_v - HK_v)(A_u - B_u + U') + KH_u - (HK_u)(A_v - B_v - V') = \\ & = \theta \left(K + \frac{H}{\theta} \right) \left(K_{uv} + \frac{H_{uv}}{\theta} \right) - \theta \left(K_u + \frac{H_u}{\theta} \right) \left(K_v + \frac{H_v}{\theta} \right) + \\ & + 2 \frac{\theta}{\theta + 1} (K - H)^2 \left(K + \frac{H}{\theta} \right), \end{aligned}$$

ed in virtù dell'ipotesi fatta i coefficienti con cui compaiono U' e V' in questa equazione non sono entrambi nulli.

(1) Si può anzi vedere che quelle trasformate K_θ si possono riunire in infiniti gruppi di ∞^1 reti coniugate ad una medesima congruenza, e che quindi *punteggiano proiettivamente* gli ∞^2 suoi raggi. Tali congruenze si determinano con sole quadrature, e dipendono da una funzione oppure da una costante arbitraria, a seconda che i due invarianti della rete di partenza sono nulli o diversi da zero.

Si può anche dimostrare che le reti (x) del tipo suddetto sono le sole che ammettano due diverse trasformate K_θ , K_{θ_1} , coniugate in un colla (x) ad una medesima congruenza.

Le (11), (14) si possono quindi risolvere rispetto ad U' , V' : se le espressioni che così si ottengono per U' e V' sono rispettivamente delle funzioni della sola u e della sola v , la data rete ammette una trasformata K_θ ; è solo in tal caso. Ciò si esprime quindi annullando la derivata rispetto a v della prima, e la derivata rispetto ad u della seconda delle suddette due espressioni, con che, applicando ancora le (12), si ottengono in definitiva due equazioni alle derivate parziali terze⁽¹⁾ per gli invarianti H , K , che esprimono che la rete data ammette una trasformata K_θ .

5. Il sistema formato dalle (11), (14) ammette generalmente due (però mai infinite) soluzioni (U' , V')⁽²⁾, e ciò che si è detto alla fine del numero precedente va inteso per entrambe. Si ha quindi che, esclusi i casi trattati al principio del n. 4, una rete ha al più due diverse trasformate K_θ (con lo stesso valore θ del birapporto). A questo proposito si può dimostrare che:

Le reti che ammettono proprio due diverse trasformate K_θ con lo stesso valore θ del birapporto, sono quelle i cui invarianti H , K (con una opportuna scelta dei parametri u , v) si possono esprimere colle:

$$(15) \quad \begin{cases} H = -\frac{\theta}{\theta + 1} F'(u + v) - \frac{\theta}{(\theta + 1)^2} F(u + v) [F(u + v) + 1] \\ K = \frac{1}{\theta + 1} F'(u + v) - \frac{\theta}{(\theta + 1)^2} F(u + v) [F(u + v) + 1] \end{cases}$$

(essendo F una arbitraria funzione di una sola variabile). Se però $F = \text{cost}$, ritorniamo al caso trattato al principio del n. 4, in cui vi sono infinite trasformate K_θ .

Le (13) mostrano che entrambe le trasformate K_θ di una rete siffatta hanno gli invarianti dati dalle:

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{H} = -\frac{1}{\theta + 1} F'(u + v) - \frac{\theta}{(\theta + 1)^2} F(u + v) [F(u + v) + 1] \\ \bar{K} = \frac{\theta}{\theta + 1} F'(u + v) - \frac{\theta}{(\theta + 1)^2} F(u + v) [F(u + v) + 1] \end{cases}$$

e quindi ciascuna ammette alla sua volta due diverse trasformate $K_{\frac{1}{\theta}}$, di cui una palesemente è la rete di partenza. Così proseguendo si viene a formare una catena di reti, i cui invarianti sono alternativamente dati dalle (15) e dalle (16), e tali che ciascuna è trasformata K_θ o $K_{\frac{1}{\theta}}$ delle due consecutive.

(1) Equazioni che non scriviamo esplicitamente per brevità.

(2) Non necessariamente accettabili per il nostro problema, perchè non necessariamente funzioni la U' della sola u , la V' della sola v .

Meccanica. — *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo.* Nota di G. VRANCEANU presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Su l'energia cinetica relativa.* Nota di B. FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele; seconda approssimazione.* Nota di A. MASOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Esaminai, in una recente Comunicazione a questa Accademia, il moto piano indotto dalla traslazione uniforme, con velocità c , di un cilindro rotondo di raggio b lungo l'asse di un canale di larghezza a ; ritenni il cilindro tanto sottile che del rapporto $\pi b/a$ fossero trascurabili di fronte all'unità le potenze a partire dalla seconda. Riprendo lo stesso problema ritenendo ora trascurabili, di quel rapporto, le potenze a partire dalla quarta.

Se l'approssimazione è dell'ordine dei millesimi, i risultati della prima indagine sono applicabili quando il diametro del cilindro è inferiore ad *un decimo* della larghezza del canale, mentre quelli attuali valgono anche quando il diametro del cilindro raggiunge *un terzo* della larghezza del canale ⁽²⁾.

2. Il sistema di riferimento ha l'origine nel centro della sezione del cilindro; l'asse x ha direzione opposta a quella del movimento; impressa a tutto il sistema una velocità opposta a quella del solido, ci si riporta ad un problema di moto permanente: quello del cilindro fermo nel canale investito da una corrente di velocità c (all'infinito).

Il potenziale complesso

$$(1) \quad f(\chi) = c \left(\chi + K \operatorname{Coth} \frac{\pi \chi}{a} \right), \quad \text{con } K > 0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1926.

(2) V. la nota (2) della pagina seguente.

rappresenta nel canale una corrente traslatoria, di velocità assintotica c , a cui si sovrappone una doppia sorgente, nell'origine, di momento $2acK$ orientato come il semiasse $x < 0$; esiste una linea di flusso chiusa, di forma ovale, simmetrica rispetto agli assi, i cui semidiametri α e β , parallelo e normale alle sponde rispettivamente, sono radici delle equazioni trascendenti

$$(2) \quad \text{Sh}^2 \frac{\pi\alpha}{a} = \frac{\pi K}{a}, \quad \beta \operatorname{tg} \frac{\pi\beta}{a} = K \quad (1).$$

Da queste, eliminando K e ricordando noti sviluppi in serie, si ha la seguente relazione tra α e β :

$$(3) \quad \left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)^2 + \frac{2}{45} \left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)^4 + \dots \right\} = \\ = \left(\frac{\pi\beta}{a}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi\beta}{a}\right)^2 + \frac{2}{45} \left(\frac{\pi\beta}{a}\right)^4 + \dots \right\},$$

che è soddisfatta da $\alpha = \beta = b$ quando il valore comune b assegnato ad α e β è tale che dal rapporto $\pi b/a$ sono trascurabili, almeno, la quarta potenza e le successive (2).

Risulta

$$(4) \quad K = \frac{\pi b^2}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a}\right)^2 \right\},$$

e segue

$$(5) \quad f(z) = c \left[z + \frac{\pi b^2}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a}\right)^2 \right\} \operatorname{Coth} \frac{\pi z}{a} \right].$$

(1) V. LAMB, *Hydrodynamics* (5^a ed., Cambridge, 1924), p. 68.

(2) Si supponga, per esempio, che l'approssimazione venga giudicata buona quando sono tollerati errori dell'ordine dei millesimi; l'importo medio dei termini trascurati di fronte all'unità sarà 0.005. L'equazione

$$\left(\frac{2}{15} - \frac{2}{45}\right) \left(\frac{\pi b}{a}\right)^4 = 0.005,$$

dedotta dalla (3), porge $a/2b = 3$ circa; il diametro del cilindro è un terzo della larghezza del canale. La cosa non deve meravigliare perchè la forma quasi circolare dell'ovale si ritrova anche per $a/2b = 2$, nel qual caso le (2) forniscono $\alpha/a = 0.254$, $\beta/a = 0.250$ (v. LAMB, loc. cit.). Se si richiede, coll'approssimazione della precedente Nota, la stessa precisione, dovrà essere (come risulta dall'attuale form. (4))

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a}\right)^2 = 0.005,$$

da cui $a/2b = 12$ circa.

È questo il potenziale complesso di una corrente traslatoria che investe il cilindro di raggio b , nei limiti di approssimazione che sono stati precisati.

In vicinanza del cilindro esso diviene

$$(6) \quad f(\zeta) = c \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right\} \left\{ \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \right\}^{(1)};$$

il movimento è quello che si avrebbe se il cilindro fosse investito da una corrente *indefinita* parallela all'asse x , di velocità assintotica

$$(7) \quad c' = c \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right\}.$$

3. Il potenziale della corrente circolatoria si deduce ponendo

$$(8) \quad f(\zeta) = -\frac{iC}{2\pi} \log \operatorname{Th} \frac{\pi\zeta}{2a} + \frac{b + ik}{\zeta^2},$$

e determinando le costanti b e k in modo che il cerchio $|\zeta| = b$ e le rette $y = \pm a/2$ risultino linee di flusso; si trova ⁽²⁾

$$(9) \quad b = 0, \quad k = -\frac{Cb^2}{6\pi} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2.$$

In vicinanza del cilindro la (8) diviene

$$(10) \quad f(\zeta) = -\frac{iC}{2\pi} \log \frac{\pi\zeta}{2a} + \frac{iC}{6\pi} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2 \left(\frac{\zeta^2}{b^2} - \frac{b^2}{\zeta^2} \right).$$

(1) Se il modulo di $\pi\zeta/a$ è dell'ordine di $\pi b/a$ è

$$\operatorname{Coth} \frac{\pi\zeta}{a} = \frac{a}{\pi\zeta} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi\zeta}{a} \right)^2 \right\}.$$

(2) Sul cerchio, ove $\zeta = be^{i\sigma}$, è

$$\log \operatorname{Th} \frac{\pi\zeta}{2a} = \log \frac{\pi b}{2a} e^{i\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2 e^{2i\sigma} \right\} = \log \frac{\pi b}{2a} + i\sigma - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2 e^{2i\sigma};$$

la funzione di corrente assume il valore

$$\psi = -\frac{C}{2\pi} \log \frac{\pi b}{2a} + \left\{ \frac{C}{6\pi} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2 + \frac{k}{b^2} \right\} \cos 2\sigma - \frac{b}{b^2} \sin 2\sigma$$

che è costante solo quando sono soddisfatte le (9). Ne segue che, nel secondo membro della (8), il termine correttivo ik/ζ^2 deve trascurarsi quando il modulo di ζ è dell'ordine di a ; a tale distanza dall'origine la corrente circolatoria non è influenzata dalla presenza del cilindro, ed è rispettata quindi la rigidità delle pareti.

4. Il potenziale complesso

$$(11) \quad \begin{cases} f(\zeta) = c \left(\zeta + K \operatorname{Coth} \frac{\pi \zeta}{a} \right) - \frac{iC}{2\pi} \log \operatorname{Th} \frac{\pi \zeta}{2a} + \frac{ik}{\zeta^2}, \\ \text{con} \\ K = \frac{\pi b^2}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right\}, \quad k = -\frac{Cb^2}{6\pi} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2, \end{cases}$$

e la rispettiva velocità complessa

$$(12) \quad w(\zeta) = \frac{df}{d\zeta} = c \left(1 - \frac{\pi K}{a} \operatorname{Cosech}^2 \frac{\pi \zeta}{a} \right) - \frac{iC}{2a} \operatorname{Cosech} \frac{\pi \zeta}{a} - \frac{2ik}{\zeta^3},$$

rappresentano dunque, nei prescritti limiti di approssimazione, la corrente traslocircolatoria il cui studio mi ero proposto.

Anche nelle immediate vicinanze del cilindro è sensibile l'influenza delle pareti; lo dimostrano le (6) e (10); ciò fa prevedere una correzione per il teorema di Kutta e Joukowski, di cui si constatò la validità in prima approssimazione. Infatti si trova che l'azione dinamica, pur avendo ancora lo stesso punto d'applicazione e lo stesso verso, ha il valore

$$(13) \quad \mu c C \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right\},$$

dove μ indica la densità del liquido⁽¹⁾.

Ritornando al primitivo problema del cilindro mobile nel canale, per il calcolo dell'azione dinamica su una parete, si osserva ch'essa è normale alla parete, applicata nel punto d'intersezione coll'asse y ed avente lungo quest'asse la componente

$$(14) \quad R = \mp \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 - c^2) dx;$$

u è la componente lungo l'asse x della velocità relativa, ossia

$$(15) \quad u = c \left\{ 1 + \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \operatorname{Sech}^2 \frac{\pi x}{a} \right\} \mp \frac{C}{2a} \operatorname{Sech} \frac{\pi x}{a},$$

valendo il segno — per la parete superiore, li segno + per l'altra. Si ottiene

$$(16) \quad R = \frac{1}{2} \mu c C \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right\} \mp \frac{\mu C^2}{4\pi a} \mp 2 \mu c^2 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2 \quad (2).$$

(1) Si applicano le formule del Blasius colla seguente espressione di w

$$w = c \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{b^2}{\zeta^2} \right\} - \frac{iC}{2\pi} \frac{1}{\zeta} + \frac{iC}{3\pi} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\pi b}{2a} \right)^2 \left(\frac{\zeta^2}{b^2} + \frac{b^2}{\zeta^2} \right),$$

che è quella valida sul cilindro.

(2) La traslazione, uniforme e lenta, di un cilindro rotondo lungo l'asse di un canale occupato da un liquido viscoso, completamente aderente alle pareti, è stata studiata da

Fisica. — *Esperienze di controllo di un nuovo metodo interferometrico per la misura di oggetti microscopici ed ultramicroscopici per mezzo di reticoli di diffrazione* ⁽¹⁾. Nota di G. DE MOTTONI, presentata ⁽²⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

In una recente Nota ⁽³⁾ abbiamo avuto occasione di esporre un procedimento interferometrico, basato sull'uso di reticoli di diffrazione, piani, rettilinei o circolari, il quale permette la misura di oggetti microscopici ed ultramicroscopici.

Renderemo ora brevemente conto delle esperienze che abbiamo eseguito allo scopo di ricavare un diretto controllo del procedimento in discorso.

Queste esperienze si basano sul concetto seguente: si osserva una coppia di punti brillanti (stella doppia artificiale) di larghezza ε' tale da potersi agevolmente misurare con un ordinario micrometro applicato all'oculare del microscopio. Indi si introduce, tra obbiettivo e oculare, il reticolo, rettilineo e diottrico; la posizione in cui esso si trova determina univocamente una grandezza ε definita dall'espressione

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{\varphi}{2 m' \gamma} \frac{x}{\sigma} \quad (4)$$

che altro non è se non la distanza delle proiezioni dei due punti luminosi, su di una normale ai tratti del reticolo, alla quale corrisponde il primo minimo di visibilità delle frangie.

BAIRSTOW, CAVE e LANG nella Nota *The Two-dimensional Slow Motion of Viscous Fluids* («Proc. Roy. Soc.», A, 100, 1922, pp. 394-413), nel caso in cui il diametro del cilindro è $1/5$ della larghezza del canale; è un'applicazione di un interessante ma laborioso metodo di risoluzione, per approssimazioni successive, dell'equazione $\Delta_4 = 0$; il metodo è sviluppato in vista della sua applicazione a problemi speciali, interessanti l'ingegneria, in ciascuno dei quali occorre verificarne la convergenza. Al problema che ho trattato in questa Nota e nella precedente si può probabilmente adattare un metodo analogo, anch'esso elaborato da BAIRSTOW, valido per l'equazione $\Delta_2 = 0$, ed esposto nella Nota: BAIRSTOW e BERRY, *Two-dimensional Solutions of Poisson's and Laplace's Equations* (Ibid., A, 95, 1919, pp. 457-475).

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Fisica complementare della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(3) «Rend. Acc. dei Linc.», III, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 12. *Un nuovo metodo per la misura di distanze microscopiche ed ultramicroscopiche per mezzo dei reticoli di diffrazione.*

(4) In cui è φ la distanza dell'oggetto osservato dal primo piano principale dell'obbiettivo, γ quella del piano focale dal secondo piano principale obbiettivo, x la distanza del piano focale da quello oculare, σ la distanza di questo dal reticolo, m' il prodotto della frequenza m del reticolo per l'ordine s delle frangie.

Orbene è chiaro che ruotando lentamente il reticolo - a partire dalla posizione in cui i suoi tratti sono paralleli alla coppia stellare artificiale - si giungerà al primo minimo di visibilità delle frangie, dopo una rotazione di α gradi, precisamente quando sarà soddisfatta la condizione:

$$\varepsilon' \sin \alpha = \varepsilon .$$



Fig. 1.

In sostanza quindi si tratta di utilizzare, per la misura interferometrica, la proiezione sotto un angolo noto di una coppia stellare sufficientemente larga per essere direttamente misurabile con precisione.

Tutto questo perchè, nelle condizioni in cui si svolgevano le esperienze, non sarebbero state assolutamente possibili le misure dirette al micrometro di grandezze dell'ordine delle ε su cui si operava (un micron e anche meno).

In pratica la stella doppia artificiale larga pochi micron e di componenti egualmente intense si realizzava nel seguente modo: su di un vetrino

porta-oggetti si facevano condensare dei vapori di mercurio; il deposito che così si formava, costituito da un gran numero di sferette perfettamente riflettenti, veniva osservato al microscopio ed era facile portare nel campo dell'istrumento una gocciolina avente le opportune dimensioni (v. fig. 1-a goccia A). Tolta allora l'illuminazione ordinaria per trasparenza, si facevano arrivare sulla lastrina due intensi fasci di luce bianca, provenienti da due lampade ad arco di tungsteno « Philips » attraverso a due sistemi condensatori, e con incidenza radente, in modo da costituire un'illuminazione ultramicroscopica a fondo oscuro. Ciascuna sferetta di mercurio, riflettendo la luce incidente, si trasformava (osservata attraverso il microscopio) in una coppia di minutissime immagini deformate delle lampade costituendo in tal modo una buona stella doppia artificiale (v. fig. 1-b).

Allontanando l'oculare dal piano focale, ciascuna stella doppia si trasformava in una coppia di palloni extrafocali, e, dopo interposto il reticolo coi tratti paralleli alla congiungente le due stelline, comparivano ben marcate le frangie di interferenza (v. fig. 1-c).

Ciò fatto bastava ruotare il reticolo nel suo piano per vedere la visibilità delle frangie man mano diminuire sino ad un minimo (solitamente nullo) (v. fig. 1-d; le frangie della gocciolina A sono sparite; le altre abbisognerebbero di una rotazione diversa da quella impressa per sparire alla loro volta).

A questo punto si leggono i tre dati y , x e σ . La misura interferometrica è fatta. Noti gli elementi dell'obbiettivo adoperato ⁽¹⁾ si calcola allora il valore di φ , e conosciuto m' si passa al calcolo di ϵ ciò che si fa

(1) Nel caso che l'obbiettivo non porti l'indicazione nè della distanza focale nè della posizione dei piani principali, per ricavare questi elementi indispensabili si potrà procedere nel modo seguente: usando luce parallela (ad. es. solare) si individuano i due fuochi come i punti in cui convergono (o dai quali divergono) i fasci uscenti. Sia d la loro mutua distanza. Ciò fatto si segna sull'obbiettivo un punto Q equidistante dai due fuochi. Puntato un oggetto qualsiasi, si misurano le distanze φ' ed y' rispettivamente di esso e della sua immagine dal punto Q; e ciò con la massima accuratezza. Si ripete poi la determinazione per altri due valori di φ e di y , che chiameremo φ'' e y'' . Indicando con f e δ rispettivamente le incognite distanza focale ed intervallo tra i due piani principali, un elementare calcolo mostra che esse sono ricavabili dalle espressioni:

$$f = \frac{1}{2} (d + \delta) \quad \delta = -\frac{1}{A} (B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})$$

ove si ponga

$$A = \varphi'' - \varphi' + y'' - y' \quad ; \quad B = 2 (\varphi'' y'' - \varphi' y') \quad ; \quad C = y' y'' (\varphi'' - \varphi') + \varphi' \varphi'' (y'' - y')$$

Nel caso nostro, per l'obbiettivo « Steindorff » adoperato, si trovarono con questo mezzo i seguenti valori delle incognite:

$$f = 1,4943 \quad \delta = 0,5324$$

(che vennero in seguito più volte accuratamente controllati) che servirono poi durante le esperienze ad assegnare i valori di φ e di y necessari al calcolo di ϵ .

usando la (1). Sin qui il metodo interferometrico. Ma un secondo valore della stessa grandezza ϵ lo possiamo ottenere per altra via, e del tutto indipendente dal primo; infatti basterà moltiplicare la larghezza ϵ' della stella doppia per il seno dell'angolo α di cui si è ruotato il reticolo, per ottenere un altro valore di ϵ . Da ciò la possibilità di un controllo diretto della teoria.

Le esperienze eseguite sono tutte e sole quelle riassunte nella seguente tabella I.

TABELLA I.

N.	m' tr/cm	y cm	φ cm	x cm	σ cm	ϵ μ	$\epsilon' \sin \alpha$ μ	$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon}$ %	$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon}$ %
1	300	14.37	1.667	3.39	3.14	2.085	2.01	+ 3.7	—
2	»	18.92	1.662	2.47	1.83	1.931	2.02	— 4.6	1.3
3	»	26.25	1.585	7.08	4.23	1.687	1.53	+ 10.0	2.3
4	»	25.65	1.587	4.05	3.35	1.245	1.26	— 1.6	2.3
5	»	18.17	1.628	2.21	2.90	1.138	1.18	— 3.6	2.3
6	»	18.13	1.628	1.80	2.50	1.077	1.02	+ 5.7	1.6
7	»	20.67	1.611	4.43	5.40	1.065	1.04	+ 2.4	2.3
8	»	20.00	1.615	5.02	6.40	1.055	1.11	— 5.0	0.7
9	»	19.68	1.617	3.87	5.15	1.030	0.96	+ 7.4	3.0
10	»	20.55	1.611	2.90	3.75	1.010	0.94	+ 7.5	1.3
11	»	18.92	1.622	2.22	3.18	0.997	1.01	— 1.3	3.2
12	»	19.27	1.620	2.61	3.73	0.980	0.97	+ 1.0	2.5
13	»	18.30	1.627	2.70	4.09	0.978	0.98	— 0.2	3.0
14	»	19.24	1.623	2.80	4.06	0.971	1.06	— 8.5	1.7
15	»	21.45	1.606	3.57	5.10	0.873	0.87	+ 0.3	0.9

Le colonne 2^a-6^a contengono i dati di ciascuna misura interferometrica; la 7^a colonna dà il valore di ϵ calcolato mediante la formola (1). La terz'ultima colonna contiene il valore della medesima grandezza ottenuto per via micrometrica indiretta, e la colonna successiva le differenze tra questi due valori, espresse in percento di $\epsilon' \sin \alpha$. L'ultima colonna fornisce l'errore probabile percentuale che affetta la misura micrometrica; esso venne calcolato come media degli scostamenti dal medio pesato delle singole puntate (normalmente in numero di cinque).

Come si vede, non si raggiunsero valori di ϵ al disotto di 0.87 μ e ciò perchè la stella doppia artificiale era costituita non già da due punti

luminosi, ma bensì da due immagini di dimensioni finite, per quanto piccole, per cui non si poteva proiettare troppo obliquamente senza che le proiezioni venissero a sovrapporsi. D'altra parte goccioline più minute, che non avrebbero richiesto così grande obliquità, non si potevano utilizzare perchè avrebbero dato luogo a dei palloni troppo poco luminosi, le cui frangie sarebbero state inosservabili, senza contare che in tal caso per eseguire la misura micrometrica diretta si sarebbe dovuto mutare l'obbiettivo, alterando anche, per l'accresciuta prossimità di esso al vetrino porta-oggetti, la distribuzione della luce incidente e quindi l'ampiezza della stella doppia artificiale.

L'intervallo abbracciato dai valori di ϵ nelle presenti esperienze, che va da un massimo di 2.085μ ad un minimo di 0.873μ è però più che sufficiente per lo scopo che si aveva di mira.

Grado di precisione delle misure. Le differenze tra i valori di ϵ ottenuti per via interferometrica e quelli ottenuti per via micrometrica indiretta si aggirarono in media sui $\pm 4 \%$ e non superarono mai, in tutte le esperienze eseguite, il 10% , come si rileva dalla penultima colonna della tabella. Questo valore va però interpretato con qualche larghezza tenendo conto del fatto che le misure micrometriche indirette non sono neppur esse libere da errore; infatti va notato che l'errore probabile medio (ricavato da cento puntate) del micrometro filare adoperato ⁽¹⁾ risultò essere di $\pm 0.190 \mu$, accoppiato com'era al microscopio; inoltre la determinazione e la lettura dell'angolo α contribuiscono, con i piccoli errori inevitabili che le accompagnano, ad accrescere l'errore che affetta la determinazione di $\epsilon' \sin \alpha$, per cui, in definitiva, possiamo concludere che l'errore della misura interferometrica propriamente detta non supera il 5% come valore massimo; per simili misure crediamo questo valore non eccessivo.

Del resto un facile calcolo conferma questa conclusione. Infatti dalla (1) si ottiene

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = \pm 0.05 \left\{ \frac{1}{y-f} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sigma} \right\}$$

quando, com'è lecito, si suppongano esattamente conosciuti tanto la distanza focale dell'obbiettivo quanto la frequenza del reticolo, e quando si computino in cm. 0.05 — come praticamente si conferma — gli errori nella determinazione degli elementi y , x e σ . Trascurando poi f di fronte ad y scriveremo con esuberante approssimazione:

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = \pm 0.05 \left\{ \frac{1}{f} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sigma} \right\}.$$

(1) Costruzione A. Hilger; lettura diretta, nel piano dei fili, di un micron.

Questa espressione dell'errore massimo percentuale della misura interferometrica propriamente detta, fornisce, nel caso delle nostre esperienze il valor medio 3.2 %, ed il valor massimo 5,0 % per l'esperienza n. 6.

Entro il margine lasciato da un error massimo di questo ordine di grandezza le esperienze eseguite possono dirsi pienamente conclusive.

*
* *

Va ricordato infine che, per la pura e semplice applicazione del procedimento interferometrico alla misura di oggetti microscopici ed ultramicroscopici, non sarà affatto il caso di seguire la via da noi tenuta nel corso di queste esperienze di controllo, che hanno, come s'è visto, l'inconveniente di opporsi ad un elevato potere risolutivo e che, del resto, sarebbero applicabili soltanto a pochi oggetti dotati di forte potere riflettente. Si seguirà invece la via indicata nella Nota citata, badando ad usare come sorgente luminosa, per l'illuminazione del condensatore paraboloidale o cardioide, il Sole, con che si potrà senza difficoltà raggiungere tutto il potere risolutivo che comporta questo metodo che le esperienze fatte pienamente confermano.

Fisica. — *Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nella nuova meccanica ondulatoria.* Nota di E. FERMI ed E. PERSICO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

1. L'analogia, da lungo tempo riconosciuta, tra le leggi della meccanica del punto materiale e quelle dell'ottica geometrica, ha — secondo alcune recenti ipotesi che si sono mostrate feconde di conseguenze — una origine più profonda e una portata più vasta di quanto poteva finora ritenersi. Precisamente, E. Schrödinger ⁽²⁾ ha recentemente sviluppato una nuova meccanica guidata dall'idea che anche i fenomeni meccanici abbiano natura ondulatoria, e che, analogamente a quanto avviene per le leggi dell'ottica geometrica che cessano di essere valide nei sistemi ottici di piccole dimensioni, per i quali è necessario invece tener conto della natura ondulatoria della luce, così pure le leggi della ordinaria meccanica siano approssimazioni valide soltanto per sistemi di dimensioni grandi rispetto alla grandezza meccanica che corrisponde alla lunghezza d'onda, mentre per sistemi di dimensioni comparabili con questa lunghezza intervengono fenomeni più complicati analoghi a quelli della diffrazione ottica.

Precisando questa idea, Schrödinger è riuscito a raggiungere in modo naturale e coerente quei risultati che la vecchia teoria dei quanti otteneva

(1) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(2) «Ann. d. Ph.», 79, p. 361, 489, 734; 80, p. 437; 81, p. 109 (1926).

per mezzo di postulati slegati e talora contraddittori, e a conseguire in modo preciso dei risultati nuovi che la vecchia teoria forniva solo vagamente per mezzo del principio di corrispondenza. A questa nuova meccanica è stato dato il nome di meccanica ondulatoria.

Scopo del presente lavoro è anzitutto l'estensione del principio delle adiabatiche alla meccanica ondulatoria. Nella teoria ordinaria dei quanti il principio delle adiabatiche afferma, come è noto, che se si altera adiabaticamente il meccanismo di un sistema atomico che si trovi inizialmente in uno stato quantico, il sistema resta durante tutta la trasformazione in uno stato quantico. Questo principio, nella quantistica ordinaria, ha la sua base matematica in un teorema di meccanica analitica dovuto a Burgers, il quale dimostra che gli $\oint p dq$ sono invarianti adiabatici. In questa Nota dimostreremo che un principio analogo può dedursi come conseguenza dei principii fondamentali della nuova meccanica. In una seconda parte del lavoro (§ 3), estenderemo poi alla meccanica ondulatoria le nozioni classiche di energia cinetica ed energia potenziale.

2. Consideriamo un sistema meccanico ad f gradi di libertà, soggetto a forze derivanti da un potenziale V . Supporremo che il sistema sia in un determinato stato quantico (il k -esimo) vale a dire che sia presente la sola oscillazione di frequenza $\nu_k = \frac{E_k}{h}$: allora lo scalare di campo ψ che caratterizza lo stato del sistema sarà dato da

$$(1) \quad \psi = u_k e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}$$

dove u_k è la k -esima autofunzione (Eigenfunktion) normalizzata della equazione differenziale

$$(2) \quad \Delta u + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) u = 0$$

ed E_k è il relativo autovalore. Supponiamo esplicitamente tutte le E_k diverse tra loro, escludendo così il caso dei sistemi degeneri, cui il principio delle adiabatiche non si applica. Immaginiamo ora che il sistema venga trasformato adiabaticamente, vale a dire che il potenziale si trasformi passando da V a V_1 : la trasformazione sia fatta però con infinita lentezza rispetto alla frequenza ν_k con cui varia ψ . (Il caso in cui si trasformano adiabaticamente anche i vincoli del sistema si può ridurre notoriamente a questo). Vogliamo dimostrare che dopo la trasformazione il sistema possiede ancora una sola frequenza, e precisamente la k -esima (naturalmente diversa dalla precedente) cioè si trova ancora nello stato quantico k .

Per la dimostrazione, potremo evidentemente decomporre la variazione continua di V in una successione di infinite variazioni infinitesime brusche δV .

Potremo p. es., prendere per δV la variazione che subisce il potenziale in un tempo finito T (la quale, per la supposta infinita lentezza della trasformazione, risulterà appunto infinitesima) e farla avvenire in un istante che dovremo scegliere *a caso* in questo intervallo di tempo, poichè, per la validità del principio delle adiabatiche, è necessario che non ci sia alcuna relazione fra le variazioni del potenziale e il moto proprio del sistema, per escludere casi di risonanza. Prenderemo poi T molto grande rispetto ai periodi propri del sistema.

Consideriamo ora singolarmente l'effetto di una generica di queste variazioni. Prendiamo per comodità l'origine dei tempi nel mezzo dell'intervallo T entro il quale deve avvenire la variazione, e sia τ l'istante in cui essa avviene: si dovrà poi fare una media facendo variare τ da $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$, e il nostro assunto si ridurrà a dimostrare che, se prima della discontinuità lo scalare di campo aveva la forma (1), anche dopo la discontinuità esso possederà ancora la sola frequenza k -esima. Contrassegniamo con un asterisco i valori che assumono le varie grandezze dopo il tempo τ , cosicchè, p. es., il potenziale sarà V per $t < \tau$ e $V^* = V + \delta V$ per $t > \tau$. Le autofunzioni e gli autovalori dell'equazione (2) subiranno essi pure al tempo τ una brusca variazione che si può calcolare dalla variazione del potenziale con le formule date da Schrödinger per la teoria delle perturbazioni. Naturalmente, essendo δV infinitesimo, basta limitarsi alla prima approssimazione. Si trova così:

$$u_k^* = u_k + \sum_i' \gamma_{ki} u_i, \quad E_k^* = E_k + \epsilon_k$$

dove

$$\gamma_{ki} = \frac{\int \rho u_k u_i \delta V dx}{E_k - E_i}, \quad \epsilon_k = \int \rho u_k^2 \delta V dx.$$

(Le γ e la ϵ sono manifestamente infinitesimi del primo ordine, e l'accento sulla sommatoria indica che in essa manca il termine per cui $i = k$). Le notazioni sono quelle di Schrödinger.

La soluzione ψ^* sarà necessariamente una combinazione lineare di soluzioni fondamentali, cioè sarà del tipo

$$\psi^* = \sum_k c_k u_k^* e^{\frac{2\pi i}{h} E_k^* t}.$$

I coefficienti di questa combinazione risultano determinati dalla condizione che per $t = \tau$ sia $\psi^* = \psi$ (continuità dello scalare di campo!). Si

verifica facilmente che tale condizione è soddisfatta (a meno di infinitesimi di ordine superiore) prendendo

$$\psi^* = u_k^* e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k^* t - \epsilon_k \tau)} - \sum_i \gamma_{ki} u_i^* e^{\frac{2\pi i}{h}(E_i^* t + [E_k^* - E_i^*] \tau)}.$$

Facciamo dunque la media di questa espressione rispetto a τ per $-\frac{T}{2} < \tau < \frac{T}{2}$. Gli esponenziali che figurano nella sommatoria hanno ciascuno per media zero, essendosi supposto T assai grande rispetto ai periodi propri $\frac{h}{E_i}$ del sistema. Quanto al primo termine di ψ^* si noti che il fattore dipendente da τ , $e^{-\frac{2\pi i}{h}\epsilon_k \tau}$, può scriversi, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $1 - \frac{2\pi i}{h}\epsilon_k \tau$, e la sua media tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ è dunque 1. Risulta perciò in definitiva

$$\psi^* = u_k^* e^{\frac{2\pi i}{h}E_k^* t}$$

con che resta dimostrato il principio delle adiabatiche.

È poi manifesto che, se si fosse partiti, invece che dalla soluzione iniziale (1), dalla soluzione più generale

$$(3) \quad \psi = \sum_k \lambda_k u_k e^{\frac{2\pi i}{h}E_k t},$$

si sarebbe giunti alla conclusione che i λ_k non vengono alterati da una trasformazione adiabatica del sistema.

Notiamo incidentalmente che, data l'omogeneità dell'equazione, resta in ψ una costante moltiplicativa arbitraria, che supporremo fissata in modo che risulti $\int \psi \bar{\psi} \rho dx = 1$, il che corrisponde, data la supposta normalizzazione delle u , alla condizione $\sum_k \lambda_k^2 = 1$.

3. L'espressione già data per la variazione ϵ_k di E_k , nel caso della soluzione semplice (1), si può evidentemente mettere sotto la forma

$$\epsilon_k = \int \delta V \psi \bar{\psi} \rho dx$$

indicando con $\bar{\psi}$ il coniugato di ψ . Ciò suggerisce naturalmente l'idea di definire come energia potenziale del sistema in un dato istante la quantità

$$(4) \quad E_{pot} = \int V \psi \bar{\psi} \rho dx,$$

il che appare tanto più opportuno se si pensa che, secondo Schrödinger, nel caso di un solo elettrone $\psi\bar{\psi}$ è proporzionale alla densità elettrica in ciascun punto, per modo che il prodotto $V\psi\bar{\psi}$ rappresenta l'espressione classica per la densità di energia potenziale.

Assumeremo la (4) come definizione dell'energia potenziale anche nel caso che lo scalare di campo abbia la forma generale (3).

Cerchiamo ora di definire nel modo più opportuno il concetto di energia cinetica. Lasciamoci guidare anche qui dalla considerazione di un caso particolare, e precisamente consideriamo la soluzione ψ corrispondente al caso classico del *punto* materiale non soggetto a forze ($V = 0$). Tale soluzione sarà del tipo (3), in cui saranno rappresentati soltanto i termini per i quali E_k è assai prossimo al valore $\frac{1}{2}mv^2$ dell'energia cinetica classica, con tali relazioni di fase da distruggersi per interferenza dovunque, eccetto in una regione ristretta, che corrisponde all'estensione della particella materiale. Adunque ψ soddisferà assai prossimamente all'equazione (2) in cui si faccia $V = 0$, $E = E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ cioè a

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2}{h^2} E_{kin} \psi = 0.$$

Moltiplicando per $\psi\rho dx$ e integrando a tutto lo spazio si ottiene, con facili integrazioni per parti sul primo termine,

$$-\int \text{grad } \psi \times \text{grad } \bar{\psi} \rho dx + \frac{8\pi^2}{h^2} E_{kin} \int \psi\bar{\psi} \rho dx = 0$$

ed, essendosi supposta ψ normalizzata in modo che l'ultimo integrale sia uguale ad 1, si ottiene

$$(5) \quad E_{kin} = \frac{h^2}{8\pi^2} \int \text{grad } \psi \times \text{grad } \bar{\psi} \rho dx.$$

Questa espressione, che nel caso particolare ora trattato corrisponde a quella classica, verrà da noi assunta come espressione generale della forza viva.

A giustificazione delle definizioni introdotte mostreremo ora che la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale così definite, per un sistema generico, si mantiene costante (conservazione dell'energia). Calcoliamo perciò la quantità $E_{pot} + E_{kin}$ in base alle (4) e (5), attribuendo a ψ l'espressione generale (3). Si trova subito

$$E_{pot} + E_{kin} = \sum_i^{\infty} \lambda_r \lambda_s e^{\frac{2\pi i}{h}(E_r - E_s)t} \int \left\{ V u_r u_s + \frac{h^2}{8\pi^2} \text{grad } u_r \times \text{grad } u_s \right\} \rho dx.$$

L'integrale, trasformato per mezzo del teorema di Gauss, diventa

$$\int u_r \left\{ \nabla u_s - \frac{h^2}{8\pi^2} \Delta u_s \right\} \rho dx$$

e tenendo presente che u_s soddisfa la (2) ove si faccia $E = E_s$, si trova

$$E_{pot} + E_{kin} = \sum_{rs} \lambda_r \lambda_s e^{\frac{2\pi i}{h}(E_r - E_s)t} E_s \int u_r u_s \rho dx.$$

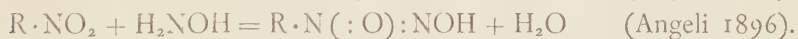
Essendo l'ultimo integrale uguale a zero o a 1 secondo che $r \neq s$ o $r = s$, troviamo in definitiva

$$E_{pot} + E_{kin} = \sum_s \lambda_s^2 E_s = \text{cost.}$$

Resta così dimostrato il principio della conservazione dell'energia, e si trova anche l'espressione dell'energia totale corrispondente allo scalare di campo (3), in funzione dei coefficienti λ .

Chimica. — *Reazione del nitrossile con i nitroderivati aromatici e con gli azossicomposti.* Nota di D. BIGIAMI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. ANGELI.

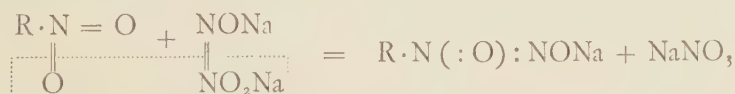
I nitrosoderivati aromatici, come è noto, aggiungono il nitrossile e i nitroderivati si condensano con idrossilammina in presenza di etilato, per dare le nitrosoarilidrossilammine, la struttura delle quali risulta per tal modo evidente:



I medesimi composti si possono ottenere anche facendo agire sopra i nitroderivati un termine più ossidato dell'idrossilammina, cioè il nitrossile. Quest'ultimo si ha insieme all'acido nitroso sotto forma di sale sodico, se si scalda lievemente una soluzione di sale sodico della nitroidrossilammina:



L'ipotesi che la reazione fra il sale $N_2O_3Na_2$ e il nitroderivato sia dovuta ad una reciproca ossidazione e riduzione:



(1) Nella seduta del 21 novembre 1926.

deve essere scartata, perchè fra i sali ottenuti non abbiamo riscontrato il nitrato sodico.

È quindi presumibile che il nitrossile, sotto forma di sale (NONa), venga ossidato a nitrito sodico dal nitroderivato, il quale si trasforma in nitrosocomposto⁽¹⁾: questo però non viene isolato come tale, perchè subito reagisce con il nitrossile per dare la nitrosoarilidrossilammina.

In accordo con questa seconda ipotesi è la quantità di sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico impiegata, che, anzichè di una sola molecola, è di 2-3 molecole per ogni nitrogruppo presente.

Abbiamo in tal modo ottenuto:

1. nitrosofenilidrossilammina: $C_6H_5 \cdot N(:O):NOH$ (già nota), dal nitrobenzolo;

2. nitroso-p-tolil-idrossilammina: $CH_3 \cdot C_6H_4 \cdot N(:O):NOH$ (già nota), dal p-nitro-toluolo;

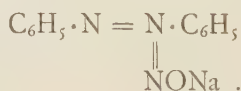
3. m-nitro-fenilnitrosoidrossilammina: $[3] NO_2 \cdot C_6H_4 \cdot N(:O):NOH$ (p.-f. 75-76° con decomp.) dal m-binitrobenzolo;

4. p-nitro-fenilnitrosoidrossilammina: $[4] NO_2 \cdot C_6H_4 \cdot N(:O):NOH$ (p.-f. 73-75° con decomp.) dal p-binitrobenzolo;

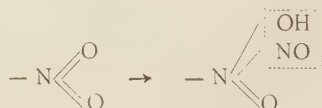
5. p-fenilen-bis-nitrosoidrossilammina: $C_6H_4:(N(:O):NOH)_2 [1-4]$ a 90° annerisce, non fonde), dalla p-nitro-fenilnitrosoidrossilammina.

La 5^a nitrosoidrossilammina è probabilmente sotto forma di un polimero o ha gli ossigeni dei due gruppi N_2O_2H impegnati fra loro, perchè in modo contrario alla regola, non fonde a bassa temperatura decomponendosi, e il suo sale di argento non è alterabile in sospensione acquosa. Anche il p-dinitrosobenzolo, che abbiamo ottenuto scaldando una sospensione acquosa di questa dinitrosoidrossilammina, è probabilmente un polimero: è pochissimo solubile nei solventi organici, non fonde; come gli altri nitrosoderivati, però è distillabile in corrente di vapore.

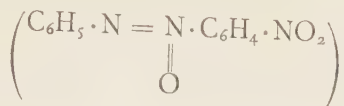
Come i nitroderivati, si comportano anche gli azossicomposti, reagiscono cioè con il nitrossile. Così per quanto ancora sommariamente esaminato, l'azossibenzolo fornisce azobenzolo e un sale sodico che potrebbe essere di questa forma:



(1) La riduzione non procede sensibilmente oltre, alla formazione cioè delle arilidrossilammine, la presenza delle quali si sarebbe rivelata per la loro trasformazione con il nitrossile in diazotati normali. La formazione del nitrosoderivato può spiegarsi con una addizione del nitrossile al gruppo $-NO_2$:

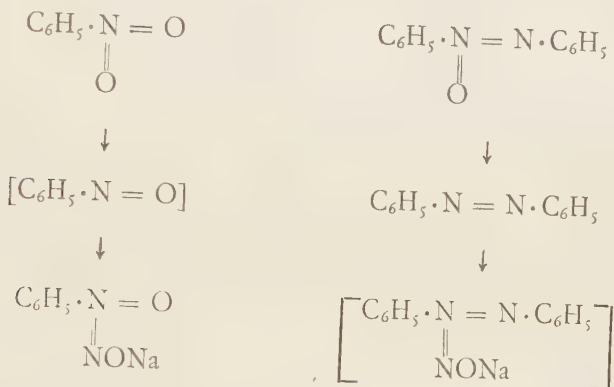


Insieme ad altri prodotti, il p-p'-dinitroazossibenzolo, il p-nitroazossibenzolo:



danno rispettivamente p-p'-binitroazobenzolo e p-nitroazobenzolo.

Confrontando il comportamento del nitrobenzolo con quello dell'azossibenzolo si ha:



Chimica. — *Prodotti di addizione tra anidride solforosa ed idrocarburi aromatici.* Nota I ⁽¹⁾ di F. DE CARLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Recentemente Mazzetti e De Carli ⁽³⁾ hanno messo in evidenza la proprietà che ha il benzolo di addizionare anidride solforosa per formare dei composti, i quali sono stabili solo a bassa temperatura.

Ho voluto estendere questo studio ad altri idrocarburi aromatici, sia omologhi del benzolo sia ad anelli condensati, e riferisco i risultati ottenuti con: toluolo, mesitilene, pseudocumolo, etilbenzolo, cimene e tetralina.

Le esperienze sono state condotte in maniera perfettamente simile a quella del citato lavoro di Mazzetti e De Carli.

In alcuni casi, (toluolo, etilbenzolo, cimene), non ho potuto studiare il diagramma intiero, perchè le miscele ricche in idrocarburo finiscono col rapprendersi in masse di aspetto vetroso.

La tendenza al sopraraffreddamento rende talvolta molto difficile la misura delle temperature eutetiche.

Gli idrocarburi impiegati erano tutti molto puri ed i loro punti di ebollizione e di fusione avevano i valori seguenti:

	p. e.	p. f.
Toluolo	110.8°	— 93.5°
Mesitilene	164.4°	— 56.8°
Pseudocumolo	168.2°	— 54.5°
Etilbenzolo	135.6°	— 93.0°
Cimene	177.1°	— 93.2°
Tetralina	207.0°	— 36.3°

L'anidride solforosa proveniva, al solito, dall'attacco del rame con l'acido solforico. Il suo punto di fusione era sempre: — 72.3°, — 72.5°.

1) Sistema Toluolo-Anidride solforosa.

La cristallizzazione regolare si comincia ad ottenere solo nei miscugli che contengono meno del 55 % di toluolo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(3) « Gazz. Chim. It. », LVI, 34, 1926.

TABELLA I.

N.	Toluolo %	SO ₂ %	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
1	55,21	44,79	— 96°	— 102°
2	50,67	49,33	— 93	— 102
3	46,92	53,08	— 89,9	— 102
4	43,52	56,48	— 88,2	— 101
5	41,50	48,50	— 85,8	—
6	40,64	59,36	— 85,5	—
7	39,40	60,60	— 85,6	—
8	39,00	61,00	— 85,7	—
9	38,13	61,87	— 85,9	—
10	37,80	62,20	— 85,0	—
11	36,70	63,30	— 83,5	—
12	35,50	64,50	— 82,0	—
13	35,00	65,00	— 81,5	—
14	33,00	67,00	— 81,0	—
15	32,10	67,90	— 80,5	—
16	29,50	70,50	— 81,4	—
17	28,29	71,71	— 80,7	—
18	27,10	72,90	— 80,4	—
19	25,85	74,15	— 79,6	—
20	25,00	75,00	— 79,4	—
21	23,35	76,65	— 79,0	—
22	19,60	80,40	— 78,5	—
23	17,50	82,50	— 77,7	—
24	15,80	84,20	— 77,0	—
25	13,22	86,78	— 76,5	—
26	8,50	91,50	— 74,8	—
27	4,20	95,70	— 73,5	—
28	—	100,00	— 72,5	—

Il diagramma di stato mostra un primo cambiamento di direzione in corrispondenza del 41 % ca. A questa composizione può corrispondere un

composto: $(C_6H_5 \cdot CH_3)_2SO_2$ contenente 41.82 % di toluolo con punto di fusione a -85.5° .

Più evidente è la formazione del secondo composto derivante dall'addizione di una molecola di idrocarburo con tre molecole di anidride solforosa. Esso contiene 32.4 % di toluolo e fonde a -80° .

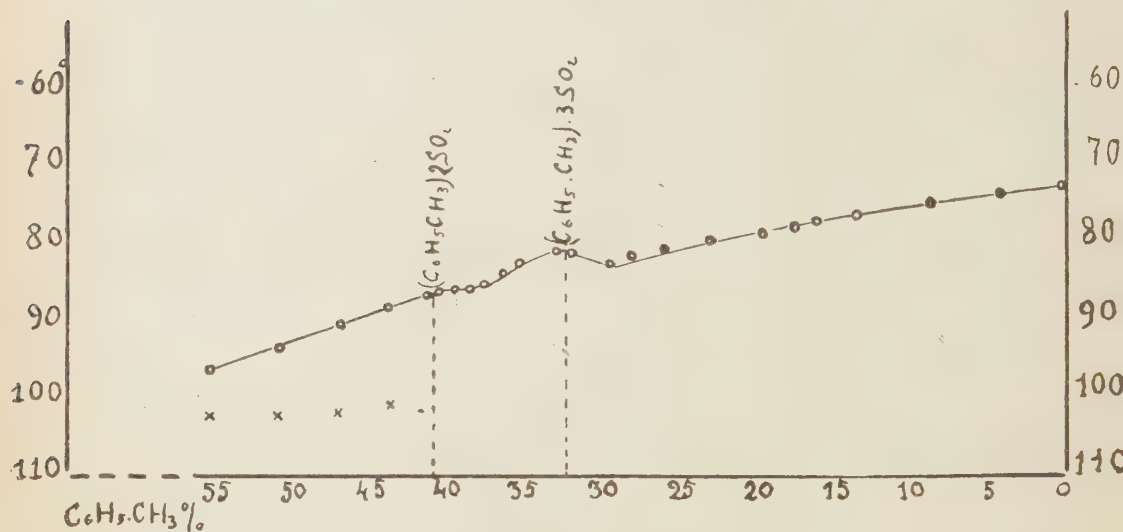


Fig. 1.

2) e 3) Sistemi Mesitilene-Anidride solforosa e Pseudocumolo-Anidride solforosa.

Oltre il sistema con il Mesitilene (trimetilbenzolo simmetrico) ho voluto studiare quello con il pseudocumolo (trimetilbenzolo asimmetrico), per vedere se nella formazione dei composti di addizione ha o no influenza la posizione dei gruppi sostituenti nell'anello benzenico. I due prodotti furono purificati con la massima cura, e, dato che i loro punti di ebollizione e di fusione differiscono di poco (mesit. p. f. -56.8° ; p. e. 164.5° = pseudocum. p. f. -54.5° ; p. e. 168.1°), per accertarmi ancora meglio della loro identità ho preparato i rispettivi derivati monobromurati (C_9H_7Br) che fondevano rispettivamente a -1° e a 72.5° .

a) Mesitilene-Anidride solforosa.

Le soluzioni di mesitilene in anidride solforosa, preparate nell'apparecchio nel quale si eseguivano le esperienze, e quindi in completa assenza di aria, apparivano colorate in giallo arancio, e non si alteravano con il tempo. Quelle preparate mescolando i due liquidi a bassa temperatura, ma in presenza dell'aria, dopo poche ore cominciavano a scurire divenendo prima rosse e poi violette. La differenza di comportamento si può attribuire alla presenza dell'ossigeno; ma per ora non è possibile dare alcuna interpretazione al fenomeno osservato.

Le cristallizzazioni di queste miscele si compiono con molta regolarità senza sopraraffreddamenti sensibili e anche gli eutettici si possono individuare con facilità e sicurezza.

TABELLA II.

N.	Mesitilene %	SO ₂ %	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
1	100 —	—	— 56,8°	—
2	94,70	5,30	— 66,8	— 72,5°
3	92,40	7,60	— 71,3	— 72,0
4	89,90	10,10	— 72,2	— 72,5
5	85,89	14,11	— 66,5	— 72,3
6	83,95	16,05	— 63,0	— 72,0
7	80,23	19,77	— 59,5	— 72,2
8	77,65	22,35	— 54,5	— 72,5
9	75,15	24,25	— 50,5	— 71,3
10	72,20	27,80	— 51,0	—
11	70,00	30,00	— 49,8	—
12	67,60	32,40	— 49,6	—
13	65,26	34,74	— 49,4	—
14	63,31	36,29	— 49,8	—
15	61,15	38,85	— 50,5	—
16	60,96	39,04	— 51,2	—
17	56,15	43,95	— 51,7	— 75,5
18	51,62	48,38	— 53,0	— 76,0
19	47,72	52,28	— 56,9	— 76,9
20	44,45	55,55	— 58,7	— 77,0
21	43,05	56,95	— 59,0	— 77,4
22	39,33	60,67	— 60,4	— 77,4
23	34,57	65,43	— 65,5	— 77,4
24	29,88	70,12	— 66,2	— 77,3
25	25,86	74,14	— 68,5	— 77,4
26	23,22	76,78	— 70,0	— 77,3
27	21,94	78,06	— 70,4	— 77,4
28	18,35	81,65	— 73,0	— 77,0
29	12,10	87,90	— 75,3	— 77,0
30	9,92	90,00	— 76,5	— 77,0
31	8,42	91,50	— 75,3	— 77,0
32	6,56	93,44	— 75,0	— 77,3
33	—	100,00	— 72,3	—

Dall'esame del diagramma risulta nettamente l'esistenza di un composto la cui composizione molecolare è rappresentata dal rapporto 1:1.

L'aggiunta di SO_2 al mesitilene abbassa il punto di congelamento di questo fino all'eutettico che contiene 10 % di SO_2 e cristallizza a -72.5° .

La temperatura di cristallizzazione torna poi a salire fino a -49.4° , in corrispondenza del composto, per tornare a discendere regolarmente a -76.5° dove si incontra il secondo eutettico (10 % ca. di mesit.).

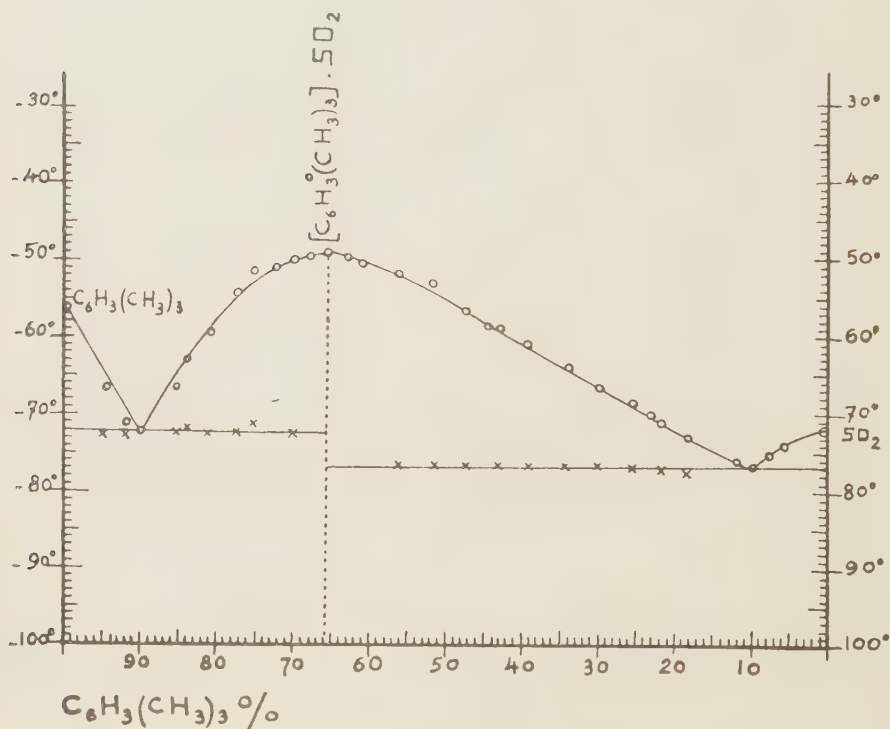


Fig. 2.

I miscugli di composizione molto vicina a quella del composto solidificano in cristalli ben visibili ad occhio nudo. Essi hanno l'aspetto di ottaedri.

b) *Pseudocumolo.*

Comportamento del tutto simile a quello del mesitilene.

TABELLA III.

N.	Pseudocumolo ‰	SO ₂ ‰	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
1	100,00	—	— 54,5°	—
2	92,50	7,50	— 63,5	—
3	90,64	9,36	— 64,8	— 71,0
4	86,23	13,77	— 71,0	— 71,5
5	80,68	19,32	— 67,6	— 71,0
6	76,35	23,65	— 65,5	— 71,0
7	69,78	30,22	— 60,0	—
8	64,81	35,19	— 61,0	—
9	60,53	39,47	— 62,2	—
10	56,95	43,05	— 64,5	—
11	53,50	46,50	— 67,2	—
12	50,40	49,60	— 68,4	—
13	45,95	54,05	— 71,8	— 81,5
14	42,04	57,96	— 74,0	— 81,7
15	40,74	59,80	— 76,0	— 82,6
16	36,00	64,00	— 77,4	— 82,0
17	34,25	65,75	— 80,5	— 82,0
18	31,86	68,14	— 82,0	— 82,0
19	30,00	70,00	— 81,0	— 82,0
20	25,45	74,55	— 78,5	— 82,0
21	21,50	78,50	— 77,4	—
22	15,00	85,00	— 75,0	—
23	9,25	90,75	— 74,2	—
24	5,00	95,00	— 73,0	—
25	—	100,00	— 72,3	—

Il diagramma è analogo al precedente e mostra la separazione del composto molecolare 1 : 1 che fonde a -60° .

Dei due eutettici: il primo (15 % di SO_2) cristallizza a -71° , il secondo (68 % di SO_2) a -82° .

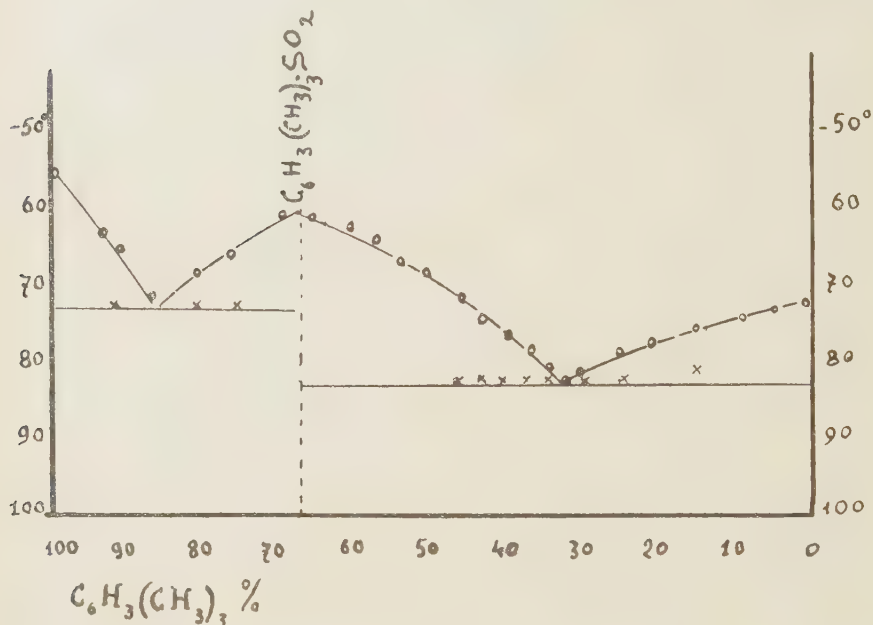


Fig. 3.

Le soluzioni sono colorate in giallo chiaro e cristallizzano con facilità senza subire sopraraffreddamenti sensibili.

Chimica. — *Reagibilità allo stato solido del biossido di manganese.* Nota di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Composti di addizione fra metalli tetra e bivalenti e basi organiche. (Probabile natura delle valenze secondarie).* Nota di G. SCAGLIARINI, presentata dal Corrisp. M. G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Resti di un apparato eruttivo di età giurese scoperti in Sicilia* ⁽¹⁾. Nota di R. FABIANI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

Ho dato ultimamente notizia ⁽³⁾ di numerosi affioramenti di rocce eruttive, prevalentemente di tipo basaltico, rinvenuti nelle mie escursioni nella Sicilia centrale e occidentale, che dimostrano come la presenza di rocce di tal natura sia in detta regione molto più frequente di quanto risultava finora. Nella stessa occasione segnalavo anche l'esistenza nella valle del Torto, presso la stazione ferroviaria di Roccapalumba (Palermo), di un piccolo apparato eruttivo, i cui resti sono rappresentati da filoni e colate e da depositi di tufi vulcanici. In qualche punto questi ultimi racchiudono dei fossili marini.

Nelle prime visite alla località non avendo potuto raccogliere che poche e mal conservate forme fossili, mi ripromettevo di fare appena possibile nuove ricerche, e ciò per il valore evidente che in rapporto alla cronologia della manifestazione eruttiva avrebbe avuto il rinvenimento di fossili caratteristici. Le nuove ricerche compiute nel corrente mese di ottobre ebbero esito fortunato, giacchè fornirono i desiderati elementi paleontologici per stabilire l'epoca dell'eruzione, la quale, come vedremo, spetta a un periodo in cui i depositi piroclastici fossiliferi finora noti sono una vera rarità.

Nella carta geologica della Sicilia al 100.000 del R. Ufficio Geologico (foglio Termini Imerese) subito a nord della stazione di Roccapalumba (linea Palermo-Girgenti), lungo la valle del Torto, è segnata un'isola di rocce del Giurese superiore (Malm) delimitata per la maggior parte dai terreni del Miocene superiore e nel lato sud-est dai depositi dell'Eocene medio.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(3) FABIANI R., *Risultati delle escursioni geologiche da me fatte in Sicilia durante il 1925 e il 1926.* « Boll. Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo » (sed. 3 luglio 1926), vol. VIII. Palermo, 1926.

Dai miei rilievi è risultato anzitutto che il tratto segnato come eoecico è invece costituito in piccola parte da scisti silicei e arenarie riferibili al Lias superiore e pel resto da calcari compatti lastriformi, con intercalazioni marnose, a Posidonomie ed Halobie del Trias, e che tali formazioni triasiche esistono pure a contatto con quelle giuresi all'estremo nord-ovest, là dove nella predetta carta geologica è indicata la presenza del Miocene. L'affioramento giurese risulta così contiguo al Miocene solo a nord e nel primo terzo del lato est-nord-est.

Oltre a ciò non è indicata nella carta stessa alcuna traccia di formazioni eruttive e piroclastiche, mentre queste hanno uno sviluppo considerevole, occupando la metà circa dell'area assegnata al lembo giurese, area valutabile almeno tre chilometri quadrati, ed estendendosi poi anche all'infuori di essa verso nord-ovest e ad ovest dal lato di Roccapalumba paese.

Il lembo calcareo, attribuito completamente al Giurese superiore, non forma un tutto continuo, ma risulta smembrato in blocchi, emergenti dal terreno circostante in forma di grandi rupi, ora isolate, ora a gruppi, che imprimono una spiccata caratteristica morfologica all'accennato tratto della valle del Torto, ricordata con tutta evidenza anche nella toponomastica (Castelluccio, Le Rocche, i Ciaccati).

La roccia eruttiva, di tipo basico, si presenta spesso con aspetto conglomeratico (ingloba non di rado dei pezzi calcarei) ed è profondamente alterata, di modo che riesce difficilissimo trovare in qualche blocco delle zone discretamente fresche, specialmente negli affioramenti più vicini alla valle, mentre è in condizioni migliori in quelli più occidentali verso il paese di Roccapalumba, nei quali presenta anche caratteristiche alquanto diverse. Ma dei caratteri petrografici di tali rocce non è qui il caso di parlare.

Come rapporti di giacitura la roccia lavica ora è interposta tra i blocchi calcarei in forma filoniana, ora si spinge al di sotto di essi, ora si stende al di sopra come colata.

Le rocce piroclastiche si trovano depositate sopra grossi banchi di calcari a grana grossa del tipo dei cosiddetti « calcari ad Entrochi » contenenti articoli di Crinoidi, piccoli Coralli, ecc., con qualche plaga a concrezioni oolitiche. In basso i tufi sono assai grossolani, vere brecciole, poi diventano a grana fina e anche finissima e sono nettamente stratificati. I fossili si trovano solo nella parte inferiore. Al di sopra dei sedimenti piroclastici seguono altri calcari da prima in grossi banchi e con numerosi frammenti di roccia eruttiva, superiormente in strati via via più sottili.

Quanto ai fossili trovati nelle brecciole vulcaniche, prescindendo da pochi frustoli d'origine vegetale, essi appartengono a Coralli semplici, a Crinoidi, ad Echinidi (Cidaridi, ecc.), a Molluschi ed a Crostacei.

Più abbondanti sono i Molluschi con prevalenza di Lamellibranchi (*Pteroperna*, *Pecten*, *Trigonia*, *Cypriocardia*, ecc.), mentre i Gasteropodi sono scarsamente rappresentati da poche forme, fra le quali primeggiano gli esem-

plari di *Nerinea* (es. *N. aff. N. triplicata* Voltz) e altrettanto avviene nei Cefalopodi (pochi resti di *Phylloceras*, *Oppelia*, *Stephanoceras*).

La fragilità del guscio di tutti questi fossili ne rende assai difficile la preparazione per lo studio, cosicchè per il momento ho potuto determinarne solo un piccolo numero, e cioè:

Pentacrinus crista-galli Quenst., *Pteroperna pygmaea* Dunk., *P. bajocensis* Grep., *Trigonia haemisphaerica* Lyc. (assai frequente), *Cypricardia cf. rostrata* Sow., *Oppelia cf. subradiata* Sow., *Stephanoceras humphriesianum* Sow.

È un gruppo veramente esiguo, ma in compenso è assai significativo, perchè se qualcuno dei Lamellibranchi venne riscontrato in più livelli del Giurese medio, gli altri fossili, e segnatamente le Ammoniti, ci precisano trattarsi di un orizzonte del *Bajociano*.

Com'è noto, tracce di manifestazioni di attività endogena sicuramente riportabili al Giurese sono rare in Europa, specialmente in quella occidentale, e sono per lo più rappresentate soltanto da rocce eruttive, mentre in pochissime località a queste si associano anche quelle di natura piroclastica, come ad es. nei dintorni di Espinasse nel bacino della Durance (Haug), nel Banato, nel M. Kara Dagħ sulle rive del Mar Nero (Lăgorio).

Da quanto ho potuto riscontrare nella bibliografia a mia disposizione in nessuna località europea tali depositi piroclastici risultano fossiliferi, di modo che manca il dato paleontologico per una determinazione cronologica precisa. Soltanto nell'America del Nord, e precisamente nella Sierra Nevada, H. W. Turner ha segnalato nel 1895 la presenza di Ammoniti entro i tufi che accompagnano delle colate di andesiti augitiche.

Il caso da me descritto ha dunque in primo luogo e in linea generale un interesse notevole per la sua rarità. In particolare poi il rinvenimento di un orizzonte del Bajociano entro la serie dei calcari di Roccapalumba stazione permette di affermare che il lembo al quale appartengono non spetta esclusivamente al Malm, come è indicato nella carta del R. Ufficio Geologico, ma si ripartisce in più termini del Giurese medio e superiore.

Le mie prime ricerche nella località avevano avuto lo scopo di rintracciare qualche affioramento permiano, sull'indizio di pochi blocchetti di calcare con fossili uguali a quelli del Permiano della Valle del Sosio trovati erratici presso la stazione di Roccapalumba (G. G. Gemmellaro, L. Baldacci), e ora conservati nel museo di geologia dell'Università di Palermo. La ricerca non ha avuto buon esito a tale riguardo, ma in compenso ha permesso di fare le constatazioni che riassumo:

Il lembo di calcari giuresi che emerge lungo la valle del Torto presso la stazione di Roccapalumba non è circondato totalmente da rocce terziarie, come risultava dai rilievi precedenti, ma è per gran tratto contiguo a rocce del Trias e del Lias.

Esso è poi attraversato da filoni e in certi punti coperto da colate di rocce eruttive, alle quali si accompagnano dei tufi stratificati in qualche

punto fossiliferi. I fossili raccolti indicano che la deposizione dei materiali piroclastici è avvenuta durante il Giurese medio, e precisamente nel Bajociano, e che l'eruzione è stata sottomarina.

In Sicilia si ebbero dunque manifestazioni di attività endogena, con emissione di rocce effusive, fino dal Giurese.

La fauna dei depositi siciliani attribuiti al Dogger medio, nota specialmente dai lavori di G. G. Gemmellaro e Di Stefano, e rappresentata, a prescindere dalla *Posidonomya alpina*, generalmente da Brachiopodi ed Ammoniti, risulta più ricca e variata, offrendo nelle forme di Echinidi, di Lamellibranchi e di Gasteropodi, segnalate a Roccapalumba (tutte nuove per la Sicilia), delle specie caratteristiche delle classiche località bajociane della Francia, dell'Inghilterra e della Svizzera. La serie calcarea nei pressi della stazione di Roccapalumba, già attribuita esclusivamente al Neogiurassico, comprende anche sedimenti più antichi spettanti al Dogger.

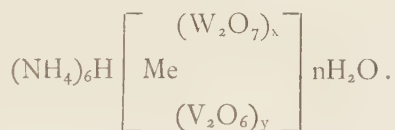
Quanto infine all'accennato rinvenimento di blocchi erratici di calcari permiani, presentando essi vari indizi di subito metamorfismo, per cui si distinguono a primo aspetto da quelli della valle del Sosio, ritengo che durante l'eruzione siano stati strappati da strati profondi e portati a giorno inglobati nella lava. Ne conseguirebbe dunque che detti calcari appartenevano al substrato locale, circostanza che, messa in rapporto con quanto ho avuto occasione di scrivere sulle condizioni di giacitura degli spuntoni permiani della valle del Sosio, fornirebbe una nuova prova in appoggio alla interpretazione da me data altra volta⁽¹⁾, cioè che detti spuntoni rappresentano i frammenti di un'anticlinale deformata e frantumata, sospinti per fenomeni di diapirismo attraverso alle formazioni triasiche, e non vanno pertanto riguardati quali residui di grandiose falde di ricoprimento provenienti da grande distanza e formatesi durante il Terziario, come ammettono alcuni autori.

(1) FABIANI R., *Osservazioni preliminari sulle condizioni di giacitura del Permiano della valle del Sosio*. « Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo », N. S. Anno VII, 1925, n. 3.

Cristallografia. — *Ricerche cristallografiche su alcuni eteropolicomposti*⁽¹⁾. Nota di F. RODOLICO, presentata⁽²⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

Gli eteropolicomposti, secondo l'autorevole osservazione del ROSENHEIM, che ha riassunti tutti gli studi fatti sull'argomento, « hanno bisogno di nuove indagini specialmente sotto l'aspetto cristallografico ⁽³⁾ ». Pertanto ho studiato i cristalli di alcuni nuovi sali di questo gruppo preparati dal prof. GIOVANNI CANNERI nell'Istituto di chimica della R. Università di Firenze ⁽⁴⁾. Dal prof. CANNERI mi sono stati comunicati i seguenti dati relativi alla chimica dei composti.

Essi appartengono a due serie isomorfe di eterotrisali che possono essere rappresentate dal seguente schema:



Nella prima serie l'atomo coordinante Me è quello del fosforo (*fosfo-wolframovanadati*), nella seconda è quello dell'arsenico (*arsenowolframovanadati*). In tutte e due le serie varia con continuità il rapporto tra W_2O_7 e V_2O_6 ma la somma $(x + y)$ delle molecole dei due radicali ossigenati bivalenti è sempre uguale a sei. I termini estremi delle due serie che, per brevità, indico con α e con ω , hanno la seguente composizione centesimale:

Sali	% P	% As	% WO_3	% V_2O_5	% NH_3	% H_2O
α P	1.35	—	40.06	32.86	4.48	18.6
ω P	1.16	—	64.22	12.09	3.48	15.9
α As	—	3.01	40.26	31.60	4.31	18.6
ω As	—	2.81	63.28	13.06	3.86	15.6

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze, diretto dal prof. P. ALOISI.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(3) In ABEGG-AUERBACH, *Handbuch der anorganischen Chemie*. Vol. IV, parte I, 2, p. 996. Leipzig, 1921.

(4) « Gazzetta chimica italiana ». In corso di stampa.

I cristalli sono colorati in rosso più o meno intenso a seconda del vario contenuto in Vanadio. Essi appartengono al sistema tetragonale; ciò si deduce più dalle proprietà ottiche che non da quelle geometriche come dirò più avanti. Le forme presenti sono:

$$c \{001\}; p \{111\}; a \{010\}$$

riunite sempre nelle seguenti combinazioni:

$$a) \{111\}, \{001\}$$

$$b) \{111\}, \{001\}, \{010\}.$$

Il vario sviluppo delle facce fa sì che i cristalli si presentino con aspetti diversi. La combinazione *a*) per lo sviluppo predominante della base $\{001\}$

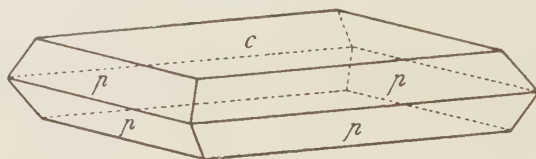


Fig. 1.

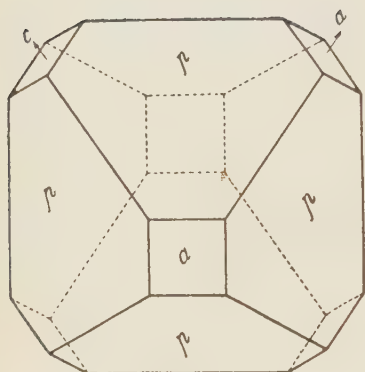


Fig. 2.

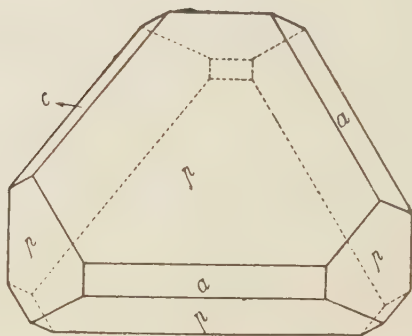


Fig. 3.

ha aspetto tetragonale (fig. 1); la combinazione *b*) talvolta per lo sviluppo regolare di tutte le facce presenta aspetto monometrico (fig. 2); talora questa combinazione per uno sviluppo predominante di due facce opposte di $\{111\}$ assume un aspetto romboedrico (fig. 3). Quest'ultimo abito è il più comune.

Per quanto facilmente alterabili i cristalli appena preparati si prestano perfettamente a misure goniometriche. Ecco i valori angolari relativi ai quattro composti:

Angoli	Limiti delle misure	N.	Medie	Calcolati (1)
Composto α P				
(111) : (001)	$54^{\circ} 21' - 54^{\circ} 45'$	20	* $54^{\circ} 33'$	—
(111) : (010)	$54^{\circ} 40' - 54^{\circ} 58'$	35	$54^{\circ} 50'$	$54^{\circ} 50'$
(111) : ($1\bar{1}1$)	$70^{\circ} 15' - 70^{\circ} 30'$	14	$70^{\circ} 26'$	$70^{\circ} 20'$
(111) : ($11\bar{1}$)	$70^{\circ} 50' - 70^{\circ} 59'$	11	$70^{\circ} 56'$	$70^{\circ} 53'$
Composto ω P				
(111) : (001)	$54^{\circ} 42' - 54^{\circ} 49'$	9	* $54^{\circ} 46'$	—
(111) : ($1\bar{1}1$)	$70^{\circ} 30' - 70^{\circ} 36'$	5	$70^{\circ} 33'$	$70^{\circ} 34'$
(111) : ($11\bar{1}$)	$70^{\circ} 24' - 70^{\circ} 30'$	5	$70^{\circ} 26'$	$70^{\circ} 28'$
Composto α As				
(111) : (001)	$54^{\circ} 25' - 54^{\circ} 56'$	25	$54^{\circ} 42'$	$54^{\circ} 43'$
(111) : (010)	$54^{\circ} 38' - 55^{\circ}$	3	$54^{\circ} 47'$	$54^{\circ} 45'$
(111) : ($1\bar{1}1$)	$70^{\circ} 19' - 70^{\circ} 37'$	6	* $70^{\circ} 31'$	—
Composto ω As				
(111) : (001)	$54^{\circ} 40' - 54^{\circ} 57'$	10	$54^{\circ} 55'$	$54^{\circ} 46'$
(111) : (010)	$54^{\circ} 39' - 54^{\circ} 44'$	6	$54^{\circ} 42'$	$54^{\circ} 43'$
(111) : ($1\bar{1}1$)	$70^{\circ} 30' - 70^{\circ} 40'$	9	* $70^{\circ} 34'$	—

Ho misurato i cristalli di molti termini intermedi delle due serie ottenendo sempre valori angolari pressochè uguali a quelli dei termini estremi.

Le oscillazioni dei valori angolari non sono lievi dato che tutte queste misure possono considerarsi ottime; in ogni modo gli angoli sono sempre vicinissimi a quelli del sistema monometrico che qui riporto per i confronti:

$$(111) : (001) = 54^{\circ} 44' 8''$$

$$(111) : (1\bar{1}1) = 70^{\circ} 31' 44''$$

Si nota solo talvolta qualche lieve differenza tra angoli che nel sistema monometrico hanno lo stesso valore. Così nei cristalli α P vi è una dif-

(1) Calcolati in base alle costanti riportate in seguito.

ferenza di $17'$ tra gli angoli $(111):(001)$ e quelli $(1\bar{1}\bar{1}):(010)$. Negli altri cristalli queste differenze vanno attenuandosi. Si può notare anche che le differenze dai valori monometrici non hanno lo stesso senso nei termini estremi delle due serie. Ciò rivela una tendenza a differire in modo diverso dalla simmetria monometrica, la qual cosa è dimostrata anche dalle costanti che potrebbero calcolarsi in base ai migliori valori e che porterebbero a:

$$\begin{cases} \alpha P & a:c = 1:0.9932 \\ \omega P & a:c = 1:1.0011 \\ \alpha As & a:c = 1:0.9994 \\ \omega As & a:c = 1:1.0011 \end{cases}$$

I valori numerici non sono però tali da dare eccessivo peso a questi rilievi. Si può solo affermare che, dal punto di vista geometrico, entro i limiti degli errori sperimentali, non è possibile distinguere questi cristalli da cristalli monometrici.

I sali delle due serie sono tra loro isomorfi; inoltre il radicale W_{10} può essere parzialmente sostituito da Mo_2O_7 . Si hanno così dei composti che contengono cinque radicali acidi ed hanno una straordinaria complessità molecolare: gli *arsenofosfomolibdowolframovanadati*. Dei seguenti composti di quest'ultimo tipo ho studiato i cristalli:

Sali	% As	% P	% WO_3	% V_2O_5	% MoO_3	% NH_3	% H_2O
A	1.06	0.91	16.8	23.4	37.1	4.21	16.9
B	1.31	0.78	18.5	30.8	28.4	4.06	17.6

Nonostante la forte differenza di composizione chimica nel gruppo coordinato, i caratteri dei cristalli si mantengono pressochè inalterati. Ho ottenuti infatti i seguenti valori angolari:

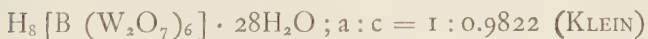
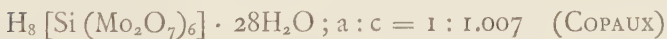
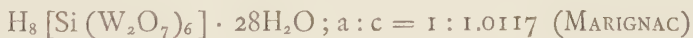
Angoli	Limiti delle misure	N.	Medie
Sale A			
$(111):(1\bar{1}\bar{1})$	$70^\circ 30' - 70^\circ 35'$	5	$70^\circ 32'$
$(111):(001)$	$54^\circ 35' - 54^\circ 45'$	5	$54^\circ 41'$
Sale B			
$(111):(1\bar{1}\bar{1})$	$70^\circ 36' - 70^\circ 39'$	3	$70^\circ 38'$
$(111):(001)$	$54^\circ 38' - 54^\circ 45'$	4	$54^\circ 42'$

Dal lato ottico i vari cristalli sono birifrangenti uniassici. Le osservazioni sono state fatte su sezioni sottili e su alcuni cristalli completi che, per la loro piccolezza, si prestavano allo scopo. Le sezioni sottili tagliate nei cristalli del tipo di quelli rappresentati nella fig. 1, parallelamente alla base {001} mostrano evidentissime e centrate la isogira e le curve isocromatiche. Le sezioni tagliate nei cristalli simili a quelli rappresentati nella fig. 3 parallelamente alle facce più sviluppate della bipiramide {111} si mostrano notevolmente inclinate sull'asse ottico. Ciò ha permesso di assegnare i cristalli al sistema tetragonale, escludendo con sicurezza i sistemi monometrico e romboedrico.

I cristalli dei silicowolframati descritti da WYROUBOFF⁽¹⁾ presentano una profonda analogia morfologica con quelli da me studiati. WYROUBOFF, in base alle osservazioni ottiche, li considera romboedrici, e li ritiene pseudosimmetrici, avendo notata una variazione nel contegno ottico qualche tempo dopo la preparazione. Non credo che nel mio caso si tratti di pseudosimmetria poichè ho sempre notato un contegno ottico normale.

La birifrazione non è molto elevata ed ha carattere positivo; la forte colorazione rossa, la scarsa omogeneità e la facilità con la quale i cristalli si alterano non hanno permesso altre misure ottiche.

I cristalli tetragonali fino ad oggi studiati presentano, per quanto mi risulta, la costante c lontana da 1 tanto che non è possibile confonderli con cristalli monometrici. Soltanto è stato già notato che alcuni metawolframati ed eteropolicomposti danno cristalli per lo più romboedrici, ed anche tetragonali, quasi monometrici; ad esempio i seguenti acidi che danno cristalli tetragonali⁽²⁾:



Per le loro proprietà morfologiche i cristalli da me studiati presentano in modo spiccato il carattere di limite tra i due sistemi monometrico e tetragonale.

(1) « Bull. soc. franç. de minér. », XIX (1896) 267.

(2) GROTH, *Chemische Kristallographie*, I, 130; Leipzig, 1915. Le formule sono quelle date per gli stessi acidi da ROSENHEIM, op. cit., p. 994.

Ottica fisiologica. — *Sulla funzione ottica del liquido lacrimale.* Nota ⁽¹⁾ del prof. V. RONCHI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. GARBASSO.

L'occhio come sistema ottico è stato oggetto di numerose ricerche che hanno portato a conoscerne con tutta la cura possibile la costituzione, le proprietà, le costanti e le aberrazioni. Ciononostante nessuno, almeno per quanto ci consta, si è occupato di indagare in qual modo la Natura riesce a ottenere le superficie otticamente corrette che sono indispensabili in ogni strumento perchè dia le immagini colla massima finezza e nettezza che compete alla sua apertura, e che nelle officine vengono realizzate solo dopo una lunghissima e accuratissima lavorazione.

Perchè: se le onde luminose emesse da una sorgente puntiforme (stella naturale o artificiale) attraversano un sistema ottico, questo dà un'immagine perfetta della stella, come è ben noto, quando l'onda emergente dal sistema stesso è sferica col centro nell'immagine. L'onda sferica incidente, che aveva il centro nella stella, si trasforma nell'onda emergente cambiando la curvatura in virtù dei diversi ritardi che i diversi spessori di materiale rifrangente attraversati dai suoi elementi procurano a questi.

Però, come risulta dai ben noti calcoli di Lord Rayleigh, non è necessario che l'onda emergente sia matematicamente sferica, perchè l'immagine sia da considerarsi perfetta: infatti essendo questa una figura di diffrazione e non un punto geometrico, delle deformazioni dell'onda inferiori a $\lambda/4$ (λ = lunghezza d'onda della luce impiegata) portano delle alterazioni insensibili e l'immagine è ancora praticamente perfetta. Ciò richiede in tutte le superficie attraversate dalle onde una regolarità dell'ordine di $\lambda/4$, come si dice comunemente; e negli strumenti ottici con lenti di vetro immerse nell'aria, essendo $(n - n')l$ la deformazione prodotta sulla superficie d'onda da uno spessore l di sostanza di indice n a contatto con un'altra di indice n' , le montagne ancora tollerabili sulle superficie ottiche possono raggiungere 0.2μ di altezza. E questa è appunto la precisione colla quale vengono lavorate le parti ottiche dei buoni strumenti.

Considerazioni analoghe valgono per l'omogeneità dei varî mezzi attraversati dalle onde.

Ora nell'occhio si hanno quattro superficie che dovrebbero essere superficie ottiche: le due della cornea e le due del cristallino. Lasciando per ora la superficie esterna della cornea, notiamo che quella interna è a contatto coll'umore acqueo e che la differenza dei due indici di rifrazione $n - n'$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Firenze-Arcetri.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1926.

raggiunge appena 0.001; le protuberanze tollerabili in queste condizioni arrivano a circa 0.1 mm.; la *lavorazione* della superficie che si richiede è assai grossolana ed è ammissibile che in natura sia realizzata.

Analogamente per il cristallino: com'è noto esso è costituito a strati di indice crescente dall'interno verso il centro e l'indice dello strato esterno differisce da quello dell'umore acqueo e del corpo vitreo giusto di una o due unità della terza decimale; dunque anche per le superficie del cristallino si richiede una lavorazione dell'ordine di finezza di quella richiesta per la superficie interna della cornea; ed è naturale che sia realizzata.

Lo stesso dicasi per le superficie che separano i vari strati del cristallino.

Invece non si può dire altrettanto per la superficie esterna dell'occhio. Se la cornea fosse a contatto dell'aria, l'altezza delle protuberanze tollerabili raggiungerebbe circa 0.3μ , e tale dovrebbe essere la finezza della lavorazione della superficie esterna della cornea. Ora questo non è ammissibile, perchè la struttura di un tessuto è assai più grossolana: basti considerare che i dettagli dell'ordine di 0.3μ sono invisibili negli ordinari microscopi in luce bianca, mentre la struttura cellulare è benissimo osservata. Inoltre non consta che nessun'altra superficie epiteliale sia otticamente corretta.

D'altra parte la bontà delle immagini che si ottengono nell'occhio e il suo potere risolutivo così prossimo a quello teorico negli occhi normali richiedono la correzione ottica in tutte le parti attraversate dalle onde luminose.

Per questo appunto noi riteniamo essenziale la presenza del liquido lacrimale sulla parete esterna della cornea. È noto infatti che la superficie libera di un liquido è otticamente perfetta. La Natura, non potendo fare un epitelio lavorato colla finezza necessaria, lo ha ricoperto di uno strato liquido, continuamente purificato e rinnovato dalle palpebre. Così la superficie a contatto dell'aria è perfetta e quella della cornea, data la differenza minima degli indici di rifrazione (presumibilmente non arriva neppure a una unità della 3^a decimale), può avere delle protuberanze dell'ordine del decimo di mm., senza influire sulla finezza delle immagini sulla retina. L'effetto del liquido lacrimale sarebbe molto simile a quello di una goccia d'acqua che sparsa sopra un vetro finemente smerigliato lo rende trasparente.

Se non temessimo di esagerare in questo senso, vorremmo trovare in queste considerazioni la ragione, o almeno una delle ragioni, dell'essere il cristallino costituito a strati di indice crescente verso il nucleo, e della presenza degli umori vitreo e acqueo nell'interno del globo oculare.

Si può sollevare qualche obiezione: infatti per quanto la massima parte degli animali abbiano la cornea bagnata, ne esistono anche colla cornea asciutta. Però non è assicurato che questi abbiano una precisione e una acutezza nella vista, paragonabile con quella degli animali a cornea bagnata.

D'altra parte è noto che senza il liquido lacrimale non si può vedere. Ciò veniva attribuito finora al fatto che la cornea non può rimanere a lungo all'asciutto senza alterarsi. Non è escluso però che a questo fattore si unisca anche il nuovo, e che le funzioni del liquido lacrimale siano da distinguersi in due: una fisiologica, in quanto alimenta la cornea del liquido necessario, e una ottica, in quanto dà alla superficie esterna la correttezza che le è indispensabile.

Con questo abbiamo inteso soltanto di avanzare un'idea che ci sembra nuova, giusta e degna di considerazione; perchè coloro che, meglio di noi, dispongono del materiale e dei mezzi necessari, possano vagliarne il pro e il contro e sottoporre le conclusioni al controllo dell'esperienza.

Fisiologia vegetale. — *La forma a bacteroide e l'immunità nelle Leguminose.* Nota di C. CAPPELLETTI, presentata dal Socio O. MATTIROLO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 dicembre 1926.

A. GARBASSO, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle uniformizzanti di funzioni non uniformi.*
Nota del corrisp. U. CISOTTI⁽¹⁾.

1. — LE UNIFORMIZZANTI DI UN TIPO DI FUNZIONI ANALITICHE NON UNIFORMI. — Si consideri la funzione

$$(1) \quad f(z) = z^m,$$

della variabile complessa z , nei punti del cerchio $|z| \leq R$, essendo $0 \leq m \leq 1$ un numero reale prefissato. La funzione è limitata e continua per $|z| \leq R$, ma *non è uniforme*. Nei punti della circonferenza $|z| = R$ si ha: $z = Re^{i\sigma}$ con $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, e la parte reale della predetta funzione f assume i valori

$$(2) \quad R^m \cos m\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi.$$

Risulta da questa che alla variazione 2π di σ , dopo un intero giro a partire da $\sigma = 0$, l'espressione (2) varia di $R^m (\cos 2m\pi - 1)$.

Designi $\Phi(z)$ quella funzione analitica e *uniforme* per $|z| < R$, la cui parte reale assume sulla circonferenza $|z| = R$ la successione di valori (2). Tale funzione ci proponiamo di determinare tra poco usando la nota formula di Schwarz. Pel momento ci basta di sapere che esiste e che (a meno di una arbitraria costante additiva, puramente immaginaria) è determinata. La funzione $\Phi(z)$, che ha comuni colla $f(z)$ i valori della parte reale per

(1) Presentata nella seduta del 7 novembre 1926.

$|\zeta| = R$, ma che gode di fronte a quest'ultima la proprietà di essere *uniforme*, verrà denominata la *Uniformizzante per parte reale* della funzione f . In modo analogo si definisce la uniformizzante per parte immaginaria della stessa funzione [n. 5].

Si comprende che, oltre il caso specifico che forma oggetto della presente Nota, si può, più in generale, parlare di uniformizzante di ogni funzione armonica non uniforme in un campo semplicemente connesso, sia piano che spaziale.

2. — LA UNIFORMIZZANTE PER PARTE REALE. — L'applicazione della formula di Schwarz⁽¹⁾ permette di definire nel modo seguente la funzione $\Phi(\zeta)$, a meno di una arbitraria costante additiva puramente immaginaria:

$$\Phi(\zeta) = \frac{R^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\sigma} + \zeta}{Re^{i\sigma} - \zeta} \cos m\sigma d\sigma.$$

Scrivendo

$$\cos m\sigma = \frac{1}{2} (e^{im\sigma} + e^{-im\sigma}),$$

e notando che per $|\zeta| < R$ si ha:

$$\frac{Re^{i\sigma} + \zeta}{Re^{i\sigma} - \zeta} = 1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\zeta^h}{R^h} e^{-ih\sigma},$$

sostituendo e applicando, com'è lecito, la integrazione termine a termine, si ottiene:

$$(3) \quad \Phi(\zeta) = \frac{R^m \sin 2\pi m}{2\pi m} + i \frac{R^m}{2\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\zeta^h}{R^h} \left\{ \frac{e^{2\pi im} - 1}{h - m} + \frac{e^{-2\pi im} - 1}{h + m} \right\}.$$

Le serie del secondo membro sono ipergeometriche, come constateremo ora.

3. — INTRODUZIONE DELLA SERIE IPERGEOMETRICA. — La serie ipergeometrica di Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

è assolutamente convergente per $0 < |x| < 1$.

(1) « Ges. Abh. », B. II, p. 152. Cfr. anche la mia *Idromeccanica piana*, parte prima [Milano, 1921, p. 14].

Poniamo:

$$\alpha = 1 - m, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2 - m, \quad x = \frac{\tilde{\lambda}}{R};$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} F\left(1 - m, 1, 2 - m, \frac{\tilde{\lambda}}{R}\right) &= 1 + \frac{1 - m}{2 - m} \cdot \frac{\tilde{\lambda}}{R} + \\ &+ \frac{1 - m}{3 - m} \cdot \frac{\tilde{\lambda}^2}{R^2} + \frac{1 - m}{4 - m} \cdot \frac{\tilde{\lambda}^3}{R^3} + \dots \end{aligned}$$

da cui, moltiplicando per $\frac{\tilde{\lambda}}{R(1 - m)}$, si ricava:

$$\frac{\tilde{\lambda}}{R(1 - m)} F\left(1 - m, 1, 2 - m, \frac{\tilde{\lambda}}{R}\right) = \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^b}{(b - m) R^b}.$$

Cambiando segno a m , come è lecito, si ottiene:

$$\frac{\tilde{\lambda}}{R(1 + m)} F\left(1 + m, 1, 2 + m, \frac{\tilde{\lambda}}{R}\right) = \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^b}{(b + m) R^b}.$$

Nei secondi membri di queste due relazioni si riconoscono le serie che compaiono nel secondo membro della (3), perciò questa si può scrivere:

$$\begin{aligned} (4) \quad \Phi(\tilde{\lambda}) &= \frac{R^m \sin 2\pi m}{2\pi m} + i \frac{R^{m-1} \tilde{\lambda}}{2\pi} \left\{ \frac{e^{2\pi i m} - 1}{1 - m} F\left(1 - m, 1, 2 - m, \frac{\tilde{\lambda}}{R}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-2\pi i m} - 1}{1 + m} F\left(1 + m, 1, 2 + m, \frac{\tilde{\lambda}}{R}\right) \right\}. \end{aligned}$$

4. - ESPRESSIONE DI Φ MEDIANTE INTEGRALI EULERIANI. — Si applichi alla serie ipergeometrica la espressione integrale definita dalla formula seguente⁽¹⁾:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx)^{-\beta} dt,$$

in cui Γ è la classica funzione « gamma »; essa è valida per

$$\Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\gamma - \alpha) > 0, \quad |x| < 1,$$

in cui \Re significa « parte reale ».

Si può esprimere la funzione Φ mediante integrali euleriani.

(1) Cfr. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion* [Leipzig, Teubner, 1906; p. 162, formula (4)].

Infatti, basta porre:

$$\alpha = 1 - m, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2 - m, \quad x = \frac{\tilde{\gamma}}{R},$$

con che le limitazioni precedenti sono verificate, e si ottiene:

$$F\left(1 - m, 1, 2 - m, \frac{\tilde{\gamma}}{R}\right) = \frac{\Gamma(2 - m)}{\Gamma(1 - m) \cdot \Gamma(1)} \int_0^1 \frac{t^{-m} dt}{1 - \frac{\tilde{\gamma}}{R} t} = (1 - m) \int_0^1 \frac{t^{-m} dt}{1 - \frac{\tilde{\gamma}}{R} t},$$

essendo, notoriamente,

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma(2 - m) = (1 - m) \cdot \Gamma(1 - m).$$

Cambiando segno a m si ottiene l'ulteriore relazione:

$$F\left(1 + m, 1, 2 + m, \frac{\tilde{\gamma}}{R}\right) = (1 + m) \int_0^1 \frac{t^m dt}{1 - \frac{\tilde{\gamma}}{R} t}.$$

Per queste relazioni la (4) può scriversi:

$$(5) \quad \Phi(\tilde{\gamma}) = \frac{R^m \sin 2\pi m}{2\pi m} + i \frac{R^{m-1} \tilde{\gamma}}{2\pi} \left\{ (e^{2\pi i m} - 1) \int_0^1 \frac{t^{-m} dt}{1 - \frac{\tilde{\gamma}}{R} t} + (e^{-2\pi i m} - 1) \int_0^1 \frac{t^m dt}{1 - \frac{\tilde{\gamma}}{R} t} \right\};$$

gli integrali del secondo membro sono appunto euleriani.

5. - LA UNIFORMIZZANTE PER PARTE IMMAGINARIA. — Il coefficiente dell'unità immaginaria della (1) assume sulla circonferenza $|\tilde{\gamma}| = R$ i valori

$$(6) \quad R^m \sin m\sigma \quad . \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi.$$

Diciamo $\Psi(\tilde{\gamma})$ la uniformizzante della (1) per parte immaginaria, cioè quella funzione analitica e *uniforme* per $|\tilde{\gamma}| < R$, il cui coefficiente di i assume su $|\tilde{\gamma}| = R$ la successione di valori (6).

Applicando la formula di Schwarz si ha:

$$\Psi(\tilde{\gamma}) = \frac{iR^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\sigma} + \tilde{\gamma}}{Re^{i\sigma} - \tilde{\gamma}} \sin m\sigma d\sigma.$$

Con piccole e manifeste varianti alla via seguita al n. 2 si trova, a meno di una arbitraria costante additiva reale, la seguente espressione:

$$\Psi(\tilde{\gamma}) = \frac{iR^m (1 - \cos 2\pi m)}{2\pi m} + \frac{iR^m}{2\pi} \sum_b \frac{\tilde{\gamma}^b}{R^b} \left\{ \frac{e^{2\pi i m} - 1}{b - m} - \frac{e^{-2\pi i m} - 1}{b + m} \right\},$$

che si può esprimere mediante la serie ipergeometrica nel modo seguente [n. 3]:

$$\Psi(\tilde{z}) = \frac{iR^m (1 - \cos 2\pi m)}{2\pi m} + i \frac{R^{m-1} \tilde{z}}{2\pi} \left\{ \frac{e^{2\pi i m} - 1}{1 - m} F\left(1 - m, 1, 2 - m, \frac{\tilde{z}}{R}\right) - \right. \\ \left. - \frac{e^{-2\pi i m} - 1}{1 + m} F\left(1 + m, 1, 2 + m, \frac{\tilde{z}}{R}\right) \right\};$$

oppure mediante gli integrali euleriani, ancora nel modo seguente [n. 4]:

$$\Psi(\tilde{z}) = \frac{iR^m (1 - \cos 2\pi m)}{2\pi m} + \\ + i \frac{R^{m-1} \tilde{z}}{2\pi} \left\{ (e^{2\pi i m} - 1) \int_0^1 \frac{t^{-m} dt}{1 - \frac{\tilde{z}}{R} t} - (e^{-2\pi i m} - 1) \int_0^1 \frac{t^m dt}{1 - \frac{\tilde{z}}{R} t} \right\}.$$

Matematica. — *Sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. SCORZA.

La struttura di un'algebra legata a un gruppo di ordine finito è pienamente conosciuta, quando il corpo, nel quale l'algebra è data, sia quello complesso. Nel qual caso, detto t il numero dei sistemi di elementi coniugati del gruppo, l'algebra è irriducibile e regolare, se $t = 1$, è riducibile e somma diretta di t algebre regolari, se $t > 1$.

Qui si vuol stabilire un teorema simile per il caso che il corpo nel quale l'algebra è definita sia quello reale.

Precisamente, si vuol dimostrare che:

Se fra i t sistemi di elementi coniugati del gruppo, l (> 0) è il numero di quelli che riescono bilateri e $2m$ il numero (necessariamente pari, ≥ 0) dei rimanenti, ogni algebra reale legata al gruppo è irriducibile e regolare, se $t = 1$ (indi $l = 1$ ed $m = 0$), è riducibile e somma diretta di $l + m$ algebre semplici dotate di modulo, se $t > 1$.

Questo teorema potrebbe esser dedotto per via indiretta ricorrendo a taluni risultati conseguiti dal Frobenius e dallo Schur in una loro bella Memoria sulle rappresentazioni reali dei gruppi finiti (« Berliner Sitzungsab. », 1906); ma, giacchè può essere anche dimostrato utilizzando direttamente la teoria delle algebre, preferisco dedurlo per questa via. Il che faccio tanto

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1926.

più volentieri, in quanto che procedendo a questo modo si vengono implicitamente ad indicare nuove dimostrazioni dei risultati cui or ora è stato alluso.

Chiudo queste poche righe introduttive avvertendo che in quanto segue il mio trattato *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921) e la Memoria del Fichera: *I caratteri di un gruppo*, ecc. («Atti dell'Accademia Gioenia», serie 5^a, vol. XIII), saranno richiamati brevemente con le sigle rispettive *C. N.* ed *F.*

2. Ciò posto, sia G un gruppo d'ordine finito n , con gli elementi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, e sia A un'algebra reale legata a G (*C. N.*, p. 437), di guisa che sarà possibile determinare in essa un aggregato di unità u_1, u_2, \dots, u_n , per le quali riesca $u_i u_j = u_k$, ogni qual volta sia $\gamma_i \gamma_j = \gamma_k$.

Se \bar{A} è un'algebra complessa legata a G ed $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ è un aggregato di unità di \bar{A} tale che da $\gamma_i \gamma_j = \gamma_k$ segua $\bar{u}_i \bar{u}_j = \bar{u}_k$, gli elementi di \bar{A} aventi, rispetto ad $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$, coordinate reali costituiscono un'algebra reale equivalente ad A , di cui \bar{A} è il prolungamento nel corpo complesso; quindi, salvo a sostituire ad A , ove occorra, un'algebra equivalente ad essa, possiamo supporre che $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ coincidano rispettivamente con u_1, u_2, \dots, u_n e che \bar{A} sia il prolungamento di A nel corpo complesso.

3. Giacchè \bar{A} è il prolungamento di A nel corpo complesso, e giacchè \bar{A} è semi-semplce, con modulo (*C. N.*, p. 444), tale è pure A (*ibid.*, p. 397, n. 287); quindi A o è semplice (con modulo), o è somma diretta di algebre semplici (ciascuna dotata di modulo).

In ogni caso, poniamo

$$(1) \quad A = B_1 \dot{+} B_2 \dot{+} \dots \dot{+} B_s,$$

con $s \geq 1$ e con le B_1, B_2, \dots, B_s algebre semplici, intendendo che se $s = 1$, se cioè non vi sia luogo a parlar di somma diretta, la (1) stia per $A = B_1$.

Giacchè ciascuna delle algebre B_1, \dots, B_s è semplice e, al pari di A , dotata di modulo e reale, per un bel teorema del Cartan (*C. N.*, p. 400), si potrà porre

$$(2) \quad B_j = P_j \times R_j \quad (j = 1, \dots, s),$$

con P_j algebra primitiva di ordine 1, 2 o 4 ed R_j algebra regolare; e i moduli di P_j ed R_j si potranno supporre coincidenti con quello di B_j .

Se i prolungamenti di B_j, P_j ed R_j nel corpo complesso si indicano rispettivamente con \bar{B}_j, \bar{P}_j ed \bar{R}_j , in virtù delle (1) e (2) sarà

$$(3) \quad \bar{A} = \bar{B}_1 \dot{+} \bar{B}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \bar{B}_s$$

e

$$(4) \quad \bar{B}_j = \bar{P}_j \times \bar{R}_j.$$

Quando l'ordine di P_j (e \bar{P}_j) è 1, le (2) e (4) mostrano che B_j e \bar{B}_j sono regolari; quando quell'ordine è 4, ossia P_j è equivalente all'algebra dei quaternioni reali, \bar{P}_j è un'algebra regolare (C. N., p. 397, n. 288), e quindi, per la (4), anche \bar{B}_j è un'algebra regolare (*ibid.*, p. 363, n. 256); quando invece il detto ordine è 2, \bar{B}_j risulta la somma di due algebre regolari del medesimo ordine.

Ebbene si supponga, come è lecito, che fra le algebre P_1, \dots, P_s quelle di ordine 1 o 4 siano P_1, \dots, P_λ .

Allora $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_\lambda$ saranno algebre regolari, e ciascuna delle algebre $\bar{B}_{\lambda+1}, \bar{B}_{\lambda+2}, \dots, \bar{B}_s$ sarà la somma diretta di due algebre regolari del medesimo ordine; quindi A sarà la somma diretta di

$$\lambda + 2(s - \lambda) = 2s - \lambda$$

algebre regolari.

Ma, se t è il numero dei sistemi di elementi coniugati di G, è

$$(5) \quad \bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_t,$$

con le $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_t$ algebre regolari e con l'intesa che, se $t = 1$, la (5) stia per $\bar{A} = \bar{A}_1$; dunque, per un teorema dello Scheffers (C. N., p. 320), è

$$2s - \lambda = t$$

ed è possibile disporre delle denominazioni delle \bar{A}_i , sì che riesca

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{B}_1 = \bar{A}_1, \bar{B}_2 = \bar{A}_2, \dots, \bar{B}_\lambda = \bar{A}_\lambda, \\ \bar{B}_{\lambda+1} = \bar{A}_{\lambda+1} + \bar{A}_{\lambda+2}, \bar{B}_{\lambda+2} = \bar{A}_{\lambda+3} + \bar{A}_{\lambda+4}, \dots, \bar{B}_s = \bar{A}_{t-1} + \bar{A}_t. \end{cases}$$

4. Indichiamo ora con $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_t$ i moduli di $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_t$, di guisa che quelli di $B_1, B_2, \dots, B_\lambda, B_{\lambda+1}, B_{\lambda+2}, \dots, B_s$ saranno

$$(7) \quad \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_\lambda, \bar{v}_{\lambda+1} + \bar{v}_{\lambda+2}, \bar{v}_{\lambda+3} + \bar{v}_{\lambda+4}, \dots, \bar{v}_{t-1} + \bar{v}_t;$$

e, detti S_1, S_2, \dots, S_t i sistemi di elementi coniugati di G, indichiamo con r_j l'ordine di S_j e con w_j la somma delle r_j unità u i cui indici sono quelli degli elementi γ , che costituiscono il sistema S_j .

Giacchè $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_t$ e $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_t$ sono due aggregati di unità della sotto-algebra centrale di \bar{A} (C. N., pp. 395 e 440), sarà

$$(8) \quad w_j = \tau_{1,j} \bar{v}_1 + \tau_{2,j} \bar{v}_2 + \dots + \tau_{t,j} \bar{v}_t \quad (j = 1, \dots, t),$$

e

$$(9) \quad \bar{v}_i = \tau'_{i,1} w_1 + \tau'_{i,2} w_2 + \dots + \tau'_{i,t} w_t \quad (i = 1, \dots, t),$$

dove le $\tau_{i,j}$ sono numeri complessi, il determinante $|\tau_{i,j}|$ è diverso da zero, e $\tau'_{i,j}$ è il reciproco di $\tau_{i,j}$ nella matrice $\|\tau_{i,j}\|$.

Se, in conformità della (5), si pone

$$u_k = \bar{x}_{k,1} + \bar{x}_{k,2} + \dots + \bar{x}_{k,t} \quad (k = 1, \dots, n),$$

con $\bar{x}_{k,i}$ elemento di A_i , e, detto p_i^2 l'ordine di \bar{A}_i , il quoziente della traccia di $\bar{x}_{k,i}$ in \bar{A}_i per p_i si indica con $\chi^{(i)}(\gamma_k)$, la funzione $\chi^{(i)}$ dell'elemento corrente γ_k di G , che così resta definita, è uno dei t caratteri di G (C. N., p. 450).

I valori di $\chi^{(i)}$ per elementi coniugati di G sono, notoriamente, eguali. Ebbene, se il valore di $\chi^{(i)}$ per uno qualsiasi degli r_j elementi di G contenuti in S_j si denota con $\psi_j^{(i)}$, si ha (F., n. 25)

$$(10) \quad \tau_{i,j} = \frac{r_j}{p_i} \psi_j^{(i)}.$$

Da questa eguaglianza discende che, se $\varphi_j^{(i)}$ è il reciproco di $\psi_j^{(i)}$ nella matrice $\|\psi_j^{(i)}\|$ (dove si suppone che i sia costante lungo una riga e j lungo una colonna), si ha

$$\tau'_{i,j} = \frac{p_i}{r_j} \varphi_j^{(i)}.$$

D'altronde, se il sistema di elementi coniugati costituiti dagli inversi degli elementi di S_j ($j = 1, \dots, t$) si indica con $S_{j'}$ - di guisa che sarà $r_{j'} = r_j$ - si ha pure (F., n. 31)

$$\varphi_j^{(i)} = \frac{r_j}{n} \psi_{j'}^{(i)},$$

quindi è

$$(11) \quad \tau'_{i,j} = \frac{p_i}{n} \psi_{j'}^{(i)},$$

e, per le (10) e (11), le (8) e (9) divengono

$$(12) \quad w_j = r_j \sum_i \frac{1}{p_i} \psi_j^{(i)} \bar{v}_i$$

e

$$(13) \quad \bar{v}_i = \frac{p_i}{n} \sum_j \psi_{j'}^{(i)} w_j.$$

5. A proposito delle $\psi_j^{(i)}$ giova osservare quanto segue.

Essendo u_k un elemento di A , per $i = 1, \dots, \lambda$, $\bar{x}_{k,i}$ riesce un elemento di B_i , quindi la sua traccia in $\bar{A}_i = \bar{B}_i$ è un numero reale; ossia

$\alpha)$ I valori di $\psi_j^{(i)}$, per $i = 1, \dots, \lambda$ e $j = 1, \dots, t$, sono tutti reali.
Per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$, è

$$\bar{A}_i + A_{i+1} = B_{\frac{1}{2}(\lambda+i+1)},$$

ed, essendo u_k un elemento di A , $\bar{x}_{k,i}$ ed $\bar{x}_{k,i+1}$ hanno per somma un elemento di $B_{\frac{1}{2}(\lambda+i+1)}$; dunque, per il lemma del n. 1, la traccia di $\bar{x}_{k,i}$

in \bar{A}_i e quella di $\bar{x}_{k,i+1}$ in \bar{A}_{i+1} sono numeri complessi coniugati. D'altronde, essendo eguali gli ordini di \bar{A}_i e \bar{A}_{i+1} , è pure $p_i = p_{i+1}$, dunque:

$\beta)$ Per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$ e $j = 1, \dots, t$, $\psi_j^{(i)}$ e $\psi_j^{(i+1)}$ sono numeri complessi coniugati.

I valori di un carattere di G per elementi inversi sono numeri complessi coniugati, quindi:

$\gamma)$ Per $i, j = 1, \dots, t$, $\psi_j^{(i)}$ e $\psi_{j'}^{(i)}$ sono numeri complessi coniugati.

Adesso si supponga, come è lecito, che tra i sistemi di elementi coniugati di G quelli bilateri siano S_1, S_2, \dots, S_l e che i rimanenti si distribuiscano in m coppie di sistemi inversi date da

$$S_{l+1} \text{ ed } S_{l+2}, S_{l+3} \text{ ed } S_{l+4}, \dots, S_{t-1} \text{ ed } S_t.$$

Ciò significa che, per $j = 1, \dots, l$, è $j' = j$, e, per $j = l + 1, l + 3, \dots, t - 1$ è $j' = j + 1$.

Allora da $\gamma)$ segue che:

$\delta)$ Per $i = 1, \dots, t$ e $j = 1, \dots, l$, $\psi_j^{(i)}$ è un numero reale;
da $\alpha)$ e $\gamma)$, che:

$\epsilon)$ Per $i = 1, \dots, \lambda$ è

$$\psi_{l+1}^{(i)} = \psi_{l+2}^{(i)}, \psi_{l+3}^{(i)} = \psi_{l+4}^{(i)}, \dots, \psi_{t-1}^{(i)} = \psi_t^{(i)};$$

da $\beta)$ e $\delta)$, che:

$\zeta)$ Per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$ e $j = 1, \dots, l$, è

$$\psi_j^{(i)} = \psi_j^{(i+1)},$$

e infine da $\beta)$ e $\gamma)$ che:

$\eta)$ Per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$ e $j = l + 1, l + 3, \dots, t - 1$, è

$$\psi_j^{(i)} = \psi_{j+1}^{(i+1)} \quad \text{e} \quad \psi_j^{(i+1)} = \psi_{j+1}^{(i)}.$$

6. Dico ora che ciascuno degli elementi (7) è una combinazione lineare degli elementi

$$(14) \quad w_1, w_2, \dots, w_l, w_{l+1} + w_{l+2}, w_{l+3} + w_{l+4}, \dots, w_{t-1} + w_t,$$

e che, inversamente, ciascuno di questi è una combinazione lineare di quelli.

Nel sommatorio che trovasi al secondo membro della (13), per $j = l + 1, l + 3, \dots, o \ t - 1$, il coefficiente di w_j è $\psi_{j+1}^{(i)}$, e quello di w_{j+1} è $\psi_j^{(i)}$; ma per un tal valore di j e per $i = 1, \dots, \lambda$ è, grazie alla ϵ), $\psi_{j+1}^{(i)} = \psi_j^{(i)}$, dunque è chiaro intanto che ciascuno dei primi λ elementi (7) è una combinazione lineare degli elementi (14).

Si supponga adesso che i sia uno degli interi della serie

$$\lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1.$$

Allora per la (13) e per il fatto che p_{i+1} riesce eguale a p_i , si ha

$$\bar{v}_i + \bar{v}_{i+1} = \frac{p_i}{n} \sum_j^{1 \dots t} (\psi_j^{(i)} + \psi_j^{(i+1)}) w_j.$$

Nel sommatorio che quivi comparisce i coefficienti di w_j e w_{j+1} , per $j = l + 1, l + 3, \dots, o \ t - 1$, sono rispettivamente

$$\psi_{j+1}^{(i)} + \psi_{j+1}^{(i+1)} \quad \text{e} \quad \psi_j^{(i)} + \psi_j^{(i+1)};$$

ma questi per η) sono eguali, dunque anche i rimanenti elementi (7) sono combinazioni lineari degli elementi (14).

Nel sommatorio che sta a secondo membro della (12) i coefficienti di \bar{v}_i e \bar{v}_{i+1} sono $\frac{1}{p_i} \psi_j^{(i)}$ e $\frac{1}{p_{i+1}} \psi_j^{(i+1)}$. Ma, per $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, t - 1$ e $j = 1, \dots, l$, è $p_i = p_{i+1}$ e inoltre, grazie alla ζ), $\psi_j^{(i)} = \psi_j^{(i+1)}$, dunque è dimostrato intanto che ciascuno dei primi l elementi (14) è una combinazione lineare degli elementi (7).

Adesso si supponga che j sia uno degli interi della serie $l + 1, l + 3, \dots, t - 1$.

Allora per la (12) e badando che $r_{j+1} = r_j = r_j$, si ha

$$w_j + w_{j+1} = r_j \sum_i^{1 \dots t} \frac{1}{p_i} (\psi_j^{(i)} + \psi_{j+1}^{(i)}) \bar{v}_i.$$

In quest'ultimo sommatorio i coefficienti di \bar{v}_i e \bar{v}_{i+1} , sono

$$\frac{1}{p_i} (\psi_j^{(i)} + \psi_{j+1}^{(i)}) \quad \text{e} \quad \frac{1}{p_{i+1}} (\psi_j^{(i+1)} + \psi_{j+1}^{(i+1)}).$$

Ma questi, ove sia $i = \lambda + 1, \lambda + 3, \dots, o \ t - 1$, sono eguali, perchè allora è $p_i = p_{i+1}$, e inoltre vale la η), dunque anche i rimanenti elementi (14) sono combinazioni lineari degli elementi (7).

7. Da quanto or ora è stato dimostrato, giacchè gli elementi (7), al pari degli elementi (14), sono, come è chiaro, indipendenti, si deduce

$$\lambda + \frac{l - \lambda}{2} = l + \frac{t - l}{2},$$

quindi è $\lambda = l$.

Dopo di che, essendo $t = l + 2m$, si ha, come volevasi,

$$s = \frac{t + \lambda}{2} = \frac{l + 2m + l}{2} = l + m.$$

Chimica. — *La trasmutazione degli elementi.* Nota del Socio E. PATERNÒ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Costituzione e spettri d'assorbimento dei nitrososolfuri del ferro.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. CAMBI e di L. SZEGÖ ⁽²⁾.

W. Manchot e Linckh ⁽³⁾, a proposito degli spettri d'assorbimento delle soluzioni dei cosiddetti sali di Roussin, o nitrososolfuri, hanno considerata la costituzione di questi corpi, ammettendo che in essi il ferro sia monovalente. Tale valenza è intesa come grado d'ossidazione, o meglio « elettrovalenza », stando alle più recenti indicazioni di W. Manchot e H. Gall ⁽⁴⁾.

I predetti AA. entrando in un argomento da me trattato molti anni or sono ⁽⁵⁾, ripetono, come avvertono, le idee di I. Bellucci e P. De Cesaris ⁽⁶⁾ sulla valenza del ferro dei nitrososolfuri, nettamente opposte alle deduzioni basate sulle mie esperienze, che cioè detti composti siano ferrici.

W. Manchot ed i suoi collaboratori si limitano a considerare dal puro lato formale le formule di struttura dei sali di Roussin, ignorano il comportamento chimico di essi, non tengono conto delle reazioni di sintesi, fatti tutti che contraddicono l'ipotesi del ferro monovalente, come a suo tempo ho dimostrato ⁽⁷⁾; forse perciò non hanno citato i miei lavori.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 7 novembre 1926.

(3) « Ber. », 59 (1926), 412.

(4) « Ber. », 59 (1926), 1058-59.

(5) Questi « Rendiconti », XVI, 2° (1907), 542; 658; Questi « Rendiconti », XVII, 1° (1908), 202; 720. « Gazz. Chim. Ital. », XXXIX, (1909), 1°, 370.

(6) Questi « Rendiconti », XVII, 1° (1918), 529.

(7) « Rend. Soc. Chim. Ital. », (1914), III.

Per le deduzioni stesse che i predetti AA. hanno creduto di poter trarre dalle loro curve d'assorbimento, ho ripetuto ed esteso con L. Szegeő lo studio spettrofotometrico delle soluzioni dei composti su citati. I risultati, che verranno più oltre riportati, non sono affatto in contraddizione con le mie deduzioni e possono costituire anzi una conferma dell'intima struttura da me stabilita dei sali di Roussin.

L. CAMBI.

I nitrososolfuri del ferro. — Riassumiamo brevemente i fatti principali riguardanti i nitrososolfuri. Di essi sono note tre serie:

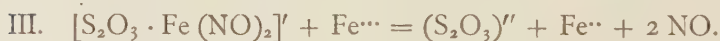
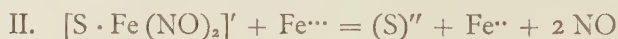
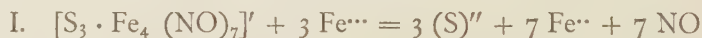
$R \cdot Fe_4S_3(NO)_7$ $R \cdot FeS(NO)_2$ $R \cdot Fe(S_2O_3)(NO)_2$
Sali epta (Roussin); Sali tetra (Roussin); Nitrosotiosolfati (Hofmann).

W. Manchot e collaboratori ammettono che il gruppo NO abbia la semplice funzione di molecola neutra d'addizione, come ossido d'azoto associato al ferro, e quindi che per la somma delle valenze positive e negative il ferro risulti monovalente, corrisponda cioè ad un solfuro ipotetico Fe_2S .

L. Cambi ha dedotto che il gruppo NO deve avere funzione alogenica, come residuo di un acido HNO, e l'aggruppamento $S \cdot FeN_2O_2$ contenere ferro trivalente. I fatti su cui è basata questa deduzione sono:

a) La scissione dei nitrososolfuri con i sali d'argento, a freddo, che conduce ad iponitrito d'argento $Ag_2N_2O_2$.

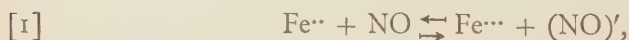
b) Le reazioni che si compiono quantitativamente in soluzione in presenza di sali ferrici e di sali di metalli pesanti atti a fissare il solfo come solfuro, rappresentate dagli schemi:



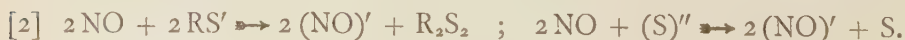
c) Le scissioni con i cianuri che conducono a nitroprussiato, oppure a ferrocianuro e nitrito alcalino.

d) Le reazioni di sintesi che si compiono tutte in condizioni in cui il ferro tende ad ossidarsi a ferrico e l'ossido d'azoto a ridursi a composti ossigenati inferiori.

Le reazioni di decomposizione con formazione di NO sono state cioè ricondotte, da L. Cambi, ad un processo invertibile nelle sintesi rappresentato schematicamente da



con l'intervento in alcune sintesi di riduzioni del tipo



Nell'ipotesi adottata da W. Manchot, il processo di sintesi dovrebbe ricondursi agli schemi



oppure



Nella scissione con i sali ferrici si avrebbe l'inversione del processo indicato in [3].

Con queste ultime ipotesi cioè, l'ossido d'azoto assisterebbe indifferente, come *molecola neutra*, alla formazione del ferro ipoferroso, oppure l'NO agirebbe concomitantemente da riducente del ferro bivalente.

La valutazione dei primi schemi, rispetto ai susseguenti [3], [4] e [5], risulta dalle considerazioni che seguono.

È palese l'assurdità del processo [5] che dovrebbe compiersi anche in mezzo non alcalino.

Non è noto alcun composto del ferro monovalente che dovrebbe essere dotato comunque di un elevato potere riducente.

Non esiste alcuna reazione del solfuro ferroso che possa giustificare l'ipotesi espressa in [3] e in [4]. Il processo di riduzione del ferro dovrebbe avverarsi in presenza di un attivo ossidante dell'idrato ferroso e del solfuro ferroso, quale l'ossido d'azoto.

Il potere riducente dei sali di Roussin, che si manifesta anche sui sali ferrici, rimarrebbe latente, fra atomo ipoferroso ed NO, in sali complessi stabili in soluzione alcalina a caldo, come i nitroso-solfuri rossi o tetrasali.

Il potere riducente del ferro sull'ossido d'azoto si eserciterebbe soltanto nelle scissioni dei sali di Roussin, che conducono ad acido iponitroso (HNO_2) o ad N_2O , ma verrebbe escluso nel processo di sintesi.

Evidentemente nessun fatto chimico conforta l'ipotesi del ferro monovalente. Per contro la riduzione dell'NO ammessa nel processo [1] si verifica con l'idrato ferroso:



Lo stesso potere riduttore del gruppo (NO) dei nitrosolfuri è analogo a quello di numerosi composti ossigenati inferiori dell'azoto.

Il processo e l'interpretazione data da L. Cambi della sintesi di Pavel⁽¹⁾ trovano una saliente analogia con i fatti osservati da O. Baudisch⁽²⁾. Questo A. ha notato la riduzione dei nitriti ad un aggruppamento HNO , operata dall'idrato ferroso in presenza di zuccheri, ed ha riconosciuto il potere ridu-

(1) L. CAMBI, questi « Rendiconti », XVI, 2° (1907), 542.

(2) O. BAUDISCH, « Ber », 50 (1917), 653.

cente di questo gruppo manifestato dalla scissione $\text{HNO} = \text{H} + \text{NO}$. Infine nelle sintesi dei nitrososolfuri, operate direttamente dall'ossido d'azoto, troviamo una manifestazione analoga a diverse altre associazioni di quest'ossido, ad es. nella formazione dei sali dell'acido nitrosoidrossilaminsolfonico dai solfiti; delle nitrosocobaltiamine dalle cobaltoamine.

I dati che finora possediamo non ci permettono di decidere se l'aggruppamento $(\text{N}_2\text{O}_2)''$ dei nitrososolfuri sia analogo a quello delle nitrosoidrossilamine, oppure a quello dei dimeri labili dei veri nitroso derivati organici, od anche abbia una struttura diversa ⁽¹⁾: certo possiede un alto grado di reattività che lo distingue da quello dell'acido iponitroso propriamente detto, in cui si isomerizza nelle scissioni. Rimane però comunque stabilito che tutti i fatti chimici noti confermano la presenza nei sali di Roussin di aggruppamenti — NO in stato di riduzione rispetto all'ossido d'azoto, in forma corrispondente ad HNO .

Un'ultima osservazione dobbiamo fare sui rapporti di struttura fra epta-sali e tetra-sali. Diversi autori ⁽²⁾ hanno ammesso che gli epta-sali contengano lo stesso aggruppamento $(\text{SFeN}_2\text{O}_2)'$ dei tetra-sali, che cioè i primi abbiano il complesso $[\text{Fe}(\text{SFeN}_2\text{O}_2)_3, \text{NO}]'$.

Evidentemente questa struttura si potrebbe applicare perfettamente anche ad aggruppamenti $(\text{SFeN}_2\text{O}_2)'$ ferrici, pur potendosi ammettere che l'atomo di ferro centrale degli epta-sali sia bivalente.

Gli spettri d'assorbimento delle soluzioni dei nitrososolfuri. — Manchot e Linckh hanno dapprima indagato lo spettro d'assorbimento dei sali ferrosi contenenti NO e fra questi quelli che più interessano per i confronti con i nitrososolfuri, cioè i sali labili della cosiddetta serie bruna del tipo $\text{FeSO}_4 \cdot \text{NO}$ in soluzione acquosa ⁽³⁾. Hanno poi esaminato gli epta ed i tetrasali ⁽⁴⁾.

Dalle curve riportate si deduce che i tetrasali hanno un minimo d'assorbimento a $650/625\mu\mu$, che gli epta sali presentano un minimo, considerato analogo al precedente, a circa $670\mu\mu$, ma presentano anche un massimo d'assorbimento a $575\mu\mu$. Questo massimo si nota anche nei sali ferrosi bruni su ricordati. Il presunto minimo predetto, da 625 a $670\mu\mu$, con-

(1) A proposito dell'acido nitrosoidrossilaminsolfonico vedi RASCHIG, *Schwefel-Stickstoffstudien*, 108 (1924).

(2) PAVEL, «Ber.», 15 (1882), 2602 ha riconosciuto l'aggruppamento $[\text{SFe}(\text{NO})_2]'$ come costituente dei nitrososolfuri delle due serie; analoga ammissione fecero MARIE e MARQUIS, «C. R.» 122 (1896), 1896, ed in fine L. BELLUCCI e DE CESARIS. La deduzione poggia sui rapporti genetici reciproci delle due serie di sali scoperti dallo stesso Roussin, e sulla scissione operata con i sali di diazonio osservata da K. A. HOFMANN e WIEDE, «Z. Anorg. Ch.», 11 (1896), 290.

(3) Loc. cit., p. 407.

(4) Gli AA. hanno eseguito le determinazioni usando uno spessore costante di 7 mm., delle soluzioni di cui facevano variare la concentrazione; essi notavano per visione diretta i limiti della luminosità tracciando le curve $\log cd + 10 : \mu\mu$.

siderato comune alle due serie di nitrososolfuri, è attribuito all'aggruppamento — SFeN_2O_2 ; il massimo d'assorbimento degli epta-sali a 580μ , analogo a quello a 575μ del sale $\text{FeSO}_4 \cdot \text{NO}$, viene attribuito all'atomo di ferro centrale del complesso $[\text{Fe}(\text{SFeN}_2\text{O}_2)_3\text{NO}]'$ ritenuto ferroso.

Questi confronti potrebbero confermare tutt'al più i rapporti costitutivi fra le due serie di sali, rapporti già ben precisati per via chimica. Ma non forniscono, come è ovvio, alcun dato sulla presenza del ferro monovalente e tanto meno dimostrano la necessità di una tale ipotesi.

Dobbiamo osservare inoltre che il metodo usato dai predetti autori non è razionale: non ha alcun significato il confronto di zone di trasparenza, inoltre lo stesso presunto minimo d'assorbimento è dato da una curva che, corrispondendo al limite di visibilità nell'estremo rosso, è affatto illusoria, come noi stessi abbiamo verificato, con le determinazioni più esatte del coefficiente di estinzione che più oltre esporremo.

Manchot e Linckh non tracciano però questa curva verso l'estremo rosso per i sali tipo $\text{FeSO}_4 \cdot \text{NO}$ in soluzione acquosa. Noi, ripetendo le stesse osservazioni, con metodo analogo, verificammo che la curva poteva tracciarsi in modo affatto simile a quelle dei nitrososolfuri e ne risultava un presunto massimo di trasparenza a circa 660μ , *corrispondente a quello degli epta e dei tetrasali*. Cioè, quel minimo d'assorbimento che sarebbe caratteristico dei sali di Roussin, e del gruppo — SFeN_2O_2 , si ritroverebbe nel sale $\text{FeSO}_4 \cdot \text{NO}$, la cui curva non è stata tracciata in modo completo dai precedenti AA.

Si deve concludere che le curve ed i confronti di Manchot e Linckh non hanno alcun significato per quanto riguarda il comportamento cromatico del gruppo — SFeN_2O_2 e la costituzione di questo.

Mancava però un'indagine esatta degli spettri d'assorbimento dei nitrososolfuri e noi, dopo una prima revisione dei dati su riferiti, passammo alle determinazioni degli indici d'assorbimento dei composti

$\text{K} \cdot \text{Fe}_4\text{S}_3(\text{NO})_7$; $\text{K} \cdot \text{FeS}(\text{NO})_2$; $\text{C}_6\text{H}_5\text{S} \cdot \text{Fe}(\text{NO})_2$; $\text{K} \cdot \text{Fe}(\text{S}_2\text{O}_3)(\text{NO})_2$;

e, per eventuali analogie, dei sali ferrici $\text{Fe}(\text{N}_2\text{O}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_5)_3$; $\text{Fe}(\text{CNS})_3$.

Parte sperimentale. — 1. Dapprima abbiamo voluto controllare le curve di Manchot e Linckh il significato delle quali abbiamo già illustrato. Usammo uno spettroscopio Hilger D. 2 a deviazione costante. Osservammo che per alcuni sali l'andamento dell'assorbimento era influenzato sensibilmente dalla diluizione e perciò, a differenza dei predetti AA., usammo soluzioni a concentrazione costante per ciascun sale impiegando il tubo di Baly. Tracciammo così le curve riportate nella fig. 1, in cui analogamente a Manchot riportiamo sulle ascisse i valori $\log(c \times d) + 10$.

Le osservazioni vennero compiute a temperature ambiente.

Le curve tracciate concordano con quelle dei precipitati AA. La curva del sale $\text{FeSO}_4 \cdot \text{NO}$ a noi è risultata completa, analoga a quella del sale $\text{K} \cdot \text{Fe}_4\text{S}_3(\text{NO})_7$, come abbiamo già detto. Questi due sali hanno in comune il massimo d'assorbimento a circa $580 \mu\mu$, ma il presunto minimo d'assorbimento si ritrova egualmente in essi e corrisponde anche alla zona di massima trasparenza dei tetrasali e di alcuni sali ferrici, quali $\text{Fe}(\text{N}_2\text{O}_2\text{C}_6\text{H}_5)_3$ (sale ferrico del cupferron) e $\text{Fe}(\text{CNS})_3$.

Cioè contrariamente a quanto hanno creduto di vedere Manchot e Linckh, da queste curve non è possibile trarre alcun indizio sulla presenza del raggruppamento — $\text{S} \cdot \text{FeN}_2\text{O}_2$ nei sali epta, presenza che per altro risulta dimostrata per via chimica.

2. Per la misura razionale dell'assorbimento delle soluzioni predette usammo uno dei metodi generalmente impiegati per la determinazione del coefficiente d'estinzione ϵ . Impiegammo cioè lo stesso spettroscopio ed un spettrofotometro Hilger ⁽¹⁾ a settori rotanti; opportunamente elevando la velocità del settore, in confronto a quanto si usa con la camera fotografica, per potere eseguire le misure a visione diretta. I risultati sono riportati nella fig. 2.

Dal confronto delle curve risulta una notevole vicinanza dei limiti di assorbimento dei composti ⁽²⁾

$\text{K} \cdot \text{S} \cdot \text{FeN}_2\text{O}_2$; $\text{C}_6\text{H}_5\text{SFeN}_2\text{O}_2$; $\text{K} \cdot \text{S}_2\text{O}_3 \cdot \text{FeN}_2\text{O}_2$; $\text{Fe}(\text{N}_2\text{O}_2\text{C}_6\text{H}_5)_3$; $\text{Fe}(\text{CNS})_3$.

Volendo trarre una conclusione chimica dall'andamento degli indici di assorbimento, si dovrebbe concludere che questi corpi sono tutti analoghi e cioè ferrici.

Gli eptanitrososolfuri ripetono l'analogia con $\text{FeSO}_4 \cdot \text{NO}$, presentano un massimo d'assorbimento a circa $575 \mu\mu$. Ma questo massimo è notevolmente influenzato dalla concentrazione. Risulta meno accentuato nelle soluzioni più concentrate, con cui abbiamo potuto operare ($\text{KS}_3\text{Fe}_4(\text{NO})_7 = \text{M}/_{250}$), dato l'intenso colore del sale. Questo fatto fa pensare alla facile decomponibilità dei sali epta. La diluizione sembra agire generando ferro ferroso ed NO, che pure risultano per azione degli acidi sui sali stessi. Probabilmente tale andamento degli spettri è dato dall'atomo di ferro centrale dell'aggruppamento $[\text{Fe}(\text{SFeN}_2\text{O}_2)_3\text{NO}]$. D'altra parte notiamo che un accenno ad una analoga deformazione della curva d'assorbimento esiste nel sale $\text{K} \cdot \text{S}_2\text{O}_3 \cdot \text{FeN}_2\text{O}_2$, pure facilmente decomponibile.

CONCLUSIONE. — Viene stabilito che gli spettri di assorbimento dei composti contenenti gli aggruppamenti — $\text{S} \cdot \text{Fe} \cdot \text{N}_2\text{O}_2$ e — $\text{S}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe} \cdot \text{N}_2\text{O}_2$ si presentano analoghi a quelli dei composti ferrici $\text{Fe}(\text{N}_2\text{O}_2\text{C}_6\text{H}_5)_3$ e $\text{Fe}(\text{CNS})_3$; che lo spettro di assorbimento del sale $\text{KS}_3\text{Fe}_4(\text{NO})_7$ indica

(1) Per l'uso dello spettrofotometro a settori rotanti rimandiamo alla recente pubblicazione di E. B. R. PRIDEAUX, «Chemistry and Industry», 45 (1926), 664.

(2) I dati numerici riferentisi ai diagrammi verranno pubblicati altrove.

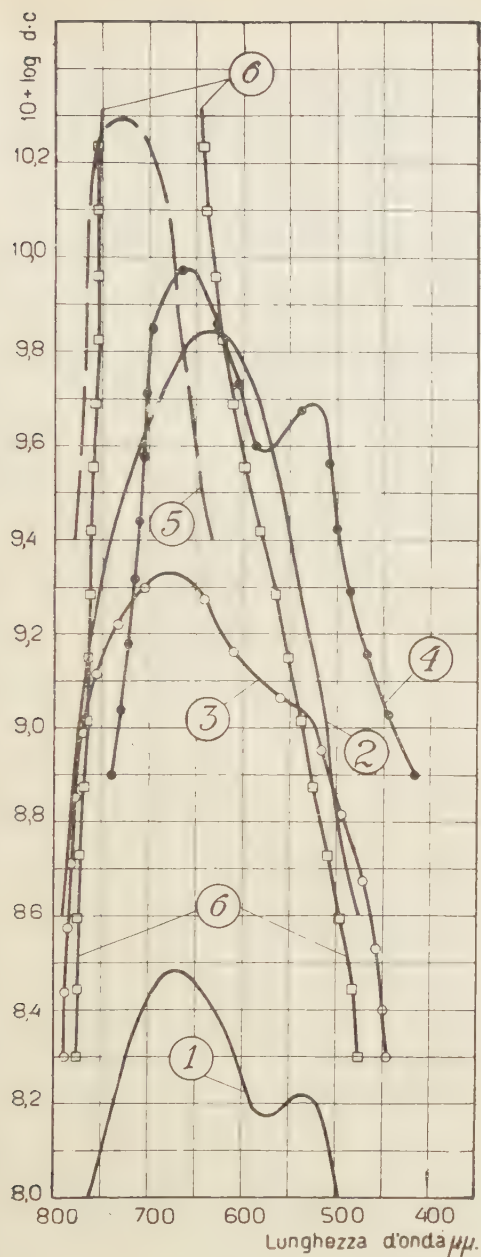


Fig. 1.

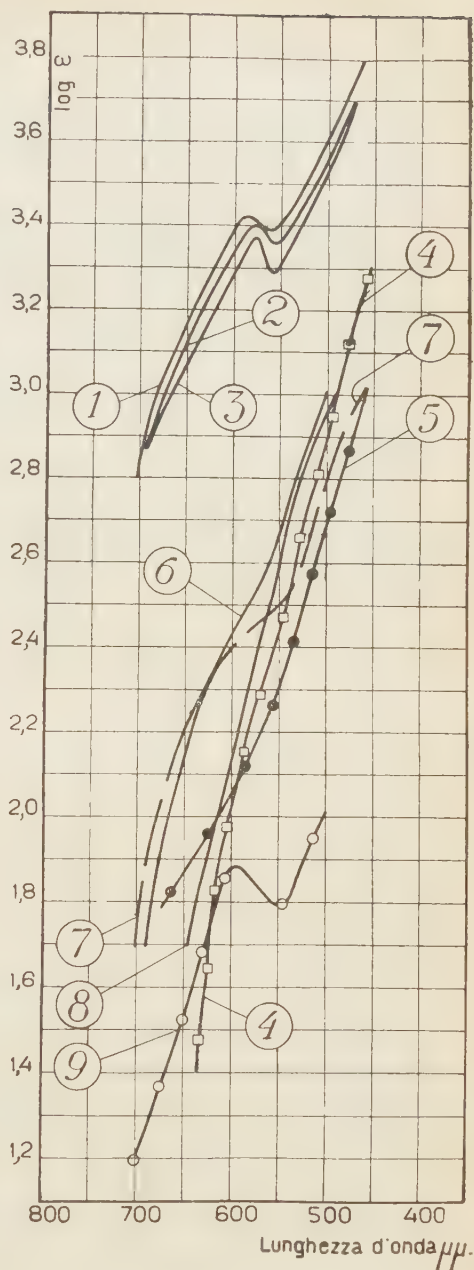


Fig. 2.

la presenza di ferro ferroso come in $\text{FeSO}_4 \cdot \text{NO}$, nelle soluzioni a grande diluizione; che l'assorbimento della luce da parte delle soluzioni dei nitrososolfuri predetti non presenta alcuna caratteristica che giustifichi l'ipotesi della presenza in essi del ferro monovalente.

Chimica. — *Sopra un nuovo elemento: il Florenzio (numero atomico "61")*. Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. ROLLA e L. FERNANDES ⁽²⁾.

Il metodo di frazionamento, fondato sulla formazione e cristallizzazione dei solfati doppi col tallio, che aveva fornito ottimi risultati nel frazionamento delle terre dell'ittrio ⁽³⁾ e delle terre del cerio ⁽⁴⁾, fu esteso alla separazione degli elementi didimici.

Siamo partiti da 400 gr. di didimio commerciale proveniente da monazite brasiliana ⁽⁵⁾ e contenente tutte le terre ceriche e piccole quantità di gadolinio e terre terbiche.

Gli ossidi trasformati in solfati furono addizionati con solfato di tallio: si ottenne un precipitato cristallino colorato in giallo per la presenza di solfato cerico. Le varie cristallizzazioni furono ridisciolte, a freddo, in acqua leggermente acida per acido solforico, e ricristallizzate secondo lo schema:

I	II	III	IV	V	VI
I					
2	I				
3	2	I			
4	3	2	I		
	4	3	2	I	
		4	3	2	I
			4	3	2
				4	3
					4

Durante il controllo del frazionamento, eseguito mediante gli spettri di assorbimento, abbiamo potuto notare che le bande descritte come caratteristiche del praseodimio, si comportavano diversamente; cosicchè, man mano che le frazioni di testa andavano arricchendosi in praseodimio con-

AVVERTENZA: La presente Nota faceva parte di un plico suggellato spedito il giorno 21 giugno 1924 (del quale plico prese atto la Presidenza dell'Accademia il 4 luglio 1924). Il plico, in seguito a desiderio espresso dagli AA., fu aperto nella seduta del 7 novembre 1926, e della Nota contenuta fu data lettura davanti all'Accademia.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica inorganica e di Chimica fisica del R. Istituto di Studi Superiori in Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 7 novembre 1926.

(3) «Gazz. Chim. Ital.», in corso di pubblicazione.

(4) Id.

(5) Ci fu fornito dalla ditta de Haën.

trariamente a ciò che era stato osservato da Urbain ⁽¹⁾, mentre due bande aumentavano la loro intensità, una diventava più debole.

Questo fatto ci fece supporre di essere di fronte a un nuovo elemento, che ragionevolmente appartiene al gruppo del cerio ed ha proprietà simili al neodimio e al praseodimio.

Nel nostro caso, come in altri simili, una prova sicura dell'esistenza del nuovo elemento, poteva esser data da misure röntgenspettrografiche. Dobbiamo alla cortesia della sig.na prof. Rita Brunetti, che si è valsa dei mezzi sperimentali dell'Istituto fisico di Arcetri, le spettrografie (che verranno riportate in una Nota a parte) dalle quali risulta la presenza dell'elemento in questione. Per questo elemento, a numero atomico 61 noi proponiamo il nome di *Florenzio* (*Florentium*) e il simbolo Fr.

Lavoriamo attualmente su grandi masse di monazite brasiliana allo scopo di separarne questo elemento, che in natura si trova in piccolissime quantità.

L'essere così scarso in natura, spiega il risultato negativo a cui giunsero recentemente Günther e Stranski ⁽²⁾, i quali esaminarono röntgenspettrograficamente le frazioni nelle quali si erano concentrati gli elementi di numero atomico compreso tra 60 e 66.

Per tanto dalle ricerche mineralogiche di Hadding ⁽³⁾ potrebbe sembrare che la fluocerite lo debba forse contenere.

POSTILLA alla Nota di L. ROLLA e L. FERNANDES, *Sopra un nuovo elemento: il Florenzio* (n. a. 61). Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1926.

Allo scopo di rivendicare la nostra priorità, per la scoperta dell'elemento di numero atomico 61 che noi abbiamo identificato due anni or sono e che abbiamo chiamato Florenzio (Fr), dopo aver avuto conferma non dubbia sui risultati allora ottenuti, mediante le ricerche dettagliatamente descritte nella nostra Nota inserita negli Atti accademici e in quelle pubblicate nella « Gazz. Chim. Ital. » e nel « Z. anorg. allgem. Chem. » e per le ricerche röntgenografiche che la sig.na prof. Brunetti ha eseguito sul nostro materiale, abbiamo chiesto di aprire il plico suggellato contenente la Nota sopra pubblicata.

Insistiamo dunque nella nostra proposta che il nome del nuovo elemento debba essere Florenzio e il simbolo Fr.

(1) « Ann. Chim. Phys. », 1900, 7, 19, 209.

(2) « Z. Physik. Ch. », 116, 440 (1923).

(3) « Zeit. anorg. allgem. Chem. », 128, 195.

Geologia. — *La questione dell'età degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Nazionale F. SACCO.

Sono ben onorato che siasi creduto di dedicare una Memoria della R. Accad. Naz. dei Lincei ⁽²⁾ per combattere la mia idea della cretaceità degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino e sono assai grato all'ing. S. Franchi di essersene incaricato.

Ciò prova l'importanza grande (da tutti riconosciuta) di tale questione dal punto di vista sia scientifico, sia pratico ⁽³⁾, sul che il Franchi ed io, abbiamo già insistito nelle nostre pubblicazioni; anzi io ho fatto quest'anno un passo in più di un semplice voto platonico, col rivolgere cioè, in data 2 giugno, una lettera all'ill.mo sig. Presidente della Commissione per il Servizio geologico italiano, sottoponendogli la proposta che, per giungere, possibilmente, alla soluzione di detta questione, venisse nominata una Commissione (di cui facessero parte geologi che non se ne fossero ancora direttamente occupati) la quale visitasse qualcuna delle regioni che più chiaramente mostrano fatti in appoggio dell'una e dell'altra interpretazione, per trarne la conclusione che apparisse più logica e naturale; ricordavo come tale metodo avesse già portato a risultati conclusivi circa l'età dei Calceschisti con Pietre Verdi delle Alpi Occidentali e naturalmente mi mettevo ad eventuale disposizione della invocata Commissione. Ora attendo.

In tale attesa potrei seguire il mio solito metodo (che parmi scientificamente il migliore), cioè di non replicare a scritti contraddittori ma continuare a raccogliere nuovi fatti per pubblicarli poi raggruppati. Però siccome il Franchi, dopo aver deplorato che io sto *opponendo un ostinato silenzio* ⁽⁴⁾ agli attacchi dei miei oppositori, emette, a base principale delle proprie idee, una sua interpretazione stratigrafico-cronologica che credo erronea, oltre a presentare, come eseguite *secondo il prof. F. Sacco*, due sezioni geologiche così assurde che, se fossero veramente da me firmate,

(1) Presentata nella seduta del 21 novembre 1926.

(2) FRANCHI S., *La prosecuzione della zona ad « Helminthoida » dalle Alpi Marittime all'Appennino Genovese e l'età delle « Argille scagliose »*. « Mem. R. Acc. Naz. Lincei », CCCXXIII, 1926.

(3) Basti ricordare le gallerie ferr., le trivell. profonde per ricerche d'acqua, di petrolio, ecc.

(4) Parmi che non si tratti di *silenzio* ma di *modo di rispondere*, cioè non con pubblicazioni contraddittorie che possono sembrare polemiche, ma con indicazioni di nuovi fatti geologici, paleontologici, ecc., come esposi in ben 24 pubblicazioni successive attraverso quasi un quarantennio, dal 1889 al 1926, per cui, piuttosto che di esser silenzioso, parmi che si potrebbe accusarmi d'aver scritto troppo!

mi coprirebbero di ridicolo; così sono obbligato a tosto scaricarmi di tale inaccettabile attribuzione, segnalando quanto parmi sia giusto.

Sarò breve, rinviando perciò spesso alla mia ultima Nota sopra: *L'età degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino*, « Atti R. Accad. Sc. », Torino, LXI, 1925, Nota che deve tenersi unita alla presente ⁽¹⁾.

Nella prima parte della sua Memoria l'ing. Franchi si occupa della *continuità della zona ad « Helminthoida » dalle Alpi Marittime all'Appennino Genovese*, continuità sulla quale credo che siamo tutti d'accordo in linea generale, solo che il Franchi vuol limitare l'età della zona all'Eocene sup., mentre credo che trattisi di una formazione comprensiva sviluppata attraverso l'Eocene medio e superiore.

Ricordo in proposito che sin dal 1885 in una Nota sulla: *Massima elevazione dell'Eocene nelle Alpi Occidentali italiane* (« Boll. C. A. I. », n. 53), segnalai e cartografai per l'Eocene di quella regione delle Alpi Marittime la seguente serie stratigrafica:

Flysch. — Serie di schisti e strati di arenarie e di calcari a *Elminth.* e *Chondrites*.

Macigno. — Banchi di arenarie alternati con di schisti argilloso-calcarei.

Nummulitico. — Calcari grigi a *N. perforata*; *N. Ramondi*, *N. Brongniarti*, ecc.

Ma in seguito, in un quarantennio di rilevamenti geologici attraverso l'Appennino, potei constatare che i Calcari a *Helminthoida* (*Liguriano*), gli Schisti svariati (*Flysch*) e le Arenarie (*Etrurio* o *Macigno*) formano tutto un complesso (il cosiddetto *Flysch calcaire* o *noir* o *gréseux* dei geologi francesi) sviluppatosi dall'Eocene medio (compreso) al superiore; cioè non sono orizzonti stratigrafici fissi, ma sono *facies* laterali od eteropiche che nelle diverse regioni si intrecciano, si alternano o si sostituiscono.

Così i Calcari ad *Helminthoida* ed a Fucoidi talora invadono e costituiscono, colla potenza anche di centinaia di metri, quasi tutta la serie eocenica media e superiore, come per es., nella cosiddetta (da Franchi) *formazione del M. Antola*, rappresentante la tipica *facies liguriana*, che alcuni geologi credono persino essere inferiore agli Argilloschisti ofitiferi. Detta *facies* giunge spesso in basso (quindi in piena età *parisiana*) sino a contatto coi famosi schisti rossi dell'Eocene inferiore (di cui dirò più avanti), che passano poi gradualmente al sottostante Cretaceo ofiolitifero ad *Hamites*, come precisai nella fig. 2 dell'ultima Nota del 1925. Quindi tale fatto e la presenza di Assiline, Nummuliti, Ortofragmine, ecc. di tipo *luteziano* (= *Parisiano*) nella formazione di tali Calcari a Elmintoidi e Fucoidi (vedi a pag. 35 di detta mia Nota) precisano che detti Calcari si sviluppano anche nel *Parisiano* e non sono limitati al *Ludiano* (che la maggioranza dei geologi considera però quale Oligocene, *Tongriano*) come sostiene il Franchi.

(1) Di questa Nota posseggo ancora alcuni estratti che metto a disposizione di chi può interessarsene.

Altre volte è l'Arenaria (*Macigno*) che (per vicinanza di forti rilievi, per ambiente litoraneo, ecc.) invade gran parte della serie eocenica media e superiore, colla sua tipica *facies etrusica*, colla potenza anche di centinaia di metri. Quando poi essa predomina nella parte superiore dell'Eocene (come in tante regioni delle Alpi Marittime, dell'Istria, ecc.), allora fu da taluni riferita all'Oligocene, come i *Grès d'Annot*, il *Grès de Menton*, ecc. L'idea di due orizzonti di *Macigno*, cioè di *Macigno inferiore* e di *Macigno superiore* o *giovane*, come è segnato da alcuni geologi italiani ha origine da intrecci e alternanze di tali *facies* nella serie medio-superiore dell'Eocene appenninico, come indicai nelle pp. 33-34 della mia Nota del 1925.

Trattandosi di una serie eocenica, a *facies* comprensiva, tanto differente da quelle tipiche su cui si fondarono le classiche divisioni denominate *Suessoniano* o *Londiniano*, *Parisiano* o *Luteziano*, *Bartoniano* o *Priaboniano p.*, naturalmente tali divisioni e denominazioni hanno per l'Appennino un valore molto relativo; quindi parmi si possano usare solo come orientamento generale, senza darvi troppa importanza e precisione delimitativa.

Del resto il voler limitare al *Parisiano* la sottile formazione dei banchi nummulitici inferiore e riferire al solo *Bartoniano* o *Priaboniano* o peggio al *Ludiano*, la serie sovrastante, dello spessore di tante centinaia di metri, non parmi nè giusto nè ragionevole.

Ad ogni modo, per quanto la complessa zona ad *Helminthoida* (l. s.) si continui dalle Alpi Marittime all'Appennino ligure, ecc., siccome nella Liguria occidentale non compaiono gli Argilloschisti ofitiferi, la loro importante questione, cronologico-stratigrafica, non vi può trovare base di risoluzione. Passiamo quindi nella Liguria orientale, seguendo così la seconda parte della Memoria dell'ing. Franchi.

Egli intanto ritiene giusto il profilo dato pel Bobbiese dal Rovereto nel 1924 come *Sezione fondamentale con successione regolare della serie eocenica* e che io invece interpreto (vedi fig. 1 della mia Nota del 1925) come risultante da due pieghe coricate. Se il Franchi, invece di accettare come *verba magistri* l'interpretazione del Rovereto, fosse andato sul posto, probabilmente, da ottimo rilevatore quale egli è, avrebbe constatato che le due zone argilloso-ofitifere, ivi altimetricamente staccate e quindi apparentemente distinte verso Bobbio, invece verso sud si riuniscono tosto in una sola (come già segnai nella mia Carta geologica dell'Appennino settentrionale del 1891), mostrando così materialmente di non corrispondere affatto a due orizzonti diversi.

Invece circa la grande anticlinale spezzina e le rispettive sezioni da me date (vedi figg. 4, 5 e 6 nella mia Nota del 1925) che mostrano nettamente la seguente serie success.: *Macigno*, *Argill. ofitiferi*, *Calcare Neocomiano*, l'ing. Franchi (perchè probabilmente non si recò ad esaminare i fatti sul luogo) non credette darvi il valore che credo abbiano, consigliandomi invece di andare ad esaminare la regione circumpuana come più vasta e chiara

per potervi leggere liberamente le verità stratigrafiche; ma appunto perchè vi andai più volte, dal 1891 in poi, tali verità mi apparvero, come accennerò ora.

È qui da premettere che il Franchi vuol dimostrare « assurda l'ammissione a cui si sarebbe condotti, accettando le idee del Sacco, della coesistenza nella stessa regione di due *facies* differentissime di Cretaceo, quella ordinaria (*Scaglia*) . . . e quella ofiolitifera » e più avanti egli mi fa supporre che « devo ricorrere ad una ipotesi molto astrusa: che esse (le argille scagliose) si siano deposte trasgressivamente sulla *Scaglia* ». Affermazioni entrambe che non ho mai pensato nè scritto, come ripudio pure le due sezioni geologiche indirettamente attribuitemi, ed ecco perchè.

Che cosa è questa *Scaglia* cretacea circumapuana sulla quale il Franchi appoggia essenzialmente la sua tesi contro le mie idee? Se si esaminano superficialmente le tante carte geologiche ufficiali rilevate dagli ingg. Zaccagna e Lotti nella regione circumapuana (Lunigiana, Garfagnana, ecc.), salta all'occhio di chiunque la frequente ed estesa bella tinta verde che indica il Cretaceo *Senoniano* (*Scaglia*), che talora si sovrappone all'*Infracretaceo*, passante poi al Giura, ecc., per cui la serie parrebbe esservi regolare e continua; ma la verità è ben diversa come lo dicono chiaramente, oltre che lo studio sopralluogo, le spiegazioni delle tinte convenzionali e le Memorie illustrative delle Carte geologiche.

Infatti in alcune tavolette al 25.000 (per es. di Gallicano, Castelnuovo, Vagli, ecc.), e nel recentissimo (1925) foglio, al 100.000, di Massa è segnato: **Senoniano** - *Schisti argillosi policromi (in parte eocenici)*; oppure in altre tavolette al 25.000 (per es. di Pescaglia) è segnato: **Senoniano** - *Schisti argillosi policromi (in parte eocenici) intermezziati da calcari nummulitici*; oppure (come in quella di Sarzana): **Senoniano** - *Schisti e calcari marnosi grigio, rossi e verdastri (Scaglia) con strati di Calcare grigio screziato (nummulitici)* che sono anzi segnati verso la base dalla cosiddetta *Scaglia*, come infatti appaiono presso Castelpoggio, ecc.; del resto nella spiegazione di varie tavolette (per es. di Vagli, Castelnuovo, ecc.), è anche indicato (come del resto si vede assai bene sul sito) che i *Calcarei nummulitici* sono associati agli *Schisti policromi*, del cosiddetto *Senoniano* (*Scaglia*).

Inoltre, consultando le relative Memorie illustrative, vediamo che lo stesso ing. D. Zaccagna nelle sue *Note ill. Carta geol. Alpi Apuane*, 1920, dopo aver accennato (p. 82) all'*alternanza degli Schisti policromi* (che nelle sue carte e sezioni geol. segna come *Senoniano*) *colla parte inferiore dell'Eocene*, aggiunge che *parte almeno di questi Schisti che si associa al Nummulitico debba necessariamente considerarsi come faciente parte dell'Eocene*.

L'ing. B. Lotti nella *Geologia della Toscana* (1910), nel capitolo *Senoniano*, trattando, a p. 79, dei noti *Schisti argillosi policromi*, scrive che *probabilmente solo una parte di questa formazione può riferirsi al Senoniano, mentre la parte superiore di essa, che strettamente collegasi al Nummulitico, deve esser riunita all'Eocene*.

Dunque è chiaro che questi Schisti policromi, il cosiddetto *Senoniano* (o *Scaglia*) delle regioni circumapuane, corrisponde in massima parte all'Eocene inferiore (la solita zona nummulitica a *N. Ramondi*, ecc.), *parisiana*, passante probabilmente in basso al *Suessoniano*, che però inferiormente passa ancora, gradatamente, a Schisti rossigni (in cui pare siansi trovati rari denti di Pticodi) del Cretaceo superiorissimo. Schisti policromi che in alcune regioni dell'Appennino emiliano e garfagnino constatai (fatto importante precisato nella mia Nota del 1925, p. 43) passare alla loro volta, gradualmente, in basso, alla dibattuta serie degli Argilloschisti ofiolitiferi con Inocerami, Hamiti, Ammoniti, ecc. del Cretaceo; presentandovisi così la seg. interessante serie success.: *Macigno*, *Schisti policr.*, *Argill. ofitiferi*.

Orbene che cosa appare, dove la serie stratigrafica è più completa, sotto agli Schisti policromi della famosa *Scaglia* circumapuana? Subito e senz'altro il Calcare bianco-grigiastro ad Aptici del *Neocomiano*; cioè vi manca parte del *Senoniano*, tutto il *Turoniano*, tutto il *Cenomaniano* e la parte superiore dell'*Infracretaceo*. Vi esiste cioè una grande lacuna stratigrafica; è in essa appunto che sta perfettamente a posto la potente formazione degli Argilloschisti (Argille scagliose, Galestri, ecc.) ofiolitiferi coi suoi tipici fossili cretacei (talora solo in impronta ma non rimaneggiati), cioè Cicadeoidee, Uintacrini, Inocerami (numerossimi), Ammoniti di varii gruppi, denti di Pticodi, Itiosauri, ecc.; argomento paleontologico formidabile, costituendo la base della Geologia stratigrafica, ma che il Franchi trascurò perchè contrario alla sua tesi.

Naturalmente contro le compatte, rigide emersioni calcaree mesozoiche (come quelle Apuane e simili) detta formazione argillosa, coperta dalla massiccia pila del *Macigno*, per la natura sua non potè generalmente affiorare (salvo però varie eccezioni, come nei monti a nord dei Bagni di Lucca, nei monti di Lucchio, nella sopracitata anticlinale spezzina, ecc.) e rimase mascherata per fenomeni di scorrimenti (facilitati appunto dalla natura stessa argillosa), di trasgressione, di compressione, di laminazione, ecc., facili a comprendersi per terreni di tale natura e posizione.

Invece a qualche distanza da tali rigide emersioni calcaree mesozoiche, detta formazione argillosa ofitifera potè più o meno facilmente e largamente affiorare, per lo più in anticlinali rovesciate contro detti ostacoli (secondo la regola geotettonica generale) e quindi mostrandosi quivi ora sottoposta ed ora anche sovrapposta alle arenarie (*Macigno*) ed ai Calcari a Furoidi dell'Eocene; come cercai di mostrare in tante sezioni geologiche pubblicate dal 1891 ad oggi e che naturalmente riescono completamente diverse, anzi opposte, a quelle generalmente presentate ed ammesse dagli altri geologi italiani.

Concludendo, la dibattuta questione dell'età degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino si può così sintetizzare nelle sue due ben distinte interpretazioni:

(Secondo S. FRANCHI).

(Secondo F. SACCO).

Priabon.	{	Sup. (<i>Ludiano</i>). Calcarì a <i>Helminth.</i>	{	Serie comprensiva, con <i>facies</i> eteropiche, ora specialmente calcarea (Calcarì a <i>Fucoidi</i> , a <i>Helminth.</i> , ecc.) <i>liguriana</i> , ora specialmente arenacea (<i>Macigno</i>) <i>etrurica</i> , talora nummulitifera verso la base.	}	Eocene
		Inf. o <i>Bartoliano</i>				
			{	Argilloschisti ofiolitiferi.		
				<i>Macigno</i>		
Parisiano	-	Calcare nummulitico.				
Senoniano	-	Schisti policromi (<i>Scaglia</i>).				
			{	Schisti policromi (cosidetti <i>Scaglia</i>)	{	
				con Calcarì nummulitici		
				condenti di <i>Pticodi</i>		
					{	
				Serie comprensiva di Argilloschisti (Argille scagliose, Galestri, ecc.) ofitiferi, con <i>Cicadeoidee</i> , <i>Inocerami</i> , <i>Ammoniti</i> , <i>Pticodi</i> , <i>Hamiti</i> , <i>Itiosauri</i> , ecc.		Cretaceo
Neocomiano	-	Calcarì bianco-grigiastri ad Aptici.				
				Calcarì bianco-grigiastri con Aptici (<i>Neocomiano</i>).	{	Infracretaceo

Fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool.* Due Note del Corrisp. S. BAGLIONI, di L. BRACALEONI e Q. GALAMINI.

Saranno pubblicate in due prossimi fascicoli.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Su l'energia cinetica relativa.* Nota di B. FINZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Consideriamo un sistema materiale: T sia la sua energia cinetica assoluta, T_1 l'energia cinetica relativa ad un osservatore solidale con un triedro mobile, T_2 l'energia cinetica di trascinamento.

Esprimeremo T mediante T_1 e T_2 . In particolare studieremo il caso in cui il sistema materiale è un sistema continuo e il moto assoluto stazionario. Risulterà allora che, in assenza di forze esterne, e per opportuni valori di costanti, l'energia cinetica assoluta è uguale all'energia cinetica relativa meno l'energia cinetica di trascinamento. Prescindendo dall'essere il moto assoluto stazionario, considereremo, a mo' d'applicazione, un solido traslante uniformemente in seno ad un fluido indefinito, e sul solido l'osservatore mobile. Dedurremo che, affinchè valga per la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica il principio classico di relatività, dovrà sussistere il paradosso di d'Alembert.

1. Sia \mathbf{v} la velocità assoluta di un punto P del sistema nell'istante t , \mathbf{u} sia la velocità di trascinamento, \mathbf{w} la velocità relativa. Sarà:

$$(1) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}.$$

Se \mathbf{u}_0 è la velocità di un punto O , sarà:

$$(2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).$$

Dalla (1) dedurremo tosto

$$v^2 = u^2 + w^2 + 2 \mathbf{u} \times \mathbf{w};$$

o anche, ricordando la (1),

$$(3) \quad v^2 = w^2 - u^2 + 2 \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Sia \mathbf{Q} la quantità di moto assoluta del sistema, \mathbf{I} il momento delle quantità di moto assolute rispetto ad O . In virtù della (3) e della (2), si otterrà:

$$(4) \quad T = T_1 - T_2 + \mathbf{Q} \times \mathbf{u}_0 + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}.$$

(1) Nella seduta del 21 novembre 1926.

Deriviamo (assolutamente) la (4) rispetto al tempo: avremo:

$$(5) \quad \dot{T} = \dot{T}_1 - \dot{T}_2 + \dot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{u}_0 + \mathbf{Q} \times \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Diciamo \mathbf{R} la risultante delle forze al contorno e delle forze esterne applicate al sistema, \mathbf{M} il momento di queste forze rispetto ad O : in virtù delle equazioni cardinali della dinamica, scriveremo la (5) così:

$$(5') \quad \dot{T} = \dot{T}_1 - \dot{T}_2 + \mathbf{R} \times \mathbf{u}_0 + \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q} \times \dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

La relazione ora scritta caratterizza \dot{T} , così come la (4) caratterizza T .

2. Il sistema materiale di cui è oggetto sia un sistema continuo, occupante uno spazio limitato; il suo moto assoluto sia stazionario. In queste ipotesi, in assenza di forze esterne, Cisotti dimostrò esser $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ ⁽¹⁾. Se ne deduce allora:

$$\mathbf{Q} = \text{cost} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{r} = \text{cost} = \mathbf{b}.$$

Scriveremo dunque la (5') e la (4) così:

$$(6) \quad \dot{T} = \dot{T}_1 - \dot{T}_2 + \dot{\mathbf{u}}_0 \times \mathbf{a} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{b},$$

$$(7) \quad T = T_1 - T_2 + \mathbf{u}_0 \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Il trinomio $T - T_1 + T_2$ non dipende dunque dal moto assoluto del sistema, ma solo dalle caratteristiche cinematiche (\mathbf{u}_0 e $\boldsymbol{\omega}$) del moto di trascinamento. Se, in particolare, le due costanti \mathbf{a} e \mathbf{b} sono nulle, la (7) assume la forma assai semplice:

$$(8) \quad T = T_1 - T_2;$$

cioè: l'energia cinetica assoluta è uguale all'energia cinetica relativa meno l'energia cinetica di trascinamento. Questa relazione, a meno di un segno, è del tutto analoga alla relazione vettoriale (1), caratterizzante la velocità assoluta come somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento.

3. Studiamo ora il caso particolare in cui, essendo o no il moto assoluto del sistema stazionario, il moto di trascinamento si riduce ad una semplice traslazione uniforme.

Sia dunque $\mathbf{u}_0 = \text{cost} = \mathbf{c}$, $\boldsymbol{\omega} = 0$. In queste ipotesi, la (5') diverrà:

$$\dot{T} = \dot{T}_1 - \dot{T}_2 + \mathbf{R} \times \mathbf{c}.$$

Ma, nel caso particolare, se m è la massa totale del sistema, $T_2 = \frac{mc^2}{2}$ e $\dot{T}_2 = 0$. Scriveremo dunque:

$$(9) \quad \dot{T} = \dot{T}_1 + \mathbf{R} \times \mathbf{c}.$$

(1) U. CISOTTI, *Sulle azioni dinamiche di masse fluide continue*, « Rend. Ist. Lombardo », L, fasc. 12-13, 1917, p. 502.

Affinchè sia $\dot{T} = \dot{T}_r$, dovrà essere $\mathbf{R} \times \mathbf{c} = 0$ ⁽¹⁾. La condizione $\mathbf{R} \times \mathbf{c} = 0$ è necessaria perchè valga il principio classico di relatività per la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica. ⁽²⁾ Da questa proposizione si deduce una conseguenza curiosa:

Consideriamo un fluido indefinito, in tale quiete all'infinito, che ivi si spengano le azioni dinamiche esercitate dal fluido stesso ⁽³⁾. In seno al fluido, in assenza di forze esterne, trasli con velocità costante \mathbf{c} un solido. Un osservatore si trovi sul solido: affinchè per esso valga il principio classico di relatività per la potenza \dot{T} , dovrà essere $\mathbf{R} \times \mathbf{c} = 0$. Ma, nel caso particolare, \mathbf{R} altro non è che la risultante delle forze che il fluido esercita sul solido, e $\mathbf{R} \times \mathbf{c}$ è la resistenza diretta incontrata dal solido traslante in seno al fluido. Perchè dunque valga il principio classico di relatività per la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica, dovrà, nel caso in esame, sussistere il paradosso di d'Alembert.

Meccanica. — *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo.* Nota di G. VRANCEANU, presentata ⁽⁴⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Un sistema materiale anolonomo, che per semplicità supponiamo a vincoli indipendenti dal tempo, si può sempre far dipendere da un certo numero n di coordinate lagrangiane x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), scelte in modo da tener conto di tutti i vincoli direttamente assegnati in forma finita.

Gli altri vincoli (di mobilità, anche se eventualmente integrabili) si possono sempre esprimere con un certo numero $n - m$ di equazioni lineari nelle derivate delle x della forma ⁽⁵⁾

$$(1) \quad \sum_i^n \varphi_{ij} \frac{dx_i}{dt} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - m).$$

(1) Si osservi che questa condizione è verificata per i moti stazionari (Cfr. U. CISOTTI, loc. cit., § 9).

(2) Il principio classico di relatività sussiste, notoriamente, per le accelerazioni.

(3) All'uopo basta che, se r è la distanza tra un punto O al finito e un punto $P \rightarrow \infty$, sia $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{v}}{dP} r^2 = 0$ (B. FINZI, *Constatation énergétique du paradoxe de d'Alembert dans les liquides visqueux*, « Comptes rendus de l'Ac. des Sciences », t. 182, p. 1077 [1926]).

(4) Nella seduta del 21 novembre 1926.

(5) Cfr. p. es. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale* (Bologna, Zanichelli, 1926), vol. II, cap. V, n. 54, p. 396.

La forza viva del sistema assume la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^n a_{ij} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt},$$

ed è da osservare, che nel caso dei vincoli indipendenti dal tempo, tanto i coefficienti φ_{ij} , quanto le a_{ij} , non dipendono esplicitamente dal tempo.

1. Consideriamo adesso la varietà riemanniana V_n , il cui ds^2 sia definito in base alla formula

$$(2) \quad ds^2 = 2 T dt^2 = \sum_i^n a_{ij} dx_i dx_j.$$

In una Nota precedente ⁽¹⁾ ho fatto vedere, che dalle equazioni (1) si ricavano le $\frac{dx_i}{dt}$ (e anche in una infinità di modi), sotto la seguente forma parametrica

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_b^m \lambda_b^i u_b,$$

dove λ_b^i ($i = 1, 2, \dots, n$) sono i parametri di una direzione (b) in V_n , e le m direzioni λ_b ($b = 1, 2, \dots, m$) sono ortogonali tra di loro.

Questi parametri λ_b^i sono funzioni ben determinate delle x , e perciò essi definiscono in V_n m congruenze ortogonali.

Le m caratteristiche cinetiche u_b ($b = 1, 2, \dots, m$) sono, dal punto di vista geometrico, i coseni che la direzione dello spostamento

$$\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$$

forma colle congruenze λ_b .

Indicando con s_b l'arco sopra la congruenza (b), si ha ancora

$$u_b = \frac{ds_b}{dt}.$$

Gli spostamenti virtuali del sistema sono evidentemente forniti dalle espressioni

$$(4) \quad \delta x_i = \sum_b^m \lambda_b^i \delta s_b,$$

dove le δs_b sono a considerarsi quantità infinitesime arbitrarie.

(1) Questi « Rend. », *Sopra una classe di sistemi anolonomi*, serie 6^a, vol. III (1926), pp. 549-550.

Scriviamo adesso l'equazione simbolica della Meccanica nelle nostre coordinate lagrangiane x

$$(5) \quad \sum_i^n \left[\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} - X_i \right] \delta x_i = 0.$$

Tenuto conto delle formule (4), nonchè delle (3) e loro prime derivate, l'equazione (5) assume la forma

$$(5') \quad \sum_b^m \left[\frac{du_b}{dt} - \sum_{ke}^m j_{hke} u_k u_e - P_h \right] \delta s_b = 0,$$

dove j_{hke} sono i coefficienti di rotazione di Ricci⁽¹⁾ delle m congruenze ortogonali λ_b , e le P_h sono le componenti della risultante delle forze applicate secondo le direzioni (h).

Dato il fatto che le δs_b sono arbitrarie, l'equazione (5') non può aver luogo, se non si ha separatamente

$$(6) \quad \frac{du_b}{dt} - \sum_{ke}^m j_{hke} u_k u_e - P_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Si vede che queste m equazioni definiscono le derivate delle caratteristiche cinetiche u . Associando a queste equazioni le equazioni (3), si hanno le equazioni generali del moto di un sistema anolonomo sotto la forma

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \sum_b^m \lambda_b^i u_b, & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{du_b}{dt} = \sum_{ke}^m j_{hke} u_k u_e + P_h, & (h = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Questo sistema di $m + n$ equazioni differenziali del primo ordine, sotto forma normale, serve a definire le n coordinate x e le m caratteristiche u in funzione del tempo. Il vantaggio che presentano le equazioni (7), in confronto ad altre equazioni già date per i sistemi anolonomi⁽²⁾, sta nel fatto che i coefficienti di queste equazioni (i parametri λ_b^i e i coefficienti di rotazione di Ricci), hanno una interpretazione geometrica semplice, e si conoscono le loro proprietà.

2. Se le forze derivano da un potenziale U , l'integrale delle forze vive ha la forma

$$(8) \quad T = \frac{1}{2} \sum_b^m u_b^2 = U(x_1, x_2, \dots, x_n) + \text{cost.}$$

(1) Cfr. TULLIO LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (raccolte dal dott. Persico) (Roma, Stok, 1925), p. 287.

(2) Cfr. LEVI-CIVITA e AMALDI, op. cit., vol. II, cap. V, § 8.

Supponiamo adesso che tutte le P_h siano nulle, nel quale caso le equazioni (7) definiscono i moti spontanei del nostro sistema, e l'integrale delle forze vive (8) si può scrivere

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2T = \text{cost.}$$

Da ciò risulta, che basta prendere convenientemente l'unità di tempo, perchè si abbia

$$ds = dt.$$

Perciò alle equazioni dei moti spontanei di un sistema anolonomo si può in definitiva attribuire la forma

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{ds} = \sum_1^m \lambda_b^i u_b, \\ \frac{du_b}{ds} = \sum_{ke}^m j_{bke} u_k u_e. \end{cases}$$

Queste equazioni definiscono attraverso le funzioni x_i (della variabile indipendente s e delle costanti di integrazione) una famiglia di curve in V_n . Tali curve godono della proprietà che la loro curvatura geodetica in qualunque punto P di V_n è minima, subordinatamente ai vincoli (3), e la proiezione della loro curvatura geodetica sopra una qualsiasi delle congruenze λ è nulla. Sono perciò le curve più dirette subordinatamente ai vincoli.

3. Indicando con V_n^m la varietà V_n nella quale sono possibili solo gli spostamenti forniti dalle espressioni

$$dx_i = \sum_1^m \lambda_b^i ds_b,$$

(vale a dire che in qualunque punto P , gli spostamenti non possono essere che tra le ∞_{m-1} direzioni della giacitura fornita dalle direzioni λ in P), si trova che le traiettorie dei moti spontanei del sistema, sono proprio le geodetiche di V_n^m e inversamente (1). Con ciò si estende anche ai sistemi anolonomi una proprietà classica dei sistemi olonomi.

(1) In una Memoria che sarà pubblicata negli « Annali di Matematica » col titolo *Studio geometrico-meccanico dei sistemi anolonomi* ho istituita una indagine sistematica di queste varietà V_n^m , illustrando diverse applicazioni che se ne possono fare al moto dei sistemi anolonomi.

Meccanica. — *Sur la représentation analytique de certains mouvements aperiodiques.* Nota di A. WEINSTEIN, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Azimut assoluto di Eremo di Cherasco, sull'orizzonte di Mondovì.* Nota di U. BARBIERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente GINO LORIA.

Successivamente alle osservazioni di latitudine compiute nel giugno-luglio 1925 nel vertice di Mondovì, e di cui fu reso conto in una Nota precedente, ne furono da me eseguite altre di azimut, le quali, come le precedenti di latitudine non accompagnate da favorevoli condizioni atmosferiche, ebbero luogo nelle notti del 26, 27 giugno e 3 luglio.

Come direzione fu scelta quella relativa al punto trigonometrico di 1° ordine, Eremo di Cherasco, a circa 24 km. a nord di Mondovì. Per individuare il vertice, costituito dall'asse del piccolo campanile dell'Eremo, fu disposta ex-centro una mira notturna, gentilmente esibita e fatta collocare in sito dal chiar.mo collega il prof. G. Silva della R. Università di Torino, che mi fu compagno durante il soggiorno di Mondovì, compiendo egli, contemporaneamente alle mie osservazioni, il collegamento gravimetrico di Mondovì Piazza con Genova e Torino.

Il metodo eseguito fu il solito dell'osservazione alterna della Mira e della Polare, secondo la successione MPPM, MPPM, determinando quattro valori dell'azimut in una posizione del cerchio zenitale, e altri quattro nella coniugata. Il cerchio si reiterò di 45 gradi, e a metà delle osservazioni fu invertito il cannocchiale sui suoi appoggi.

Dovendo poi il prof. Silva determinare per suo conto il tempo per le sue osservazioni gravimetriche, ebbi da Lui medesimo, e mediante confronti col suo, le correzioni del mio cronometro.

Qui appresso, nella tabelletta che segue, sono elencati i risultati delle osservazioni fatte; ogni valore dell'azimut proviene dalla media di otto determinazioni di esso, coniugate fra loro; le ultime colonne si riferiscono alla collimazione della Mira e della Polare.

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1926.

Data	Reitera- zione	Azimut	C_m	C_p	$C_m - C_p$
26 giugno 1925	0°	355° 00' 50".7	30".5	33".4	— 2".9
" " "	"	51.9	31.8	34.0	— 2.2
27 " " "	45°	49.2	30.3	34.6	— 4.3
" " " "	"	53.5	31.2	40.0	— 8.8
3 luglio "	90°	52.6	27.9	32.4	— 4.5
" " " "	135°	50.0	28.3	33.6	— 5.3

Facendo la media dei lavori qui sopra riportati, si ottiene in definitiva per l'azimut osservato

$$A = 355^{\circ} 00' 51''.31 \pm 0''.65.$$

RIDUZIONE AL CENTRO TRIGONOMETRICO.

Per questa riduzione occorre tener presente che, oltre all'eccentricità della Mira, e a simiglianza delle osservazioni di latitudine, lo strumento a Mondovì era disposto su di un pilastro ex-centro e che gli elementi necessari alla riduzione al centro trigonometrico, costituito dalla Torre del Belvedere, furono già riscontrati i seguenti

$$\varepsilon = 127^{\circ} 41' 17'' \quad \alpha = 47^{\circ} 19' 16'',$$

essendo ε l'angolo formato dalla direzione ad Eremo di Cherasco con la direzione al centro, ed α l'angolo di direzione (C S) della stazione S dal centro C.

Per quanto poi riguarda l'ex-centro dell'Eremo, misurata in doppio una base, mediante una piccola triangolazione, di cui i quattro vertici erano

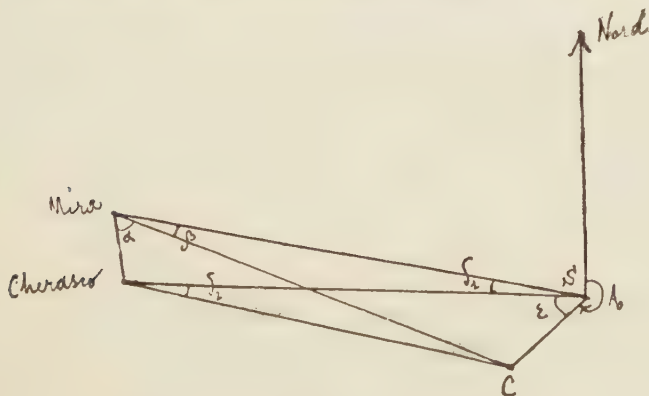


Fig. 1.

costituiti dagli estremi della base, dal centro e dal punto in cui era stata collocata la Mira, si determinò l'eccentricità. Osservato quindi direttamente, e con l'aiuto di un elioscopio collocato in centro sulla Torre del Belvedere, l'angolo nell'ex-centro dell'Eremo, fra le direzioni a Mondovì e ad uno degli estremi della base, se ne poté dedurre l'angolo α , fra le visuali al centro e a Mondovì, dal quale si poté passare all'altro β fra la Torre del Belvedere e l'ex-centro in Mondovì. Ne consegue che la determinazione dell'angolo δ_1 compreso nell'ex-centro di Mondovì fra la Mira e il centro di Cherasco, non presentò difficoltà.

Le varie correzioni per la riduzione in centro, risultarono perciò le seguenti:

correzione per la riduzione al centro della

Mira all'Eremo $\delta_1 = - 0^\circ 00' 29''.2$

correzione per il centramento della dire-

zione, $\delta_2 = \frac{e \sin \varepsilon}{s \operatorname{arc} 1''}$ $= + 0^\circ 04' 21''.6$

correzione per la conseguenza dei meridiani

fra S e C, $\frac{e \sin A_0}{N \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg} \varphi$ $= - 0^\circ 00' 00''.88$

$$\Delta A = + 0^\circ 03' 51''.5$$

Apportata questa correzione al valore precedentemente ottenuto dalle osservazioni, se ne deduce quale

Azimut astronomico della direzione Mondovì-Eremo di Cherasco

$$355^\circ 04' 42''.8 \pm 0''.65.$$

ATTRAZIONE LOCALE.

Tenuto conto dei valori direttamente osservati nella stazione di Mondovì, per la latitudine astronomica e per l'azimut, e dei valori geodetici delle medesime coordinate, forniti dall'Istituto Geografico Militare si ottiene

Latitudine di Mondovì (Torre del { astronomica $\varphi_a = 44^\circ 23' 42''.7$
Belvedere). { geodetica $\varphi_g = 44^\circ 23' 24''.3$

$$\varphi_a - \varphi_g = + 18''.4$$

Azimut della direzione Mondovì — { astronomico $A_a = 355^\circ 04' 42''.8$
— Eremo di Cherasco. . . . { geodetico $A_g = 355^\circ 04' 25''.3$

$$A_a - A_g = + 17''.5$$

Ne conseguono di qui le due componenti dell'attrazione locale

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g = + 18''.4$$

$$\eta = (A_a - A_g) \cotg \varphi_a = + 17''.9,$$

e dalle formole

$$\operatorname{tg} A = \frac{\eta}{\xi} \quad , \quad \Theta = \frac{\xi}{\cos A} = \frac{\eta}{\sin A}$$

l'azimut ellissoidico e il valore dell'attrazione locale

$$A = 44^{\circ} 10' 10'' \quad , \quad \Theta = 25''.65.$$

Fisica. — *Sopra l'esistenza dell'elemento a numero atomico 61.*
Nota di RITA BRUNETTI ⁽¹⁾, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Scopo della presente Nota è riferire sommariamente i risultati di un esame da me eseguito degli spettri di assorbimento, regione K delle alte frequenze, per alcuni campioni di terre rare fornitimi dal prof. Luigi Rolla.

Lo spettrografo a raggi duri modello Siegbahn di cui ho fatto uso era munito per l'analisi della radiazione di una lastrina di salgemma (spessore 2 mm.) dai piani interni assai buoni.

Per la produzione della radiazione ha servito un tubo del Coolidge da terapia profonda mantenuto in funzione sotto la tensione di 100 kilovolt con intensità di corrente di 2.5 M. A. Il limite dello spettro continuo eccitato era quindi prossimo alla radiazione di lunghezza d'onda 0.123 U. A. La potenza globale disponibile era tre volte più grande di quella usata in analoga ricerca da Siegbahn e Jönsson ⁽²⁾ (120 kilovolt, 3 M. A.), tenuto conto che il salgemma ha un potere riflessivo dei raggi X monocromatici ⁽³⁾ quattro volte superiore a quello della calcite, di cui si sono serviti per l'analisi i citati autori.

Le pose duravano dalle due alle quattro ore con fenditura di larghezza variabile fra due e quattro decimi di millimetro. Le registrazioni sono state eseguite sopra lastre Cappelli da raggi X, sviluppate alla glicina.

La sostanza da inserire sul cammino del fascio da analizzare era introdotta in una vaschetta di celluloido dello spessore di 0.3 mm. sotto forma di polvere minutissima in ragione di 0.7 gr. circa per cm².

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica Sperimentale in Arcetri (Firenze). Anche questa Nota era racchiusa nel plico del 21 giugno 1924, di cui parla l'avvertenza alla Nota precedente dei sigg. ROLLA L. e FERNANDES (p. 498).

(2) SIEGBAHN u. JÖNSSON, « Phys. ZS. », 20, p. 251, 1919.

(3) COMPTON, « Phys. Rev. », 10, p. 95, 1917.

Come spettro di confronto serviva lo spettro di emissione tipo K del tungsteno all'anticatodo del tubo.

L'angolo di riflessione sui piani del cristallo pel bordo delle bande è stato determinato mediante la formula facile a dedursi dalla geometria dello spettrografo

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{s_x - s}{D} + \operatorname{tg} \varphi$$

ove φ_x è l'angolo di riflessione della radiazione limite della banda sul cristallo; φ quella della radiazione di confronto; $s_x - s$ la distanza misurata sulla lastra fra la radiazione a lunghezza d'onda incognita e quella di confronto; D la lunghezza del raggio dello spettrografo (distanza fra asse di rotazione del cristallo e lastra fotografica) nel caso presente pari a cm. 56.28. Da φ_x si passa alla lunghezza d'onda λ_x mediante la relazione del Bragg

$$n\lambda_x = 2d \cdot \sin \varphi_x$$

nella quale era $n = 1$ (1° ordine degli spettri, $\log. 2d = 0.750\ 3541$).

Ho preferito in un primo tempo seguire questa via per la determinazione della lunghezza d'onda, piuttosto che quella delle fotografie simmetriche indicata dal Siegbahn, per economia di tempo e materiale: infatti pochi minuti di posa sulla stessa lastra su cui erano registrate le bande bastavano a dare le righe del tungsteno.

Col dispositivo usato la dispersione era di 1 mm. circa di distanza fra i limiti delle bande di elementi a numero atomico che differiva di una unità.

Nei campioni esaminati di ossido di didimio si sono dimostrati presenti gadolinio, samario, neodimio, praseodimio, lantanio.

L'attenzione è stata particolarmente concentrata sopra la regione spettrale compresa fra samario e neodimio, regione in cui in quasi tutte le fotografie si è manifestata a distanza di circa 1 mm. dalla banda del neodimio una discontinuità sul fondo dello spettro continuo non sempre altrimenti interpretabile che come una vera e propria banda di assorbimento. In seguito a spostamenti dello spettrografo e delle altre parti del dispositivo essa non è mai scomparsa, se non quando le condizioni fotografiche (sovra o sotto esposizione) o lo spessore eccessivo dello strato assorbente erano sfavorevoli alla manifestazione di dettagli sfumati sul fondo dello spettro.

Il carattere e la disposizione di tale discontinuità induceva dunque a supporre nel materiale esaminato la presenza dell'elemento compreso fra neodimio e samario nella tavola di Mendelejeff portante il numero atomico 61 e fino ad ora vagamente supposto in certi minerali ⁽¹⁾.

(1) KAYSER, *Handbuch der Spektroskopie*, vol. VII, p. 1923.

Per quanto una misura della lunghezza d'onda si presentasse difficile per l'aspetto della banda in questione, pure tentativi eseguiti sopra prove fotografiche ottenute con solfato di neodimio e praseodimio purificati dalle altre terre nel Laboratorio di Chimica Generale dell'Istituto di Studi Superiori di Firenze hanno dato i risultati riprodotti nella tabelletta seguente. In essa sono posti a confronto i valori ottenuti da Siegbahn e Jönsson per le bande di neodimio e praseodimio e quello calcolato per l'elemento a numero atomico $n = 61$ mediante la formula ⁽¹⁾

$$\sqrt{\nu} = \sqrt{\nu_0} (N - 3.5)$$

dove $\nu_0 = 109\,675$.

Elemento	Val. Brunetti	Val. S. e J.	Val. calc.
Pr	0.294 2 U. Ä.	0.294 6 U. Ä.	—
Nd	0.285 2	0.283 5	—
61	0.277	—	0.275 8

La differenza tra i valori calcolati da me e quelli di Siegbahn e Jönsson per le bande di praseodimio e neodimio sono dell'ordine rispettivamente di $3/1000$ e $1/1000$; il che garantisce la buona approssimazione nei risultati numerici ottenibili dall'apparecchio da me costruito.

La differenza di lunghezza d'onda calcolata per la banda d'assorbimento dell'elemento 61 differisce a sua volta di meno di $4/1000$ dal valore sperimentale.

Questo porta senz'altro alla convinzione che nel materiale esaminato è presente in piccola percentuale l'elemento a numero atomico 61. Il carattere di biunivocità fra bande di assorbimento tipo K e numeri atomici non lascia dubbio sul valore di tale asserzione.

Dai salti di intensità delle singole bande è difficile, senza prova fotometrica, determinare e differenziare la percentuale che di tale sostanza è contenuta nei vari campioni; tuttavia non pare arrischiato affermare che essa deve raggiungere qualche centesimo rispetto alla quantità di neodimio presente.

Lo studio delle bande di assorbimento sarà immediatamente rivolto alla soluzione di questo problema appena si saranno potute raccogliere prove ulteriori e documentarie di quanto oggi si ritiene aver buon fondamento di affermare.

La lastra fotografica qui unita costituisce la prova di quanto sopra è asserito ⁽²⁾.

(1) BLAKE a. DUANE, «Phys. Rev.», 2, p. 697, 1917.

(2) La lastra unita al piego, di cui il dettaglio interessante è *irriproducibile* per cliché, rimane negli Archivi dell'Accademia a disposizione di chi voglia esaminarla.

POSTILLA alla Nota *Sull'esistenza dell'elemento a numero atomico « 61 »* di R. BRUNETTI. Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1926.

Durante il frazionamento di terre rare del gruppo del didimio, in base a particolari apparenze degli spettri ottici d'assorbimento sorse il dubbio nei sigg. L. Rolla e L. Fernandes che fosse presente nel materiale in lavorazione l'elemento a numero atomico $Z = 61$, situato nella tavola periodica fra neodimio e samario; e al principio del 1924 venni richiesta di un esame röntgenografico di alcune delle frazioni ottenute. Per la piccola quantità di materiale frazionato disponibile, il numero ancora notevole di elementi in esso presenti e la nota ricchezza delle righe dello spettro L, giudicai improbabile che da un esame per emissione si potesse con sicurezza decidere dell'esistenza di un'eventuale traccia dell'elemento sospettato.

Mi attenni quindi al partito di procedere a un esame delle bande K d'assorbimento del materiale fornitomi. Il metodo per quanto poco sensibile avrebbe potuto dare risultato inequivocabile a causa della corrispondenza univoca fra discontinuità X ed elementi.

Il risultato allora ottenuto effettivamente parve positivo; fu tuttavia considerato come preliminare e provvisoriamente venne registrato nella precedente Nota consegnata alla R. Accademia dei Lincei dal prof. A. Garbasso in piego suggellato da aprirsi al momento in cui avessi ottenuta conferma più evidente da ricerca condotta in condizioni meno sfavorevoli sia dal punto di vista chimico, sia da quello dell'attrezzamento fisico.

Col prodotto di 3000 cristallizzazioni ottenute dai sigg. Rolla e Fernandes partendo da quantità rilevanti di materiale venne quest'anno ripetuta la ricerca del 1924, il cui andamento e risultati sono riferiti in altra Nota. Essi sono tali da permettere di togliere il riserbo fin qui tenuto sulla ricerca del 1924.

Fisica. — *Sull'identificazione dell'elemento a numero atomico « 61 »* ⁽¹⁾. Nota di R. BRUNETTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Mi riferisco per la descrizione delle condizioni generali di lavoro alla mia Nota *Sull'esistenza dell'elemento a numero atomico « 61 »* scritta nel giugno 1924 e ora pubblicata sugli Atti di questa Accademia.

Unica modificazione sostanziale dalle condizioni di allora fu quella del generatore: al rocchetto semplice con interruttore Ropiquet fu sostituito un apparecchio a corrente alternata (ditta Balzarini di Milano). In più insistetti

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica in Arcetri.

(2) Nella seduta del 7 novembre 1926.

su particolari disposizioni per non essere tratta in inganno nella interpretazione delle fotografie da false apparenze.

1° - PRECAUZIONI SPERIMENTALI. — Eliminaì il dubbio che dall'anticatodo del tubo a causa della struttura del fascio elettronico o della targhetta stessa provenissero discontinuità dello spettro *a*) tenendo l'anticatodo di profilo quanto era compatibile col principio del dispositivo spettrografico scelto ⁽³⁾ *b*) facendo spostare lo spettrografo di circa 24' intorno alla posizione intermedia della regione spettrale da esaminare con movimento uniforme guidato da una cardioide. Lo spettro continuo così apparve sulla lastra sempre uniforme qualunque fosse la posizione mediana dello spettrografo.

Questo non era sufficiente a escludere eventuali difetti del cristallo (un eccellente campione di salgemma di 2 mm. di spessore diverso da quello del 1924). Quindi esaminai accuratamente lo spettro d'emissione del tungsteno e le discontinuità K di vari elementi situati nelle vicinanze del 61, ottenute con questo cristallo.

Lo spettro K d'emissione del tungsteno, perfettamente puro nelle sue quattro componenti (righe α_1 , α_2 , β_1 , β_2), e le altre prove mi convinsero che ogni qualvolta davanti o dietro una banda si presentava traccia di discontinuità alla distanza richiesta dalla dispersione dello spettrografo, circa 1 mm. per 10 U. X. (altre discontinuità non si sono mai viste), erano presenti tracce di elementi prossimi a quello esaminato, che potevano chimicamente o spettroscopicamente essere accertate.

Fecì uso di soluzioni in acqua distillata di nitrati delle sostanze da esaminare come più omogenee dello strato pulverulento già usato nel 1924.

La cabina in cemento armato contenente il tubo radiogeno venne completamente foderata di piombo, che, nella parte anteriore, fra tubo e spettrografo, raggiunge lo spessore di 2 cm., cosicchè per pose lunghe con radiazione dura (120 KV) la lastra esposta non subiva danno eccessivo.

La velatura della lastra tuttavia inevitabile durante le lunghe esposizioni e gli sviluppi a fondo, se poteva limitare la percezione di lievi discontinuità, non presentava però false discontinuità.

2° - SENSIBILITÀ DEL METODO. — Essa non è certamente molto grande. Si può calcolare che al passaggio della banda K di un elemento contenuto nello strato assorbente in ragione di 0.001 gr. per cm², si ha una variazione di intensità del fondo spettrale di 2.4 %.

Una variazione di quest'ordine anche se faticosamente percettibile a occhio può essere segnalata bene da un fotometro.

Per sottoporre a prova sperimentale i risultati del calcolo introdussi in una soluzione di praseodimio otticamente esente da neodimio quantità pesate di questo elemento. Con 0.002 gr. circa per cm² dello strato assorbente la discontinuità K di questo elemento era già facilmente percettibile.

(3) M. SIEGBAHN, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, Berlin, 1924, pp. 55-77.

Inutile dire che anche con quantità inferiori della precedente, le bande gialli e verdi, del neodimio sono già nettamente visibili, cioè che la sensibilità del metodo ottico è superiore assai a quella del metodo röntgenografico per assorbimento nel rivelare tracce di ioni colorati.

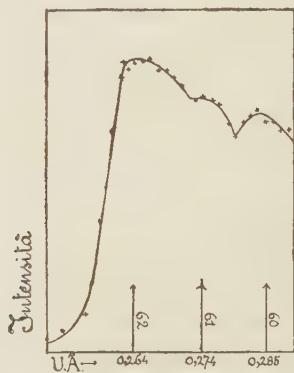
3° — I RESULTATI DELLA RICERCA. — Il problema consisteva dunque nell'eseguire spettri d'assorbimento nella regione delle discontinuità K di samario e neodimio con spessori crescenti fino a che si potesse contare su una quantità di elemento sospetto nello strato assorbente almeno dell'ordine di 0.001 gr. per cm².

Teoricamente non esiste limite a questo procedimento. In pratica si incontra un limite dovuto alle esposizioni necessariamente crescenti e relativa velatura del fondo della lastra.

Lo schermo di rinforzo, non adatto a mettere in rilievo bande appena accennate, a causa della leggera diffusione che dà luogo ai bordi delle discontinuità, presenta gli stessi inconvenienti delle pose lunghe. Fu tuttavia utilizzato qualche volta per orientamento e risparmio di tempo.

Il materiale studiato, oltre ad altre poche impurezze, contenendo samario ($Z = 62$) e neodimio ($Z = 60$, questo in minor quantità) la discontinuità K dell'elemento 61 doveva presentarsi a metà circa della distanza fra le bande di questi due elementi.

Le prove eseguite su nitrato di samario e neodimio in soluzione (vaschette di vetro con pareti trasparenti di celluloidi) sono 12, escludendo le fotografie preparatorie. La quantità di nitrato anidro introdotta in soluzione variava fra 0.7 e 2 gr. per cm² dello strato assorbente. Con fenditura dell'ordine del centesimo di mm. le pose variavano fra 5 e 20 ore (senza schermo di rinforzo).



La figura presenta la fotometria di una delle prove migliori ottenuta con 8 ore di esposizione e 0.9 gr. di nitrato per cm². La banda del 61 sulla lastra è comodamente visibile sebbene non riproducibile in *cliché*.

Anche nelle prove meno buone nel punto critico non è mai possibile escludere tracce di discontinuità. Nelle condizioni sperimentali (eccesso o difetto della posa o dello sviluppo, presenza dello schermo di rinforzo) si trova sempre la giustificazione dei risultati incerti.

Le condizioni della fotografia fotometrata si sono dimostrate le migliori per ottenere una buona visibilità della banda ricercata, col mio dispositivo sperimentale.

Con spessori superiori, e quindi esposizione e sviluppo in eccesso, nonostante le difficoltà di osservazione, è possibile giudicare che davanti alla discontinuità (dalla parte delle lunghezze d'onda brevi) l'intensità è più bassa. Questo fatto è caratteristico di una banda d'assorbimento all'aumentare della quantità per cm^2 della sostanza assorbente; mi pare quindi necessario rilevarlo esplicitamente.

Ritengo che la critica del procedimento sperimentale sia stata sufficientemente scrupolosa, cosicchè dal risultato evidente ottenuto io possa concludere che nella frazione samarica del prodotto fornitomi dai sigg. Rolla e Fernandes esiste una piccola quantità, forse dell'ordine di alcuni millesimi, di elemento a numero atomico 61.

Questo è buon sostegno alle conclusioni già tratte nel lavoro preliminare del 1924, condotte sopra materiale meno adatto dell'attuale alla ricerca e di identica origine.

È la prima volta che nelle recenti scoperte di elementi mancanti nella tabella del Mendelejeff viene fatto uso del metodo delle discontinuità d'assorbimento per ricercare tracce di elemento nuovo. Fin qui, sull'esempio di Coster ed Hevesy nel caso dell'Hafnium, si è ricorsi sempre agli spettri d'emissione L.

Le difficoltà nel raggiungere risultati e i dubbi di cui essi sono affetti messi in evidenza dagli stessi sigg. Harris, Hopkins e Yntema ⁽¹⁾ nella loro identificazione per spettri L dell'elemento 61, danno ragione della via su cui ho preferito insistere, indotta fin dalla prima volta sia da ragioni di opportunità sia da precisa convinzione.

Fisica. — *Sul paramagnetismo degli elementi compresi fra il Ca e lo Zn.* Nota di A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Journ. of the Am. Chem. Soc. », 48, p. 1594, 1926.

Fisica matematica. — *Sui campi elettromagnetici aventi nullo sul contorno il campo elettrico (magnetico) e tangenziale sul contorno stesso il campo magnetico (elettrico).* Nota di U. CRUDELI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. DI LEGGE.

Scopo della presente Nota è di mostrare la esistenza e la costruzione di campi elettromagnetici della specie indicata nel titolo di questa Nota medesima, i quali però in generale verranno ad avere struttura più ampia di quella stabilita nel mio precedente lavoro comparso in questi « Rendiconti » (2° semestre 1926), poichè non avranno identicamente nulla la divergenza del campo elettrico.

Anzitutto si richiamino le due coppie di vettori (\mathbf{E}, \mathbf{H}) ed (\mathbf{F}, \mathbf{K}) costruiti allora, inerenti a due diversi campi elettromagnetici suscettibili di esistere (l'uno oppure l'altro) entro uno spazio (diciamolo anche qui s) a contorno sferico invariabile (contorno che viene designato con σ). La forza elettrica \mathbf{E} — ricordiamolo — è nulla sul contorno σ , mentre la magnetica \mathbf{H} è tangenziale sul contorno stesso; invece la forza elettrica \mathbf{F} è tangenziale sopra σ , mentre la forza magnetica \mathbf{K} è ivi nulla.

Si ponga

$$\omega = \frac{4 \pi \lambda}{\epsilon},$$

dove al solito (nel sistema gaussiano di unità di misura) ϵ e λ designano, del mezzo (isotropo ed omogeneo in quiete) racchiuso dalla superficie sferica σ , rispettivamente la costante dielettrica e la conducibilità elettrica specifica.

Se poniamo, inoltre,

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \frac{e^{-\omega t}}{4 \pi} \text{grad} \int_{(s)} \alpha_0 \frac{ds}{r}$$

(con l'usuale significato della lettera r) e se denotiamo con \mathbf{H}^* il vettore che ha

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}^* &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} + \frac{4 \pi \lambda}{c} \mathbf{E}^* \\ \text{div } \mathbf{H}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{entro } s)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^* = 0 \quad (\text{sopra } \sigma)$$

rappresentando con t il tempo, con \mathbf{n} il solito vettore unitario orientato come la normale alla superficie σ e con α_0 l'iniziale distribuzione (a nostro arbitrio) della $\text{div } \mathbf{E}^*$ entro s , potremo, senza omettere il rilievo della

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

circostanza $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{E}^* = 0$ sopra σ , interpretare ⁽¹⁾ anche \mathbf{E}^* ed \mathbf{H}^* rispettivamente come forza elettrica e come forza magnetica di un campo elettromagnetico entro s . Ora, si scelga α_0 in modo che

$$\int_{(\cdot)} \alpha_0 \frac{ds}{r}$$

sia nullo all'esterno dello spazio s . La possibilità di cotesta scelta risulta nel così detto *problema dei corpi di attrazione (repulsione) nulla*; problema che (per quanto mi consta) fu studiato dal Pizzetti (1909-1910) ⁽²⁾, dal Lauricella (1911) ⁽³⁾, da me (1912) ⁽⁴⁾ e dal Mineo (1915) ⁽⁵⁾.

Con la predetta scelta per α_0 , segue l'annullamento di \mathbf{E}^* sopra σ . La coppia di vettori $(\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*)$ risponde allora alle proprietà volute.

Nei riguardi poi della costruzione di campi elettromagnetici aventi nullo sopra σ il campo magnetico ed ivi tangenziale il campo elettrico, basterà qui considerare il vettore \mathbf{F}^* definito (come forza elettrica) mediante

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{F}^* &= \alpha_0^* e^{-\omega t} \\ \text{rot } \mathbf{F}^* &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{entro } s)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{F}^* = 0 \quad (\text{sopra } \sigma)$$

denotando μ la permeabilità magnetica del mezzo racchiuso da σ , ed accoppiare \mathbf{F}^* con \mathbf{K} (forza magnetica nulla sopra σ), senza naturalmente che adesso vi sia bisogno di scegliere α_0^* nel modo superiormente veduto per α_0 .

Chimica. — *Prodotti di addizione tra anidride solforosa ed idrocarburi aromatici.* Nota II ⁽⁶⁾ di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO ⁽⁷⁾.

4) Sistema Etilbenzolo-Anidride solforosa ⁽⁸⁾.

Fino all'80 % di etilbenzolo non è possibile ottenere la cristallizzazione dei miscugli, e fino al 60 % i sopraraffreddamenti sono ancora tanto forti che impediscono di apprezzare con precisione l'eutettico.

(1) Vedasi la mia Nota dei « Comptes Rendus » (1° sem. 1924) *Sur la distribution du champ électromagnétique dans un milieu en repos*, p. 761.

(2) « Rend. della R. Accad. dei Lincei », 1° sem. 1909. — « Annali di matematica pura ed applicata », 1910.

(3) « Rend. della R. Accad. dei Lincei », 1° sem. 1911.

(4) « Rend. della R. Accad. dei Lincei », 2° sem. 1912.

(5) « Rend. della R. Accad. dei Lincei », 1° sem. 1915.

(6) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(7) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(8) Vedi questi « Rendiconti » (vol. IV, f. 10, p. 460).

TABELLA IV.

N.	Etilbenzolo %	SO ₂ %	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
1	100,00	—	— 93,0°	—
2	79,00	21,00	108,0	—
3	75,16	24,84	109,5	—
4	70,70	29,30	104,5	—
5	67,47	32,53	101,0	—
6	65,93	34,07	96,0	—
7	65,36	34,64	95,6	—
8	63,08	36,92	91,8	—
9	62,01	37,99	91,0	—
10	61,20	38,80	91,2	—
11	60,87	39,13	92,5	93,5°
12	59,20	48,80	92,8	93,4
13	59,50	41,41	90,0	93,0
14	56,17	43,83	88,5	93,0
15	55,45	44,55	88,0	93,0
16	55,04	44,96	87,0	—
17	53,71	46,29	83,2	—
18	50,61	39,39	81,8	—
19	49,20	50,80	80,0	—
20	47,70	52,30	79,6	—
21	45,50	54,50	79,8	—
22	44,94	55,06	78,5	—
23	44,00	56,00	80,0	82,5
24	43,25	56,75	82,2	—
25	41,00	59,00	81,8	82,0
26	39,50	60,50	81,0	82,0
27	37,30	62,70	80,0	82,5
28	36,60	63,64	79,7	82,0
29	31,60	68,40	78,7	82,0
30	30,32	69,68	78,2	82,2
31	27,58	72,42	77,5	82,0

N.	Etilbenzolo %	SO ₂ %	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
32	25,90	74,00	- 77,1°	82,2°
33	23,35	76,65	76,8	82,2
34	21,30	79,60	76,4	—
35	17,87	82,30	76,0	—
36	16,90	82,10	75,5	—
37	12,30	87,70	75,0	—
38	8,80	91,20	74,2	—
39	—	100,00	72,3	—

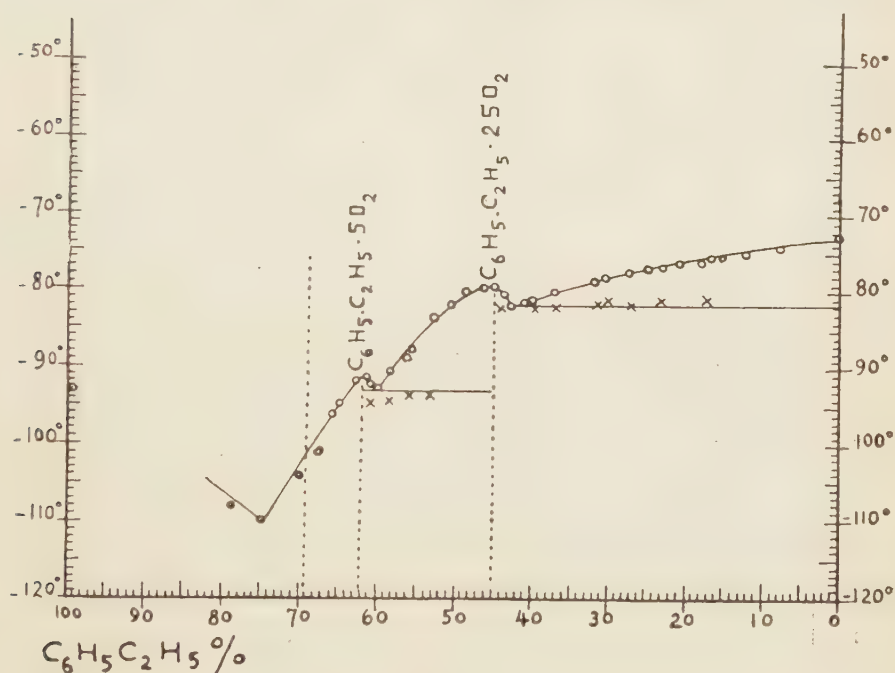
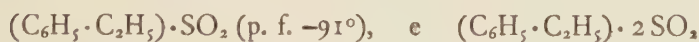


Fig. 4.

I composti sono due:



(p. f. $-78,5^\circ$). Dei due eutettici il primo a -93° (60 % SO₂) si osserva con difficoltà, mentre il secondo a $-82,5^\circ$ (42 % circa SO₂) è molto più evidente.

5) Sistema Cimene-Anidride solforosa.

La cristallizzazione dei miscugli comincia a compiersi in maniera abbastanza regolare solo a partire dal 70 % di idrocarburo.

TABELLA V.

N.	Cimene %	CO ₂ %	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
1	70,50	29,50	— 93,2°	—
2	69,00	31,00	90,0	—
3	67,26	32,74	89,0	—
4	64,20	35,80	89,8	91,2°
5	62,50	37,50	92,0	92,0
6	59,68	40,32	89,4	92,0
7	59,37	40,63	89,2	91,8
8	58,90	41,86	88,3	92,0
9	58,14	41,86	88,0	92,0
10	55,10	44,90	86,0	—
11	54,35	45,65	85,5	—
12	51,07	48,93	83,2	—
13	50,60	49,40	81,1	—
14	49,72	50,28	83,4	—
15	47,80	52,20	82,5	84,0
16	47,10	52,90	82,2	84,0
17	44,73	55,27	81,3	84,0
18	43,45	56,55	80,8	80,5
19	39,94	60,06	78,8	84,0
20	35,57	64,43	78,1	—
21	34,61	65,39	77,6	83,5
22	32,12	67,88	71,1	83,2
23	29,27	70,73	76,9	—
24	26,23	73,77	76,0	—
25	23,73	76,27	75,5	—
26	20,00	80,00	74,8	—
27	16,95	83,05	74,3	—
28	12,00	88,00	74,0	—

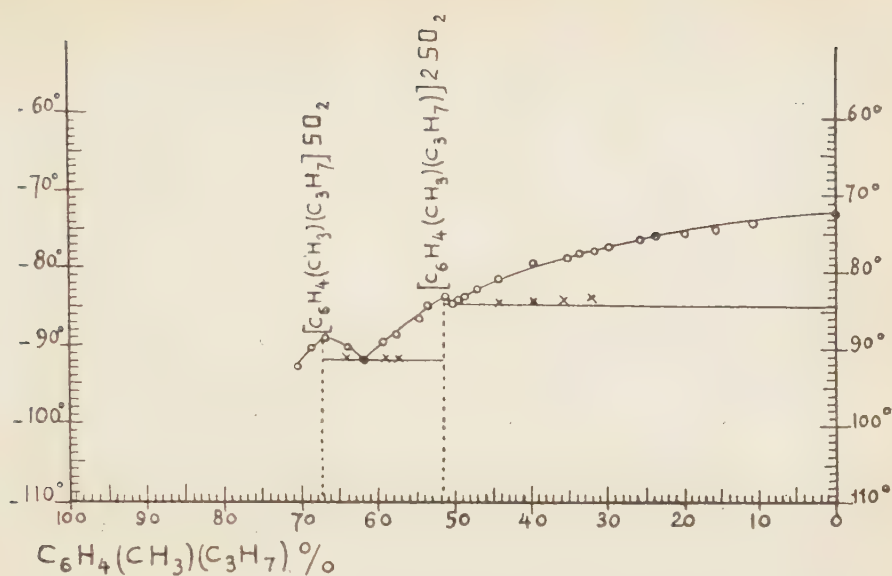


Fig. 5.

Dal diagramma risulta chiaramente la separazione di due composti: il primo contiene 67,67 % di cimene e corrisponde a $[C_6H_4(CH_3)(C_3H_7)] \cdot SO_2$. Esso fonde a -89° ; il secondo: $C_6H_4(CH_3)(C_3H_7) \cdot 2SO_2$ fonde a -83° e contiene il 51,17 % di idrocarburo.

6) Sistema Tetralina-Anidride Solforosa.

Per quanto lo studio delle miscele di tetralina ed SO_2 sia ostacolato da sopraraffreddamenti abbastanza forti, risulta ad ogni modo evidente l'esistenza di tre composti di addizione. Il primo contiene 68 % circa di tetralina e fonde a -58° ; il secondo: $(C_{10}H_{12}) \cdot 2SO_2$ ne contiene 50,7 % e fonde a $-66,2^\circ$; ed il terzo: $(C_{10}H_{12}) \cdot 3SO_2$ con 40,7 % di tetralina fonde a -70° .

Degli eutettici solo due sono stati osservati nettamente: uno a $-64,5^\circ$ e l'altro a $-76,5^\circ$.

TABELLA VI.

N.	Tetralina %	SO ₂ %	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
1	100,00	—	— 36,3°	—
2	93,40	6,60	42,3	—
3	92,30	7,70	45,3	—
4	87,90	12,10	53,3	—
5	82,40	17,60	61,8	64,0°
6	79,90	20,10	64,3	64,5
7	77,80	22,20	61,5	64,3
8	77,40	22,60	61,2	64,0
9	75,60	24,40	60,5	64,0
10	70,50	29,50	58,5	64,0
11	67,40	32,60	58,0	—
12	66,60	33,40	58,5	—
13	61,00	39,00	60,9	—
14	60,80	39,20	61,2	—
15	55,60	44,40	65,0	—
16	55,40	44,60	52,2	—
17	54,70	45,30	66,5	—
18	52,50	47,50	69,3	—
19	51,60	48,40	67,2	—
20	51,10	49,90	66,8	—
21	50,80	49,20	66,2	—
22	48,23	51,77	67,5	—
23	47,30	52,70	69,0	—
24	45,30	54,70	72,3	—
25	44,00	56,00	70,5	—
26	42,80	57,20	70,0	—
27	40,60	59,40	70,7	—
28	39,00	61,00	71,6	76,0
29	37,80	62,20	72,0	76,0
30	33,70	66,30	73,0	76,0
31	32,00	68,00	73,5	76,0

N.	Tetralina %	SO ₂ %	Inizio cristallizzazione	Fine cristallizzazione
32	29,60	70,40	— 74,0°	76,0°
33	28,20	71,80	75,0	76,0
34	26,20	73,80	75,5	—
35	24,20	75,80	76,5	—
36	22,12	77,80	75,0	76,0
37	19,50	80,50	74,5	—
38	15,70	84,30	73,6	76,0
39	8,30	91,70	73,0	—
40	—	100,00	72,3	—

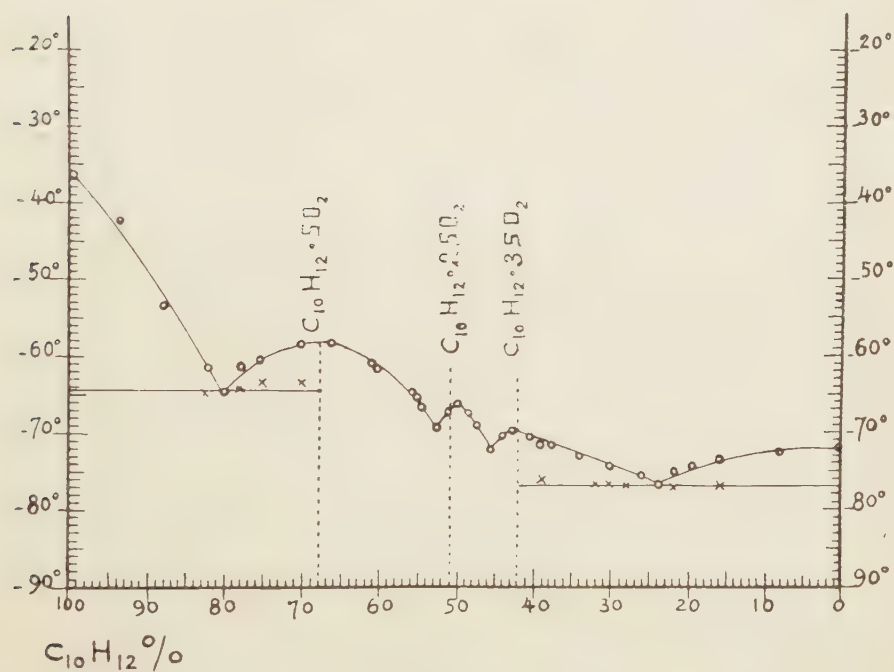
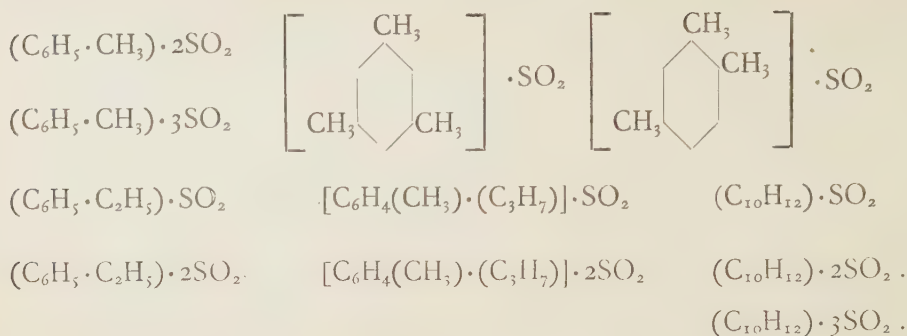


Fig. 6.

Queste esperienze mettono in evidenza la formazione dei seguenti composti di addizione:



Chimica. — *Il modello di Bohr e la pretesa colorazione degli joni.*
 Nota di G. MAGNANINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. NASINI.

In questa comunicazione viene fatta osservare brevemente una evidente contraddizione che si può verificare tra le conseguenze della teoria di Bohr sulla costituzione degli atomi, e le esperienze da me eseguite da molti anni, comunicate in parte a questa Accademia e riassunte a suo tempo nella « Gazzetta Chimica » ⁽²⁾. Quelle esperienze, coordinate colla teoria di Arrhenius, allora dominante, della graduale e progressiva dissociazione degli elettroliti, avevano condotto a negare la colorazione degli joni, ipotesi a quei tempi, pretesa ed ammessa quasi universalmente. E, se malgrado le esaurienti dimostrazioni tanto di natura fisica, e dirette, come di natura chimica, riguardanti particolarmente il comportamento desmotropico di alcune sostanze colorate (indicatori), oggi, la colorazione degli joni viene ancora ammessa, da qualche cultore, anche illustre, di Chimica Fisica; e ciò si deve attribuire prima di tutto forse al modo molto diverso col quale tale colorazione viene compresa in confronto di allora, ed anche alla tendenza prevalente presso qualche studioso, di considerare a torto i problemi della chimica, piuttosto dal lato fisico che da quello chimico.

Pertanto, poichè secondo la teoria di Bohr ⁽³⁾, il numero atomico degli elementi dipende dalle cariche non neutralizzate del nucleo, dalle quali dipende il numero degli elettroni negativi delle orbite; e poichè si deve intendere per ionizzazione un profondo cambiamento, nel quale si trasporta

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) Vol. XLI, parte II, p. 425.

(3) Lo stesso vale naturalmente per qualunque altro tipo di atomo per il quale si supponga che nella ionizzazione vi sia mutamento nel numero di elettroni.

l'elettrone completamente fuori della sua orbita portandolo all'infinito, si comprende, che: le modificazioni che debbono intervenire nella intima struttura delle sostanze allo stato disperso, per il fatto della loro ionizzazione, sono tali da modificarne necessariamente e profondamente anche lo spettro.

Si osserva infatti che i gas presentano differente spettro di linee secondo che sono o non sono ionizzati, inoltre: per i metalli alcalini, per esempio, e per quelli alcalino-terrosi, si osservano spettri differenti secondo che tali metalli vengono osservati alla fiamma, ovvero sotto l'azione delle scintille; còsicchè, sotto l'azione di queste ultime, i loro spettri vengono modificati in modo da presentare somiglianza di forma con quelli degli elementi vicini di sinistra, nel sistema di classificazione generale (Kossel e Sommerfed). Si ritiene che sotto l'azione delle scintille venga provocata la ionizzazione dei vapori di quei metalli, cioè la eliminazione di un elettrone, fatto a cui si dovrebbe attribuire l'analogo e costante cambiamento dello spettro.

Prendendo a considerare il caso delle soluzioni acquose di elettroliti colorati nelle quali avvenga spontanea la formazione degli joni per il fatto della dissociazione delle molecole, è evidente quale profondo mutamento di colorazione si dovrebbe osservare.

Invece, come dimostrarai con esperienze dirette, e deduzioni fatte in base alla teoria di Arrhenius:

LA PARTE DISSOCIATA HA COSTANTEMENTE L'IDENTICO SPETTRO DI ASSORBIMENTO DI QUELLA NON DISSOCIATA.

Per gli elettroliti colorati pertanto, le conseguenze che dovrebbero verificarsi dalla teoria di Arrhenius colla teoria di Bohr, non si verificano, perchè la loro ionizzazione non induce cambiamenti anche solo quantitativi del loro assorbimento.

Per conseguenza:

O la dissociazione elettrolitica è un procedimento spontaneo che nulla ha in comune colla dissociazione vera e propria, ciò che io ho sempre ritenuto, ed allora si deve modificare la teoria di tale dissociazione.

Ovvero le spiegazioni che si sono fatte intorno alla intima costituzione della materia, colla teoria di Bohr, non corrispondono alla realtà, ed allora si deve modificare tale teoria.

Si può dire che la Chimica Fisica attuale si è andata orientando verso il primo modo di interpretazione, dopochè per gli studi di Sutherland (1907) e di Bjerrum (1909), si sono considerati gli elettroliti forti come in pratica completamente dissociati, riconoscendosi che i valori delle dissociazioni di essi, dedotti dalle conducibilità elettriche e dai punti di congelamento, non sono che *apparenti*.

Milner (1912 e 1913) ha fatto vedere che in conseguenza delle cariche elettriche degli joni le pressioni osmotiche di un elettrolito completamente dissociato crescono più lentamente delle concentrazioni.

In ulteriori studi, Bjerrum (1918), è arrivato alla conclusione, che i gradi di dissociazione stabiliti da Arrhenius non possono essere più accettati per veri. Cosicchè una discussione riguardante la costituzione degli elettroliti ha portato a questa conclusione, che: *la legge delle masse non può essere applicata agli elettroliti forti.*

Aggiungeremo che questo orientamento della Chimica Fisica ha trovato brillante conferma nei recentissimi studi di Debye e Hückel (1923-1925).

Ma poichè siamo nell'argomento mi permetto di ricordare che fino dal 1894⁽¹⁾ occupandomi della questione della colorazione degli joni, dopo di aver osservato che solo il passaggio da un grado di ossidazione ad un altro induce negli elettroliti cambiamento di colore, facevo notare che non erano applicabili a tali fenomeni i ragionamenti valevoli per la dissociazione ordinaria, essendo la dissociazione elettrolitica troppo differente e di *natura completamente sconosciuta*. E successivamente nel 1911⁽²⁾ insistendo ancora sulla profonda differenza fra le due forme di dissociazione, esprimevo: *grave il dubbio se si dovesse nei riguardi della dissociazione elettrolitica riconoscere piuttosto l'utilità dello schema di essa che la sua realtà.*

Ed oggi, in cui tante osservazioni sono state fatte intorno all'oscuro problema, tutto ciò che è qui contenuto fa vedere quale campo di curiosità possa ancora presentare lo studio degli elettroliti colorati per la conoscenza della costituzione di tali composti, e quanto studio ancora debba essere compiuto per arrivare ad una concezione che possa dirsi completamente chiara e soddisfacente e possa dare intorno al significato della parola: *colorazione degli joni*, una convincente risposta.

Chimica. — *Borati anidri d'argento, bario e zinco.* Nota di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sopra una dimostrazione di interdipendenza fra le leggi di Curie e di Haiiy.* Nota di A. BARTORELLI, presentata dal Corrisp. G. D'ACHIARDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Gazzetta Chimica », XIX, I, p. 55.

(2) « Gazzetta Chimica », XLI, II, p. 428.

Biologia. — *Le « gemme estivanti » e la biologia dei cespugli di Clavelina lepadiformis (Müller).* Nota di M. SALFI, presentata dal Socio A. DELLA VALLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Su alcuni fenomeni che accompagnano la crisi di maturazione sessuale delle Gambusie.* Nota di E. REMOTTI, presentata dal Socio E. GIACOMINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idrobiologia. — *Ricerche sulle variazioni stagionali dei composti inorganici di azoto esistenti nel lago di Castalgandolfo.* Nota della dott. S. CAMPANILE, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale. — *La forma a bacteroide e l'immunità nelle leguminose* ⁽¹⁾. Nota preventiva del dott. C. CAPPELLETTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio O. MATTIROLO.

In una Nota sul tema « Reazioni immunitarie nei tubercoli radicali di leguminose » ⁽³⁾, dimostrai come sia possibile ottenere in vitro delle reazioni immunitarie del tipo delle agglutinazioni usando estratti di tubercoli radicali su emulsioni di germi specifici. Ma per indagare più minutamente il processo intimo di reazione umorale, studiai la questione anche morfologicamente nei tessuti invasi dai germi, per stabilire le correlazioni esistenti nei due ordini di fenomeni. Come tipo descriverò brevemente il processo d'infezione ed il successivo svilupparsi del tubercolo in *Pisum sativum*.

I germi attaccano i peli radicali poco dopo la germinazione del seme,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta de 21 novembre 1926.

(3) C. CAPPELLETTI, *Reazioni immunitarie*, ecc. « Annali di Botanica » di Roma, vol. XVI, fasc. 2, 1924.

quando la piantina si trova in uno stato fisiologico altamente recettivo alle infezioni, mentre più tardi (come ebbi occasione di osservare più volte) lo stato di recettività va gradatamente diminuendo. Dal pelo radicale il germe, per una serie di rapide segmentazioni va a costituire un filamento, una colonia di germi mucosi (filamento pseudomiceliare) che si fa strada attraverso gli strati corticali della radice fino a raggiungere il periciclo dal quale si originerà tutto il tubercolo. La penetrazione del filamento pseudomiceliare nell'interno della cellula della pianta ospite, è seguita dalla rapida scomparsa della glea mucosa dei germi, e dal loro disperdersi nel plasma durante il corso della loro moltiplicazione, forse facilitati in questo dalla circolazione plasmatica. Alla penetrazione seguè un rapido ingrandirsi del volume cellulare, ed il nucleo subisce una notevole ipertrofia, i nucleoli si fanno spesse volte enormi, il nucleoplasma si fa denso e più o meno omogeneo per assumere più tardi una struttura spugnosa-reticolata con granuli di cromatina sparsi fra le maglie. Il nucleo però non viene mai invaso dai germi, e si osserva che è appunto al suo contatto che il filamento mucoso si dissolve nei germi componenti. In questa prima fase di invasione tutti i germi di tutte le leguminose studiate hanno la forma di bastoncini allungati o più o meno cocciformi, mai si osservano forme batteroidi ad x o y oppure forme arborescenti. Nel pisello la fase suddetta è riconoscibile anche dalla forma esterna dei tubercoli, sferoidali, bianchi, provvisti nel loro interno di forti quantità di muco. A questa prima fase segue subito dopo una fase che non è stata assolutamente presa in esame dagli autori che si sono occupati dell'argomento e che è contraddistinta da una forma transitoria dei germi simbiotici, fase che denominerò *prebacteroide*. In essa i germi che in precedenza avevano la forma di corti bastoncini regolari, vanno ingrossandosi in tutta la loro massa, specialmente nel senso della larghezza, ed in certe condizioni assumono una forma che ricorda quella dei saccaromiceti. Altri invece presentano una delle loro estremità, o tutte e due, leggermente ingrossate con un accenno alla biforcazione ed è facilmente riconoscibile la forma a bacteroide che va delineandosi con rapidità. La fase *prebacteroide* è contraddistinta dunque da una ipertrofia notevolissima del corpo dei germi, ipertrofia che in seguito scompare per assumere il germe la forma bacteroide vera. È facile trovare questa forma nei tubercoli giovani specialmente del pisello nei quali il così detto parenchima bacterico incominci ad assumere colore cenerognolo. La colorabilità dei germi ipertrofici è buona ed abbastanza omogenea su tutto il loro corpo. Il germe dopo questa fase ipertrofica va rapidamente evolvendo al tipo bacteroide, ed ho potuto osservare delle fasi intermedie nelle quali l'ingrossamento del corpo del germe si era di molto ridotto, mentre le estremità si erano biforcute ad y .

Il germe arrivato alla forma bacteroide presenta all'estremità di ogni sua terminazione degli addensamenti a forma più o meno sferica. Fissato

il materiale con i classici fissatori acidi, e colorato con vari coloranti di tipo nucleare, i germi presentano i corpi su riferiti fortemente colorati. Senza voler senz'altro identificare queste formazioni con veri nuclei, è interessante constatare la formazione di corpi condensati dal passaggio dalla forma a bastoncino alla batteroide.

Considerando il comportamento reciproco della cellula invasa dal germe, e del germe invasore, possiamo fissare alcuni dati di fatto:

a) Il germe invade la cellula che si ingrossa, come pure il nucleo, presentando uno o più nucleoli, nucleoplasma denso e granuloso; i germi hanno forma a bastoncino con glea mucosa.

b) Nella seconda fase la cellula rimane pressochè invariata, mentre i germi si modificano ipertrofizzandosi e passando per fasi intermedie fino alla batteroide.

Si tratta di due fenomeni conseguenti l'uno all'altro in cui la reazione della cellula ospite è più pronta che non quella del germe verso l'altro simbionte.

Se a lato dell'esame morfologico dei tubercoli facciamo quello sierologico, studiando la presenza di anticorpi del tipo delle agglutinine nei materiali dianzi descritti, noi possiamo constatare come diano risultati negativi tutte le prove istituite con succhi ottenuti per pressione da tubercoli radicali molto giovani. I risultati positivi si hanno invece con i tubercoli più grossi, quando la pianta si avvicina alla fioritura⁽¹⁾. Non si può da questa concordanza di fatti non vedere lo stretto rapporto fra la *presenza degli anticorpi e la comparsa della forma a batteroide*.

Estendendo le ricerche ad altre piante, per vedere se i fenomeni osservati nel tipo *Pisum* trovassero ivi riscontro in un identico comportamento, fissai la mia attenzione sul gen. *Phaseolus*, provvisto come è noto di grossi e numerosissimi tubercoli radicali. La differenza però più spiccata che si può osservare in questi tubercoli, è l'assoluta *mancanza* in essi di germi aventi forma batteroide. La forma a bastoncino è la sola reperibile, sia nei tubercoli giovani, sia in quelli adulti e sotto tale forma i germi vengono dispersi nel terreno col disfacimento del tubercolo. Anche *Robinia Pseudacacia* non presenta mai germi a forma batteroide, ma in prevalenza germi cocciformi. Con la solita tecnica operai l'estrazione di succhi da tubercoli di fagiolo, ripetendo i saggi a varie riprese con piante di diversa età. Gli stipiti sui quali feci agire i succhi provenivano in parte da isolamenti fatti da me con materiali indigeni, in parte anche ottenuti dal « Centralbureau für Schimmelcolturen » di Baarn. Tutte le esperienze fatte, mi diedero costantemente risultati negativi, tanto sui germi di fagiolo, quindi reazione specifica,

(1) Non sempre si hanno in queste condizioni risultati nettamente positivi, ma per questo intervengono altre cause turbatrici che si spiegano con la specificità della colonia impiegata nelle prove. Per brevità non riporto dati di protocollo.

quanto su germi aspecifici di *Pisello*, *Robinia*, *Medicago*. Risultati parimenti negativi mi diedero le prove fatte con piante appena in fiore, e con piante in via di fruttificazione.

I processi di infezione non offrono nulla di anormale dallo schema dato per *Pisum*, mentre profondamente diversa è la reazione del nucleo della cellula invasa. Il nucleo si ingrossa poco, e si arresta ad una fase reticolare povera di cromatina; il nucleolo va gradatamente riducendosi fino a scomparire del tutto. Si ha in questo caso una reazione negativa quasi passiva contrassegnata da un progressivo rallentamento dell'attività nucleare accompagnata dalla mancanza completa di tutti quei fenomeni osservati nei germi di *Pisum*, i quali attraverso ad una serie di fasi preparatorie davano luogo alla forma batteroide. Tale forma considerata dunque alla luce dei nuovi dati forniti dalle reazioni umorali, ci si presenta non più (come si legge ancora in moderni trattati) come una forma anormale, ma bensì come una *forma reattiva* del germe contro gli anticorpi prodotti dalla cellula ospite. Forma reattiva tipica poichè è appunto con la comparsa di essa che coincide la comparsa delle agglutinine, tanto che si può dire essere la forma batteroide indice dell'avvenuta reazione umorale. Aggiungo inoltre che la forma batteroide ha praticamente perduta ogni capacità moltiplicativa. Un'osservazione di Dangeard porta delle prove in favore della mia interpretazione; questo autore osservò in tubercoli di *Trifolium pratense* dei larghi spazi intercellulari ove i batteri si erano sviluppati molto abbondantemente, ma senza subire alcuna modificazione di forma, conservando quella originale a bastoncino. Evidentemente i germi che negli spazi intercellulari erano sottratti agli anticorpi crescevano a guisa di saprofiti senza subire le modificazioni proprie ai germi contenuti nel plasma. Questo fatto ribadisce ancora il concetto da me svolto, circa la stretta limitazione degli anticorpi alle cellule infettate, e la mancanza di migrazioni in altre parti della pianta, a differenza di quanto si osserva in generale per gli animali.

Ricercando però quali siano le piante che come il fagiolo non hanno dato la reazione immunitaria tipica, noi vediamo che insieme al fagiolo dobbiamo elencare la Robinia, e forse altre specie, piante *non indigene*, ma tutte di provenienza esotica. Due ipotesi si possono fare per interpretare il diverso comportamento dei due tipi di leguminose alle quali ho accennato:

a) che l'infezione sia avvenuta con germi non specifici per la pianta, ma bensì con forme simili, germi vicarianti con gli specifici, di modo che la pianta non presenta reazioni umorali così complete come avrebbe con il germe specifico della patria d'origine; reazioni incomplete che non porterebbero d'altra parte alle corrispondenti reazioni morfologiche che conducono al batteroide. Sarebbe interessante studiare i tubercoli propri alla specie nella patria d'origine, per controllare se l'ipotesi ora prospettata corrisponda alla realtà dei fatti. È noto, del resto, come altre specie acclimatate fuori della normale area di distribuzione presentino gravi ostacoli

alla formazione dei tubercoli. Non mi sembra quindi difficile l'ammettere come il fagiolo possa essersi adattato a germi non strettamente specifici, e quindi a ciclo biologico non corrispondente a quello delle altre leguminose spontanee.

b) Una seconda ipotesi potrebbe farsi nel senso che, analogamente a quanto si verifica nella simbiosi micotrofica delle orchidee, l'intensità di azione e di reazione di entrambi gli organismi possa presentare gradi differenti anche nelle diverse specie della famiglia delle leguminose.

Il controllo delle due ipotesi non può essere fatto che con ricerche molto estese che mi propongo di condurre.

Per ora si può affermare: che la forma batteroide rappresenta una *fase reattiva* contro gli anticorpi prodotti dalla cellula ospite, fase questa raggiunta attraverso una serie di modificazioni morfologiche finora non studiate.

Gli anticorpi del tipo delle agglutinine si presentano solo quando i germi sono arrivati alla fase batteroide.

Nel tipo *Phaseolus* (comprendente anche *Robinia*, ed altre piante), nel quale non si ha la fase batteroide, non sono presenti mai anticorpi reperibili in vitro.

PERSONALE ACCADEMICO

Dopo lettura e approvazione del verbale della seduta precedente, il Presidente comunica una lettera del Corrisp. BLANC il quale scusa la sua assenza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio HAGEN fa omaggio del Catalogo Astrografico 1900.0 della Sezione Vaticana.

L'Accademico Segretario aggiunto PARRAVANO presenta le pubblicazioni giunte in dono all'Accademia segnalando quelle dei Soci G. FANO e F. SILVESTRI, di W. H. WRIGHT, il terzo volume dell'edizione nazionale « Le Opere di A. Volta » ed il numero speciale del Quinto Congresso di Chimica industriale di Parigi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 dicembre 1926.

- ERLESE A. — Per la lotta contro la mosca delle olive (*Dacus Oleae* Rossi). (Estr. dal « Redia ». Vol. XVI, pp. 111-125). Firenze, 1926. 8°.
- Comptes Rendus du cinquième Congrès de Chimie industrielle (Paris 4-11 oct. 1925) (« Chimie et industrie ». Vol. XVI, N. 3 bis). Paris, 1926. 4°, p. 1-730.
- Comptes Rendus du Congrès international des mathématiciens (Strasbourg, 22-30 sept. 1920). Toulouse, 1921. 4°, pp. 1-470.
- FANO G. — Lezioni di geometria descrittiva date nel R. Politecnico di Torino. Torino, 1926. 8°, pp. 1-XIX, 1-461.
- INALDI G. — Sulla erroneità del secondo principio della termodinamica (Estr. dal Giornale «l'Elettricista». Anno XXXV). Roma, 1926. 8°, pp. 1-31.
- KAMATSU S. — Mitsuru Kuhara's on the Beckmann Rearrangement. Kyoto, 1926. 8°, pp. 1-83.
- SILVESTRI F. — Descrizione di due nuovi generi di Coleotteri mirmecofili dell'Estremo Oriente. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XIX, pp. 261-268). Portici, 1926. 8°.
- TIMPANARO S. — Deduzione della formola di Cardani (Estr. da « Il Nuovo Cimento ». Anno III, N. IV). Pisa, 1926. 8°, pp. 1-5.
- VOLTA A. — Opere. Edizione nazionale. Vol. III. Milano, 1926. 4°, pp. 1-XVI, 1-377.
- WRIGHT W. H. — The spectrum of Nova Geminorum (1912). (From the « Publications of the Lick Observatory ». Vol. XIV, Part. II, pp. 27-91). Berkeley, 1926. 4°.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 dicembre 1926.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Biologia matematica. — *Sulle fluttuazioni biologiche.* Nota del Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *La trasmutazione degli elementi.* Nota di E. PATERNO⁽¹⁾.

Come è noto, W. Ramsay nel 1906, credette di avere ottenuto il litio per l'azione dell'emanazione sul solfato di rame, ma dovette subito ricredersi perchè il litio era contenuto appunto nel solfato di rame da lui adoperato. Ancora una volta dunque fu provato che la sperata trasmutazione di un elemento in un altro, era la conseguenza di un errore, sperimentale. E chi ha vaghezza di avere migliore cognizione di questo errore nel quale Ramsay era caduto, non ha che a leggere le lettere da lui scritte al nostro Cannizzaro il 31 luglio, il 2 agosto 1906 ed il 5 maggio 1907⁽²⁾.

Era da presumere che quanto era occorso al Ramsay, e ad altri prima di lui, dovesse servire di ammonimento ai futuri. Ma così non è avvenuto, e qualche anno addietro è stata annunciata la trasmutazione del mercurio in oro, e molti uomini di scienza l'hanno creduta e degli industriali hanno fatto brevettare il processo.

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) S. CANNIZZARO, *Scritti vari e lettere inedite*, pubblicate per cura dell'Associazione di Chimica pura ed applicata, nel centenario della nascita.

Oggi è la volta della trasformazione dell'idrogeno in elio ⁽¹⁾.

Come non mi sembrò attendibile la scoperta del Ramsay, della quale ebbi cognizione appena ne scrisse al Cannizzaro, e come non mi sembrò seria quella della mutazione del mercurio in oro, così vorrei dire che ho la certezza che quella della mutazione dell'idrogeno in elio avrà la medesima sorte delle precedenti.

Perchè gli autori non hanno provato se, nelle stesse condizioni in cui essi hanno operato, sostituendo all'idrogeno un altro gas (l'azoto, l'argo, ecc.), si avevano gli stessi risultati? Così solo poteva cominciare ad acquistare un certo grado di probabilità la supposizione che l'idrogeno intervenisse nella generazione dell'elio.

Allo stato delle cose, dopo 20 anni, resto sempre dell'opinione manifestata nel discorso letto pochi mesi prima dell'affermazione del Ramsay, al VI Congresso Internazionale di Chimica applicata tenuto in Roma nel 1906, il 26 aprile dello stesso anno. Dissi allora:

«Ed anche la chimera antica della trasmutabilità dei metalli, sembra che, sotto nuova forma e più concreta, voglia tornare ad agitare l'irrequieto spirito dell'uomo. Quando sorse la nuova chimica, fondata sulla nozione dei corpi semplici e sulla costituzione atomica della materia, la trasmutabilità dei metalli fu considerata, ed era infatti, incompatibile con il concetto dell'atomo ed il problema che fu il sogno degli alchimisti, sembrò tanto assurdo quanto quello del moto perpetuo e della quadratura del circolo. Ma ben presto al concetto dell'atomo indivisibile e sostanzialmente diverso pei vari corpi semplici, andò sostituendosi quello dell'unità della materia; e già il Faraday nel 1816 discutendo di un quarto stato della materia più attenuato del gassoso, fra i problemi di cui si attendeva la soluzione dalla chimica, metteva quello della realizzazione dell'idea della scomposizione e ricomposizione dei metalli. Esaminando i progressi delle teorie chimiche e fisiche negli ultimi anni, può giustificarsi il pensiero che l'illusione e la speranza degli alchimisti possa diventare cosa reale e viva. La teoria degli elettroni, così seducente, e che tanti fenomeni spiega in modo mirabile, ha bandito dalla scienza il dogma della invariabilità dell'atomo chimico. Anche dal lato sperimentale il problema è stato affrontato, negli ultimi anni, e se riuscì facile dimostrare erronea la trasformazione del fosforo in arsenico, resta sempre, raggio luminoso di vivida speranza, la trasformazione del radio e di altri corpi in elio.

Il problema è quindi nuovamente posto alla discussione ed alla ricerca, e non si tratta più di un desiderio vago, di un sogno di menti esaltate, non è più sete di oro che lo vivifica, ma ha fondamento sopra principi scientifici solidamente basati. È bensì vero che, anche ammessa l'unità della materia, con la teoria sviluppata da Lord Kelvin, che gli atomi debbono

(1) F. PANETH e K. PETERS, «Berichte», vol. 59, p. 2039, settembre 1926.

considerarsi come piccoli vortici formati nel fluido unico, e con la dimostrazione matematica dell'Helmholtz che questi vortici, una volta formati, in certe condizioni, debbono rimanere eternamente costituiti dalle stesse particelle, può conciliarsi il concetto dell'unità della materia con quello della immutabilità dell'atomo chimico; ma il problema ha così grande attrattiva e la sua soluzione porterebbe a sconvolgimento così profondo nella vita economica ed industriale del mondo, quanto nessun altro mai. Generare un corpo semplice da un altro, indipendentemente dalla trasformazione di un metallo vile in nobile, significa rompere ogni limite al campo in cui, la esistenza di quantità determinata dei vari elementi, costringe oggi l'attività dell'uomo, e significa rendere inesauribile la potenza produttrice delle nostre officine, anche perchè dalla trasformazione di un corpo semplice in un altro, alla produzione artificiale di corpi nuovi con proprietà volute, il passo non sarebbe tanto grande.

Esso è adunque il maggiore dei problemi della chimica applicata, ed è insieme problema elevatissimo di filosofia naturale. Consentite adunque che intorno ad esso mi soffermi per un istante.

È fatto, non è ipotesi, che gli innumerevoli corpi che finora sono stati studiati, abbandonando anche la distinzione di composti definiti e di miscugli, possono risolversi in pochi corpi indecomponibili, dalla cui unione nascono tutti gli altri. Questi corpi elementari, che sono gli stessi che si rinvencono nel sole e negli astri, è oggi generalmente ammesso che siano formati dalla medesima materia primordiale, da elettroni variamente condensati come il risultato della condensazione di materia ancora più attenuata.

Ora, non mi sembra strana l'ipotesi che dall'etere sparso per lo spazio infinito in massa omogenea, col volgere di un tempo che non può computarsi nè ad anni, nè a secoli e come risultato di quella legge universale dell'instabilità dell'omogeneo, per la quale tutto va progressivamente aggregandosi, si sia parzialmente la materia riunita o condensata in elettroni, e che questi alla loro volta abbiano formato gli atomi dei vari elementi, per un processo di evoluzione lentissimo da paragonarsi alla serie lentissima di fenomeni, avvenuti in epoca successiva sulla terra, per effetto dei quali dalla materia inerte si è passato alla materia organizzata e da questa alla specie. Gli studi sulla origine della specie debbono servirci di guida per spiegare la genesi degli elementi. Come dal protoplasma, si è formata la cellula e da questa l'individuo organico, così dall'etere si son potuti formare gli elettroni, e da questi gli atomi.

Se noi consideriamo gli atomi come il prodotto di evoluzione della materia primordiale, non potremo certamente negare che essi possono ulteriormente evolversi; ma ciò sarà col tempo infinito, mentre fintantochè la terra ove viviamo resterà quello che è, essi dovranno rimanere quello che sono. Il supporre la trasmutabilità di un corpo semplice e però di un atomo in un altro, agli occhi nostri si presenta come un problema della stessa

natura di quello della possibilità della trasformazione di un animale o di un seme in un altro, solo perchè tutti gli animali e tutte le piante sono formati dagli stessi elementi essenziali. Così il concetto dell'unità della materia, l'ipotesi che gli elettroni siano elementi costitutivi dell'edificio atomico, non conduce necessariamente alla conseguenza della possibilità della loro reciproca trasformazione. Gli atomi e i corpi semplici debbono invece considerarsi come il risultato di un processo evolutivo della materia primordiale, come le specie animali e vegetali sono il risultato della evoluzione del protoplasma e delle cellule primitive. Esaminando adunque con largo concetto il problema della trasmutabilità dei corpi, e senza bisogno di accettare l'ipotesi di vortici eternamente immutabili possiamo con gli stessi criteri dell'origine delle specie, concludere che esso è indipendente dall'uomo e che la sua soluzione non possiamo attendere da studi per quanto perseveranti dei nostri laboratori e delle nostre officine. Nel tempo infinito e nella infinita mutabilità delle cose nulla poi deve dirsi impossibile ».

Ed oggi non ho nulla da variare a quello che dissi venti anni or sono. Posso però aggiungere che il mio modo di vedere non esclude che fra gli atomi di uno stesso elemento possano notarsi delle differenze, come differenze esistono fra le varietà di una stessa specie animale o vegetale, e come nelle medesime varietà di una specie possono aversi dei tipi selezionati.

A coloro poi che si occupano di questi argomenti, raccomando di non dimenticare, fra tanti insegnamenti del passato, la storia del flogisto e della forza vitale, e le polemiche sulla generazione spontanea.

Chimica fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool.* Il contenuto dell'alcool nel sangue (alcoolemia) dell'uomo a digiuno in seguito ad ingestione di bevande alcoliche. Nota I del Corrispondente S. BAGLIONI e dei dott.^{ri} L. BRACALONI e A. GALAMINI ⁽¹⁾.

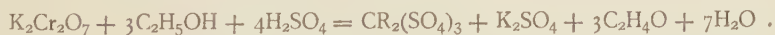
Numerosi autori, dal Ford (1859) ⁽²⁾ al Grèhant (1896), allo Schweissheimer (1913), al Gabbe (1917), al Widmark (1922), hanno ricercato l'alcool nel sangue e nei tessuti dell'organismo. Grèhant somministrò a cani volumi di alcool assoluto varianti da 1 cc. a 10 per kg. di peso disciolti in acqua nella proporzione di 10 ‰. Fece poi la ricerca dell'alcool in 5-10 cc. di sangue a cominciare dalla prima mezz'ora dall'ingestione della sostanza e ad intervalli di mezz'ora. Osservò che, dopo l'ingestione di 1 cc. di alcool assoluto per kg. di peso, il contenuto dell'alcool del sangue raggiunse il massimo, 0.09 cc., entro 15'; 5 cc. di alcool assoluto per kg. di peso fecero entro mezz'ora salire la percentuale dell'alcool nel sangue a 0.4 cc. Questa concentrazione si mantenne per circa 5 ore. In un lavoro successivo il Grèhant osservò che dopo l'ingestione di 1 cc. di alcool assoluto per kg. di peso, la sostanza scomparve dal sangue soltanto dopo 7 ore, e che ne furono necessarie 20 se l'alcool ingerito fu di 5 cc. per kg. di peso.

Schweissheimer trovò che il valore normale dell'alcool nel sangue dell'uomo è di 0.00368 per mille. Somministrando cc. 1.57 di alcool assoluto per kg. di peso nell'uomo vide che la sostanza ingerita passa come tale nel sangue, ove raggiunge una percentuale maggiore negli ubbriachi.

La maggiore concentrazione si ottiene nei non bevitori, nei quali il periodo di massima concentrazione è di circa 3 ore: nei bevitori la massima concentrazione è raggiunta prima e dura circa 2 ore. In questi l'eliminazione dell'alcool si protrae per circa 7 ore e mezza, metà circa del tempo impiegato dai non bevitori.

Il Gabbe, iniettando nell'uomo alcool in proporzione di gr. 0.3 per kg. trovò che il contenuto del sangue in alcool può ascendere a 0.7-1.4 ‰; esso poi rapidamente decresce fino a scomparire dopo 60'-90'.

La ricerca dell'alcool fu fatta dai diversi autori basandosi o sulle proprietà fisiche di esso (refrattometro) o, più spesso, su quelle chimiche. Si è spesso utilizzata la riduzione, operata dall'alcool, della soluzione di bicromato di potassio, secondo l'equazione:



(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) Per i dati bibliografici vedi Nota II.

Di questa reazione si servì il Widmark per elaborare il suo micrometodo (1), che, nelle nostre ricerche, fu modificato nel fatto che il prelevamento del sangue invece che ponderalmente avveniva volumetricamente con una pipetta di 0.1 cc., colla quale si aspirava il sangue dal polpastrello del dito punto colla lancetta di Frank.

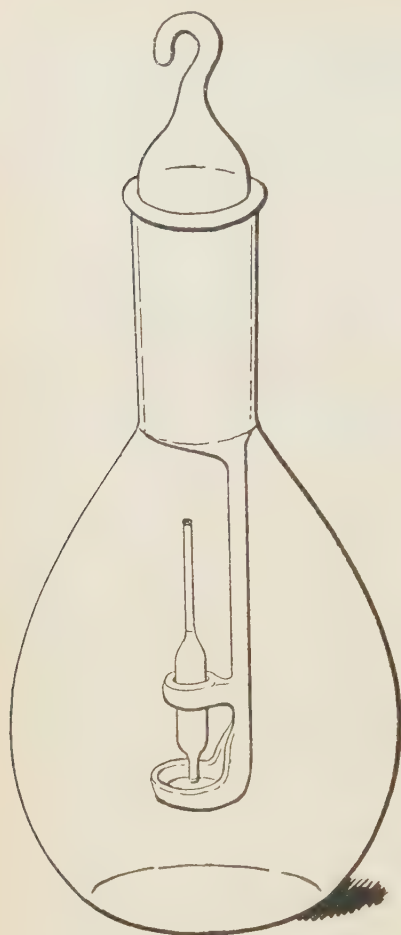


Fig. 1. — Apparecchio di vetro per la determinazione dell'alcool del sangue. Gr. nat.

L'apparecchio, simile a quello di Widmark (fig. 1), è formato da un matraccio di 50 cc. con collo di 3 cm. di lunghezza, chiuso a tenuta perfetta con tappo smerigliato a introduzione conica. Questo tappo porta inferiormente uno stelo verticale, terminante a 1 cm. dal fondo del matraccio con un piccolo recipiente della capacità di 300-400 mmc. Il bordo del piccolo recipiente si attacca allo stelo mediante due ali limitanti una gola assai profonda. Poco al disotto della metà dello stelo è saldato un piccolo anello di vetro, al quale è assicurata la micro-pipetta tarata, la cui estremità inferiore termina 2 mm. al disopra del fondo del piccolo recipiente. La micro-pipetta, che ha uno svasamento ovale allungato, può vuotarsi rapidamente e completamente nel recipiente sottostante.

Per misurare la soluzione di bicromato, 1 cc., da versare in ciascun matraccio si usò una micro-buretta graduata all'1 : 100, munita di grossi rubinetti a tenuta perfetta: una bolla di vetro, all'estremità superiore della buretta, impediva il minimo possibile contatto della soluzione con l'esterno.

Determinazioni successive, eseguite anche a distanza di tempo, hanno dimostrato che la soluzione di bicromato, rimanendo nella buretta, non subisce alterazioni sensibili e che la misurazione della soluzione stessa riesce facile e precisa. È bene compiere ogni prelevamento impiegando sempre lo stesso tempo, un minuto e mezzo-due, senza agitare la buretta.

Ecco il risultato di alcune determinazioni :

	cc. di tiosolfato di sodio $\frac{N}{200}$ usati			
1 cc. $K_2Cr_2O_7 \frac{N}{100}$	2.03	2.04	2.05	2.04
»	1.98	1.99	1.99	1.99
»	1.99	1.99	1.97	1.98
»	1.97	1.94	1.98	1.97

(1) Il metodo dà il valore complessivo delle sostanze riducenti volatili del sangue e non solo dell'alcool, quindi, ad es., anche dei corpi chetonici. Nelle presenti ricerche, trattandosi di soggetti normali e di variazioni ottenute in seguito ad ingestione di bevande alcooliche, si sono assunti i risultati come espressione delle variazioni del tasso alcoolemico.

Prima di procedere a determinazioni di alcool nel sangue si controllò la taratura delle pipette nel modo seguente: si riempirono con una soluzione $\frac{N}{10}$ di soda: poi si vuotarono in un matraccio e si lavarono più volte con acqua distillata, raccogliendo accuratamente tutta l'acqua di lavaggio. Si titolò la soda con acido cloridrico $\frac{N}{100}$. Se ne impiegò successivamente per le diverse pipette cc. 0.99; 0.99; 1; 0.99; 0.99; 0.99; 0.99; 0.99; 0.99; 0.98; 0.98,5; 0.99.

Altri saggi di controllo furono eseguiti con una soluzione alcoolica titolata all'1‰ preparata con alcool assoluto del commercio, da noi opportunamente rettificata. I valori ottenuti sono contenuti nella serie riportata dal Widmark per la determinazione della costante 1.13, appartenendo peraltro alla porzione più alta di questi valori.

Potere riducente della soluzione	cc. $K_2Cr_2O_7 \frac{N}{100}$ ridotti	mmgr. di alcool corrispondenti a 0.01 cc. di $K_2Cr_2O_7 \frac{N}{100}$
0.00	0.69	0.00114
0.00	0.65	0.00121
0.00	0.67	0.00118
0.00	0.70	0.00113
0.02	0.64	0.00123
0.02	0.67	0.00118
0.02	0.69	0.00114
0.02	0.66	0.00119
0.02	0.65	0.00121
0.02	0.65	0.00121
0.02	0.67	0.00118
0.02	0.64	0.00123

Le ricerche furono fatte su giovani (24-30 anni) a digiuno nel mattino. Si somministrò loro marsala di buona qualità contenente il 16.30 di alcool. Il peso dei soggetti in esperimento oscillava tra i 65-72 Kg.; così, quando si dettero loro cc. 50, cc. 100, cc. 200 di marsala, la proporzione dell'alcool assoluto ingerito fu rispettivamente per kg. di peso di circa cc. 0.119, cc. 0.238, cc. 0.476.

Si è osservato che il contenuto in alcool del sangue varia in condizioni normali, da soggetto a soggetto, e, nello stesso soggetto, da giorno a giorno.

	Valore medio	Valore massimo	Valore minimo
B. L.	0.034 ‰	0.0379 ‰	0.0184 ‰
B. A.	0.047 »	0.053 »	0.024 »
M.	0.034 » (I det.)		
D. L.	0.024 »	0.0272 »	0.021 »
A.	0.039 »	0.041 »	0.038 »
R. C.	0.024 »	0.03 »	0.019 »
C. U.	0.024 » (I det.)		
C. D.	0.049 »	0.07 »	0.0214 »
P.	0.027 »	0.055 »	0.011 »
D.	0.06 » (I det.)		

Il contenuto in alcool ‰ in peso del sangue, misurato a distanza di tempo in due prove di controllo, ha subito le seguenti variazioni:

P. dopo	0 — 0.011 ‰	C. dopo	0 — 0.063 ‰
»	2' — 0.015 »	»	25' — —
»	20' — 0.015 »	»	45' — —
»	40' — 0.015 »	»	65' — 0.01 »
»	60' — 0.02 »	»	85' — —
»	80' — 0.02 »	»	105' — 0.03
»	100' — 0.02 »	»	125' — —

In un soggetto, in tre esperienze, l'ingestione di 50 cc. di marsala non ha fatto modificare la percentuale dell'alcool nel sangue.

L'ingestione di 100 cc. di marsala, cc. 0.238 circa di alcool assoluto per kg. di peso, ha determinato le seguenti variazioni dell'alcool nel sangue:

Soggetto	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool ‰ in peso nel sangue	Soggetto	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool ‰ in peso nel sangue
G. A.	0	0.0318	M.	63'	0.178
	5'	0.153	G. A.	30''	0.0274
	10'	0.217		5'	0.0109
B. L.	0	0.033		15'	0.040
	5'	0.194		25'	0.048
	15'	0.116		35'	0.053
	20'	0.255		51'	0.081
	40'	0.200		66'	0.068
	50'	0.161	C. U.	0	0.07
	55'	0.150		8'	0.136
M.	3'	0.056		13'	0.130
	20'	0.149		23'	0.136
	28'	0.154		33'	0.108
	38'	0.174		48'	0.119
	48'	0.149			

A prescindere dalla prima prova, che durò pochi minuti, nelle altre si osserva che in G. A. e M. il massimo di concentrazione si ottenne in un tempo molto più lungo che in B. L. e C. U. I primi due sono astemi da anni: gli altri due bevono poco e sono saltuariamente astemi.

L'ingestione di 200 cc. di marsala, pari a circa cc. 0.476 di alcool assoluto per kg. di peso, produsse le seguenti variazioni:

Soggetto	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool ‰ in peso nel sangue	Soggetto	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool ‰ in peso nel sangue
G. A.	0	0.126	B. L.	80'	0.327
	3'	0.223		105'	0.273
	10'	0.344		130'	0.222
	25'	0.457	M.	0	0.034
	40'	0.573		3'	0.135
	65'	0.554		13'	0.297
	85'	0.456		21'	0.302
G. A.	0	0.155		33'	0.345
	3'	0.186		53'	0.387
	19'	0.414	C. D.	73'	0.488
	39'	0.310		0	0.04
	79'	0.336		5'	0.09
	101'	0.357		45'	0.29
	129'	0.357		85'	0.19
B. L.	0	0.0184		125'	0.15
	2'	0.207	C. D.	0	0.0214
	25'	0.580		10'	0.082
	60'	0.505		30'	0.44
	90'	0.335		60'	0.41
	130'	0.309		90'	0.32
	170'	0.370		120'	0.22
G. A.	0	0.024	P.	135'	0.23
	3'	0.143		0	0.03
	17'	0.365		5'	0.26
	37'	0.382		45'	0.58
	62'	0.399		85'	0.35
	93'	0.451		125'	0.28
	138'	0.270		165'	0.19
B. L.	0	0.0379	B. L.	0	0.165
	5'	0.249		10'	0.297
	30'	0.481		25'	0.273
	55'	0.364			

Soggetto	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool ‰ in peso nel sangue	Soggetto	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool ‰ in peso nel sangue
C. D.	0	0.07	C. D.	85'	0.35
	5'	0.18		125'	0.28
	45'	0.4		165'	0.19
	85'	0.29	P.	0	0.03
	125'	0.19		7'	0.29
	165'	0.15		47'	0.52
C. D.	0	0.03		87'	0.35
	5'	0.26		117'	0.25
	45'	0.58		157'	0.18

Dalle nostre determinazioni dell'alcool nel sangue, eseguite a distanza di tempo, fino dopo 130'—165' dall'ingestione della sostanza, risulta che la curva alcoolemica, pur essendo costante per ciascuna delle persone esaminate, differisce notevolmente secondo che si tratta di astemi o di individui abituati a bere. La differenza consiste nel fatto (già osservato da precedenti autori) che la percentuale massima dell'alcool nel sangue è raggiunta, in chi è abituato a bere, spesso in tempo più breve che in chi è astemio. Mentre però nel primo caso l'alcool tende a scomparire rapidamente dal circolo, nel secondo si mantiene ad alto livello per un più lungo tempo. I fatti subiettivi (sonnolenza, senso di incipiente ebbrezza, ecc.) sono in diretto rapporto, nello stesso soggetto, con la concentrazione dell'alcool in circolo e, nei diversi soggetti, in rapporto inverso colla rapidità colla quale esso scompare dal sangue.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle rappresentazioni conformi, e su di una interpretazione fisica del parallelismo di Levi-Civita.* Nota di E. BORTOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Scopo di questa Nota è d'indicare una interpretazione fisica del parallelismo di Levi-Civita, che è compresa nell'ambito della Fisica classica, e per quanto limitata al caso particolare in cui la varietà è una V_3 rappresentabile conformemente su di un R_3 euclideo — cioè, diremo con Schouten, una C_3 ⁽²⁾ — e inoltre, il vettore trasportato è perpendicolare alla direzione di trasporto, mi sembra non priva d'interesse.

2. Premetterò alcune considerazioni relative alle trasformazioni conformi. È noto ⁽³⁾ che se \bar{V}_n è rappresentata conformemente su V_n mediante la trasformazione $\bar{a}_{ik} = n^2 a_{ik}$ (\bar{a}_{ik} , a_{ik} essendo i tensori fondamentali delle due varietà), posto $p = \text{grad} \log n$, indicati con $\bar{\delta}$, δ i simboli di differenziazione covariante in \bar{V}_n e in V_n , e con λ il vettore, unitario in V_n , che dà la direzione di derivazione, si ha

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\delta \xi^i}{\delta s_\lambda} = \frac{\bar{\delta} \xi^i}{\bar{\delta} s_\lambda} - \xi \times \lambda \cdot p^i + p \times \lambda \cdot \xi^i + p \times \xi \cdot \lambda^i, \\ \frac{\bar{\delta} \xi_i}{\bar{\delta} s_\lambda} = \frac{\delta \xi_i}{\delta s_\lambda} - \xi \times \lambda \cdot p_i - p \times \lambda \cdot \xi_i + p \times \xi \cdot \lambda_i, \end{cases}$$

ove i prodotti scalari s'intendono calcolati nella metrica di V_n . Se ξ è un vettore unitario in V_n , posto $\bar{\xi}^i = \frac{1}{n} \xi^i$, $\bar{\xi}_i = n \xi_i$, $\bar{\xi}$ è unitario in \bar{V}_n , e si ha

$$(2) \quad \begin{cases} n \frac{\bar{\delta} \bar{\xi}^i}{\bar{\delta} s_\lambda} = \frac{\delta \xi^i}{\delta s_\lambda} - (\xi \times \lambda \cdot p^i - p \times \xi \cdot \lambda^i), \\ \frac{1}{n} \frac{\bar{\delta} \bar{\xi}_i}{\bar{\delta} s_\lambda} = \frac{\delta \xi_i}{\delta s_\lambda} - (\xi \times \lambda \cdot p_i - p \times \xi \cdot \lambda_i). \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1924, p. 168.

(3) SCHOUTEN, *ibid.*; vedi anche LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo Differenziale Assoluta*, Roma, Stock, 1925, p. 237.

Condizione perchè ξ si trasporti, in \bar{V}_n , per parallelismo nella direzione (λ) , è dunque che il corrispondente vettore ξ di V_n soddisfi all'equazione vettoriale

$$(3) \quad \frac{\delta \xi}{\delta s_\lambda} = \xi \times \lambda \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \xi \cdot \lambda,$$

che nel caso particolare $n = 3$ prende la forma

$$(3)^* \quad \frac{\delta \xi}{\delta s_\lambda} = (\lambda \wedge \mathbf{p}) \wedge \xi.$$

Per $\xi \equiv \lambda$, si ottiene in particolare dalla (3) l'equazione differenziale delle linee di V_n che corrispondono alle geodetiche di \bar{V}_n . Se le due varietà V_n, \bar{V}_n in rappresentazione conforme sono ottenute assegnando due metriche diverse alla medesima varietà astratta, la (3) rappresenta, in V_n , il parallelismo di Levi-Civita rispetto alla metrica di \bar{V}_n , e per $\xi \equiv \lambda$, definisce in V_n le geodetiche di \bar{V}_n . Essa ci mostra anzi che è caratteristico delle geodetiche di \bar{V}_n , considerate in V_n , di avere in ogni punto la G_2 (giacitura piana) osculatrice normale alla ipersuperficie di livello $n = \text{cost.}$ passante per quel punto; cioè, contenente il vettore \mathbf{p} . Inoltre dalla (3) si ha una semplice costruzione, in V_n , delle serie di direzioni parallele in \bar{V}_n uscenti ortogonalmente da una geodetica Γ di \bar{V}_n ⁽¹⁾. Precisamente: se Σ_ξ è la *striscia* che si ottiene trasportando ξ , per parallelismo di Levi-Civita in V_n , lungo Γ , la direzione (ξ^*) parallela a (ξ) in \bar{V}_n , per trasporto infinitesimo da P a $P^* = P + \lambda ds_\lambda$ lungo Γ , è l'intersezione di Σ_ξ con la G_{n-1} normale a Γ in P^* .

In particolare, se $n = 3$, e la V_n è uno spazio euclideo R_3 - onde la \bar{V}_n è una C_3 - abbiamo (sempre per $\xi \times \lambda = 0$) che la parallela (in C_3) a ξ uscente da P^* è la direzione che viene proiettata ortogonalmente, sul piano normale in P a Γ , nella direzione ξ , cioè l'intersezione del piano $\xi\lambda$ col piano normale in P^* a Γ .

3. Richiamerò ora brevemente alcuni noti risultati d'Ottica. Consideriamo un raggio luminoso polarizzato rettilineamente, lungo il quale, cioè, le vibrazioni si compiono in una sola direzione (ξ) , normale al raggio; e supponiamo che esso attraversi la superficie di separazione di due mezzi isotropi, d'indici di rifrazione n_1, n_2 . Nella rifrazione la direzione del vettore luminoso vien rotata; precisamente, se ξ' è il vettore luminoso relativo al raggio rifratto, λ, λ' i vettori unitari orientati come i raggi incidente e rifratto, (ζ) la normale alla superficie di separazione dei due mezzi

(1) Dato il carattere lineare del trasporto parallelo di LEVI-CIVITA, ciò basta perchè risultino determinate tutte le serie di direzioni parallele (in \bar{V}_n) lungo Γ .

nel punto d'incidenza, posto $v = \text{vers}(\lambda \wedge \zeta)$, $\alpha = \widehat{\nu\xi}$, $\alpha' = \widehat{\nu\xi'}$ ed $i = \widehat{\lambda\zeta}$, $r = \widehat{\lambda'\zeta}$ (angoli d'incidenza e di rifrazione) si ha

$$(4) \quad \cot \alpha' = \cot \alpha \cos(i - r) \quad (1).$$

Ora la (4) può interpretarsi nel seguente modo:

(ξ') è l'intersezione del piano $\lambda\xi$ col piano normale in P al raggio rifratto.

Le espressioni effettive di ξ, ξ' (vettori luminosi unitari) per $\lambda, \zeta, \alpha, i, r$ si ottengono facilmente: fatte opportune ed ovvie convenzioni sul senso dei vettori si ha

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\text{sen } \alpha (\zeta - \cos i \lambda) + \cos \alpha \lambda \wedge \zeta}{\text{sen } i} \\ \xi' = \frac{\cos(i - r)}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \text{sen}^2(i - r)}} \cdot \frac{\text{sen } \alpha \left(\zeta - \frac{\cos r}{\cos(i - r)} \lambda \right) + \cos \alpha \lambda \wedge \zeta}{\text{sen } i} \end{cases}$$

4. Ciò posto verrò all'interpretazione sopra accennata. È noto⁽²⁾ che l'ottica geometrica di un mezzo N d'indice di rifrazione $n(x, y, z)$ variabile con continuità da punto a punto, può compendiarsi nell'unica formula variazionale

$$(6) \quad \delta \int n ds = 0,$$

(ove $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$), esprime il principio di Fermat, del tempo minimo⁽³⁾. Le traiettorie dei raggi luminosi, in tale mezzo, sono le estremali di (6). È evidente come si possa considerare, nello spazio R_3 che è sede di tali fenomeni, anziché la metrica euclidea, la metrica (*a connessione euclidea e senza torsione*, secondo il Cartan: o *riemanniana*, secondo lo Schouten) che ha per elemento lineare $dt = n ds$: lo spazio diviene allora una C_3 , di cui i raggi luminosi sono le geodetiche. Ciò equivale ad assumere, come misura della lunghezza della porzione di un raggio luminoso compresa tra due punti, il cammino ottico corrispondente, o anche, il tempo che la luce impiega a percorrerla. Ora:

Se nel mezzo N considerato si propaga un raggio polarizzato rettilineamente, lungo tale raggio, il vettore luminoso si trasporta per parallelismo di Levi-Civita in C_3 :

(1) Vedi ad es. BATTELLI e CARDANI, *Trattato di Fisica Sperimentale*, vol. II, Valardi, 1913, p. 681.

(2) Vedi ad es. LEVI-CIVITA, *Questions de Mécanica classica i relativista*, Barcelona, 1921; Conf. IV, p. 126; DUHEM, *Sur le principe d'Optique géométrique énoncé par Fermat*, « Journal de Mathém. », 6^e sér., to. 8, 1912, pp. 1-58.

(3) Come il DUHEM ha fatto notare (loc. cit.) il principio di FERMAT non è sempre vero; però è sempre vera la proprietà seguente, relativa alle traiettorie dei raggi.

In effetto: notiamo (Levi-Civita, Duhem, loc. cit.) che il mezzo N può considerarsi come formato da tanti strati infinitamente sottili, d'indice di rifrazione costante (per ciascuno di essi), compresi tra due superficie di livello $n = \text{cost.}$ successive. Ora: se P, P^* sono i punti in cui un raggio generico Γ (di cui λ dà, nel punto generico, l'orientazione) incontra due superficie di livello successive, risulta ovvio, da quanto precede, che la costruzione con cui dal vettore luminoso ξ relativo a P si ottiene quello, ξ^* , relativo a P^* è precisamente la stessa che dà il vettore parallelo in P^* , nel senso di Levi-Civita in C_3 , al vettore ξ uscente da P , per trasporto lungo Γ .

E del resto, nell'ipotesi in cui $n_2 - n_1$ sia infinitesima, e precisamente, si abbia $n_1 = n$, $n_2 = n + \Delta n (= n(1 + M \cos i \Delta s))$, ove $M = \text{mod } \mathbf{p} = 1/\Delta_1(\log n)$, e $P^* = P + \lambda \Delta s$ - onde segue che la parte principale di $i - r$ è $M \sin i \Delta s$ - ricaviamo facilmente dalle (5) la formula differenziale

$$(7) \quad \frac{d\xi}{ds_\lambda} = -M \sin i \sin \alpha \lambda,$$

onde, tenendo presente che si ha $\xi \times \lambda = 0$ lungo tutto il raggio Γ , risulta appunto che ξ soddisfa all'equazione

$$(8) \quad \frac{d\xi}{ds_\lambda} = M(\lambda \wedge \zeta) \wedge \xi = (\lambda \wedge \mathbf{p}) \wedge \xi,$$

cioè alla (3)*.

5. Osserviamo che le (1) possono interpretarsi come le relazioni tra le derivate covarianti ordinarie $\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_\lambda}\right)$ e le derivate nel senso di Weyl $\left(\frac{\delta \xi}{\delta s_\lambda}\right)$ relative alla *connessione metrica* che ha $2p_i$ come componenti ⁽¹⁾.

Dunque, il risultato enunciato al numero precedente può anche mettersi sotto questa forma:

Il vettore luminoso di un raggio Γ polarizzato rettilineamente, che si propaghi attraverso a un mezzo d'indice di rifrazione variabile $n(x, y, z)$, si trasporta lungo Γ pel parallelismo relativo alla connessione metrica (nel senso di Weyl) in R_3 , la quale ha per componenti le componenti (covarianti) del vettore $\text{grad } \log n^2$ ⁽²⁾.

(1) WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, ed. francese, Paris, Blanchard, 1922, p. 108.

(2) Non occorre dire che tale connessione metrica (nel senso di WEYL) risulta a curvatura segmentaria (= *Streckenkrümmung*, secondo WEYL; *curvatura d'omoletia*, secondo CARTAN) ovunque nulla.

6. Possiamo considerare anche il caso più generale, in cui il mezzo N sia dotato di *potere rotatorio* per la luce polarizzata ⁽¹⁾. Se tale potere rotatorio è una funzione $\tau(x, y, z)$ del punto di N , abbiamo subito

$$(9) \quad \frac{d\xi}{ds_\lambda} = -M \sin i \sin \alpha \lambda + \tau \lambda \wedge \xi.$$

Allora, il vettore luminoso ξ si trasporta, lungo Γ , per parallelismo rispetto a C_3 , intendendosi che a questa varietà sia attribuita la determinazione metrica definita da $dt = nds$, e inoltre, una *torsione* (nel senso di Cartan), funzione del punto di C_3 ed eguale a 2τ ⁽²⁾.

È possibile assegnare una torsione (cioè: un potere rotatorio) tale, che lungo Γ i vettori $v = \text{vers}(\lambda \wedge \xi)$ (binormali a Γ) risultino paralleli in C_3 ? e quindi: *i raggi polarizzati nel piano d'incidenza si conservino tali*, il che in generale non avviene. Questo caso, che fisicamente non sembra da scartare *a priori*, non può presentarsi per τ *funzione del punto* P in R_3 . Infatti si vede subito che: condizione perchè ciò avvenga, è che il potere rotatorio sia $\tau = \frac{1}{T}$, *torsione* di Γ , in R_3 , nel punto generico. L'invariante $\frac{1}{T}$ si calcola facilmente: si trova

$$(10) \quad \frac{1}{T} = - \frac{1}{M^2 \sin^2 i} \epsilon^{irs} \lambda_i p_r p_{s/l} \lambda^l;$$

ora questa è una funzione di P e anche di λ ; e il corrispondente trasporto dei vettori ξ non è lineare.

(1) Vedi ad es. loc. cit. (4), p. 814. Estendendo l'usuale definizione (relativa a un mezzo omogeneo ed isotropo) potremo dire *potere rotatorio* in P , nella direzione (dP), il rapporto [derivata] $\frac{d\varphi}{ds}$, ove $d\varphi$ è l'angolo di cui ruota la proiezione del vettore luminoso sul piano normale in P al raggio, quando ξ si trasporta da P a $P + dP$.

(2) CARTAN, *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion*, « Comptes Rendus de l'Ac. », to. 174, 1922, pp. 437-439; *Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la relativité généralisée*, « Annales de l'Ec. Norm. Sup. », 3^e sér., to. 40, 1923, pp. 325-412, to. 41, 1924, pp. 1-25, to. 42, 1925, pp. 17-88; *Les récentes généralisation de la notion d'espace* (« Bull. des Siences Math. », to. 48, 1924, pp. 294-320), spec. pp. 303-304.

Analisi funzionale. — *La teoria dei funzionali analitici nell'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali di qualsiasi ordine.* Nota di L. FANTAPPIÈ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Fra le equazioni funzionali più interessanti e più studiate sono certo da annoverarsi le equazioni a derivate parziali in una funzione incognita $\zeta(x, y)$ di due variabili. Per individuare però un integrale ζ di queste equazioni, non basta più dare i valori di alcune costanti, che entrano nell'espressione generale, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, ma bisogna invece dare tutti gli infiniti valori che alcune funzioni (la ζ stessa e certe sue derivate, per esempio) assumono su una linea assegnata.

L'integrale cioè non è più determinato dai valori dati a certe costanti, ma è noto soltanto quando siano date certe *funzioni*; secondo le usuali definizioni introdotte dal prof. Volterra, esso deve quindi dirsi un *funzionale* di queste funzioni.

Si può anzi affermare che precisamente in questo campo dell'Analisi è da ricercarsi la prima origine delle considerazioni che portarono poi il prof. Volterra ⁽²⁾ alla costruzione della teoria dei *funzionali* (o « *funzioni di linee* », secondo una denominazione più antica), punto di partenza di tanti altri moderni sviluppi.

Debbo infatti alla squisita cortesia dell'illustre Senatore Volterra, se ho potuto prendere visione di alcuni suoi appunti manoscritti, che risalgono al 1884, in cui egli stabilisce il concetto di una funzione che *dipende da tutti i valori assunti da certe funzioni in certi intervalli*, concetto che fu poi sviluppato nelle note già citate e nei lavori successivi. Come immediata applicazione, egli considera gli integrali delle equazioni a derivate parziali come dipendenti dalle funzioni arbitrarie, e, per le equazioni a derivate parziali lineari, si trova anzi, nel suddetto manoscritto, già enunciato il teorema che l'integrale dipende *linearmente* dalle funzioni iniziali (più precisamente, è detto che queste funzioni debbono entrare, nell'espressione generale dell'integrale, sotto segni di quadrature).

La dimostrazione e precisazione di questo teorema, nell'ipotesi dell'analiticità di tutte le funzioni che entrano in considerazione, come applicazione

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1926.

(2) I primi lavori, pubblicati dal prof. Volterra su questo argomento sono le tre Note dal titolo: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, « Rend. R. Accademia dei Lincei », 2° sem. 1887, fasc. 4, 6 e 7.

immediata, ma forse interessante, delle ricerche da me svolte in precedenti lavori sui *funzionali analitici*, costituisce appunto lo scopo della presente Nota.

2. Consideriamo perciò l'equazione lineare a derivate parziali di ordine n , nella funzione incognita $\chi(x, y)$

$$(1) \quad \frac{\partial^n \chi}{\partial x^n} = A[\chi; x, y]$$

in cui $A[\chi; x, y]$ è un'espressione lineare e omogenea, con coefficienti funzioni analitiche di x e y , nella χ e nelle sue derivate fino all'ordine n , esclusa la $\frac{\partial^n \chi}{\partial x^n}$ che figura esplicitamente nel primo membro.

Sotto le note ipotesi di regolarità, esisterà, per il teorema di Cauchy, uno e un solo integrale $\chi(x, y)$, olomorfo nell'intorno di un dato punto x_0, y_0 , che per $x = x_0$ si riduce a una funzione preventivamente assegnata $\varphi_0(y)$, mentre le sue derivate $\frac{\partial^r \chi}{\partial x^r} (r = 1, 2, \dots, n-1)$ si riducono, pure per $x = x_0$, ad altre funzioni assegnate $\varphi_r(y)$, cioè tale che

$$(2) \quad \chi(x_0, y) = \varphi_0(y) \quad , \quad \left(\frac{\partial^r \chi}{\partial x^r} \right)_{x=x_0} = \varphi_r(y) \quad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

Dico che questo integrale $\chi(x, y)$, pienamente determinato una volta note le n funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, e che risulta perciò un *funzionale*, *evidentemente analitico*, di queste n funzioni

$$\chi(x, y) = F[\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t); x, y]$$

è precisamente la somma di n funzionali lineari $L_r[\varphi_r(t); x, y]$ ognuno funzionale di una sola delle φ_r , cioè

$$(3) \quad \chi(x, y) = L_0[\varphi_0(t); x, y] + L_1[\varphi_1(t); x, y] + \dots + \\ + L_{n-1}[\varphi_{n-1}(t); x, y].$$

Sia intatti $v_0(x, y; \alpha)$ quell'integrale della (1), pienamente determinato, per il teorema di Cauchy, e olomorfo nell'intorno di x_0, y_0 se è $\alpha \neq y_0$, che per $x = x_0$ diventa uguale a $\frac{1}{y - \alpha}$, mentre tutte le sue derivate $\frac{\partial^r v_0}{\partial x^r}$ fino all'ordine $n-1$ si annullano per $x = x_0$, cioè

$$(4) \quad v_0(x_0, y; \alpha) = \frac{1}{y - \alpha} \quad , \quad \left(\frac{\partial^r v_0}{\partial x^r} \right)_{x=x_0} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

Sia inoltre $v_i(x, y; \alpha)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) quell'integrale della (1), tale che

$$(5) \quad \left(\frac{\partial^i v_i}{\partial x^i} \right)_{x=x_0} = \frac{1}{y-\alpha}$$

mentre tutte le altre derivate $\frac{\partial^r v_i}{\partial x^r}$ ($r = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$) e la v_i stessa si annullano per $x = x_0$.

Consideriamo allora la funzione ζ , somma di n prodotti funzionali ⁽¹⁾,

$$(6) \quad \zeta(x, y) = v_0(x, y; \alpha) \varphi_0(\alpha) + v_1(x, y; \alpha) \varphi_1(\alpha) + \dots + \\ + v_{n-1}(x, y; \alpha) \varphi_{n-1}(\alpha).$$

Questa funzione, per le (4) e (5) e per la formula dell'integrale di Cauchy, diventa, per $x = x_0$, la $\varphi_0(y)$, mentre le sue derivate $\frac{\partial^r \zeta}{\partial x^r}$ si riducono, pure per $x = x_0$, alle $\varphi_r(y)$. Essa d'altra parte, essendo somma di espressioni del tipo

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C v_r(x, y; \alpha) \varphi_r(\alpha) d\alpha = v_r(x, y; \alpha) \varphi_r(\alpha)$$

(in cui C è una curva chiusa, separatrice, del piano complesso α) ed essendo le v_r integrali della (1), risulta pure, per la linearità della (1) stessa, un integrale di questa. Dunque sarà precisamente uguale a quell'integrale della (1), determinato dalle condizioni (2), di cui il teorema di Cauchy ci assicura l'esistenza ed unicità, nelle precedenti ipotesi.

L'espressione (6) di questo integrale ci dimostra appunto che esso è la somma di n funzionali lineari

$$L_n[\varphi_r(t); x, y] = v_r(x, y; \alpha) \varphi_r(\alpha) \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

di cui le $v_r(x, y; \alpha)$ sono precisamente le indicatrici ⁽²⁾.

Vediamo dunque come il problema di Cauchy dell'integrazione dell'equazione a derivate parziali, lineare, (1) possa considerarsi completamente risolto, per mezzo delle n quadrature (7) che esprimono i prodotti funzionali, una volta noti questi n integrali particolari $v_r(x, y; \alpha)$ dipendenti ognuno dalla costante arbitraria α .

(1) Cfr. L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*, « Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Roma », serie 2^a, vol. IV, 1925-26.

(2) L. FANTAPPIÈ, *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. I, serie 6^a, 1925, 1^o sem.

Senza bisogno di alcuna quadratura si possono determinare invece le varietà singolari e il tipo delle singolarità dell'integrale $\chi(x, y)$, una volta note le n indicatrici $v_r(x, y; \alpha)$ e le n funzioni $\varphi_r(y)$, applicando i teoremi generali sui funzionali lineari misti (cfr.: *I funzionali analitici*, già citati, n. 18 e 19, da p. 18 a 21).

3. Invece di supporre noti i valori dell'integrale χ e delle sue derivate $\frac{\partial^r \chi}{\partial x^r}$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$) sulla retta $x = x_0$, si potrebbero supporre noti questi valori $\psi_r(y)$ su una curva arbitraria $\mathcal{L}, x = f(y)$, però non tangente alle *caratteristiche* dell'equazione nel punto x_0, y_0 . Le considerazioni precedenti, per i teoremi di Cauchy-Kowalewski, varrebbero integralmente, soltanto sarebbero diverse, in generale, le indicatrici $w_r(x, y; \alpha)$ (dei nuovi funzionali lineari $M_r[\psi_r(t); x, y]$) che sulla curva \mathcal{L} sono nulle insieme alle derivate $\frac{\partial^i w_r}{\partial x^i}$ (i da 0 a $n-1$, ma $\neq r$), mentre su \mathcal{L} è invece $\left(\frac{\partial^r w_r}{\partial x^r}\right)_{\mathcal{L}} = \frac{1}{y - \alpha}$. Sarebbe cioè ancora

$$\chi(x, y) = M_0[\psi_0(t); x, y] + M_1[\psi_1(t); x, y] + \dots + M_{n-1}[\psi_{n-1}(t); x, y]$$

$$\chi(x, y) = w_0(x, y; \alpha) \psi_0^*(\alpha) + w_1(x, y; \alpha) \psi_1^*(\alpha) + \dots + w_{n-1}(x, y; \alpha) \psi_{n-1}^*(\alpha)$$

e con ciò tutto quello che abbiamo detto varrebbe anche nel caso, più generale della (1), in cui la $\frac{\partial^n \chi}{\partial x^n}$ non compare nell'equazione (in questo caso non si può scegliere la retta $x = x_0$, *caratteristica*, per assegnare i valori della χ e delle sue derivate, ma si può scegliere un'altra linea).

4. Osserviamo infine che per $n = 2$, il metodo d'integrazione di Riemann fornisce l'integrale generale $\chi(x, y)$ dell'equazione mediante sostituzioni e quadrature (funzionali lineari particolari) che portano sulla χ e le sue derivate prime (note su una data curva \mathcal{L}), e coincide quindi col metodo ora esposto.

Possiamo dire perciò che il metodo generale che abbiamo tratteggiato costituisce la naturale estensione del metodo di Riemann a tutte le equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee, comunque sia alto il loro ordine. Esso inoltre fa intravedere l'utilità dell'applicazione, a questo campo dell'Analisi, delle proprietà, anche più elementari, dei funzionali analitici, i quali sembrano anzi costituire lo strumento più adatto per uno studio sistematico delle equazioni a derivate parziali.

Meccanica. — *Sur la représentation analytique de certains mouvements apériodiques.* Nota di A. WEINSTEIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La représentation analytique des solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = F(s) = (s - a)^m (b - s)^n F_1(s)$$

où (les variables étant supposées réelles) a et b désignent deux racines consécutives, de multiplicité m et n respectivement ($a < b$; $F_1(s) \neq 0$ pour $a \leq s \leq b$) entre lesquelles se trouve la valeur initiale de s , a été donnée par Weierstrass ⁽²⁾ dans le cas où a et b sont des racines simples ($m = n = 1$).

La fonction $s(t)$ (que nous pouvons interpréter, vu le rôle que l'équation (1) joue en Mécanique, comme l'abscisse d'un point mobile à l'instant t), étant dans ce cas une fonction périodique du temps t , peut être développée en série de Fourier, dont les coefficients se calculent, d'après Weierstrass, par quadratures de fonctions données par l'équation (1) elle même.

Une représentation analytique analogue dans le cas de racines multiples, c'est-à-dire un développement de l'intégrale de l'équation (1) en série de fonctions données à priori et indépendentes de la nature de la fonction F (celle ci intervenant seulement dans les quadratures qui déterminent les valeurs numériques des coefficients) ne semble pas avoir été donnée jusqu'à présent ⁽³⁾.

On connaît, par contre, parfaitement l'allure (non périodique, cette fois) de l'intégrale $s(t)$ ⁽⁴⁾.

Nous supposerons dorénavant (sans restreindre la généralité de nos considérations) $n \geq 2$, $m \geq 1$, en outre $\frac{ds}{dt} \equiv 0$ au moment initiale.

Si la racine $s = a$ est multiple elle aussi ($m \geq 2$) l'intervalle $a \leq s < b$ correspond d'une manière biunivoque à l'intervalle $-\infty < t < +\infty$ (parcoursu, lui aussi, en sens croissant).

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) *Mathematische Werke*, II, p. 1.

(3) Voir C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, Leipzig, 1902, vol. I, p. 95.

(4) Voir, p. ex., T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Bologna, 1926, vol. II, p. 27, où les mouvements correspondants s'appellent « movimenti a meta asintotica ».

Si, par contre, $s = a$ est une racine simple on aura une correspondance biunivoque entre l'intervalle (a, b) doublement parcouru (dans le sens $b \dots a \dots b$) et les valeurs de t de $-\infty$ à $+\infty$, de manière que (en posant $s = a$ pour $t = 0$) $s(t)$ devient une fonction paire du temps ($s(-t) = s(t)$).

Introduisons, pour obtenir une représentation analytique de l'intégrale, une variable auxiliaire w , définie d'après Charlier, par la quadrature élémentaire

$$(2) \quad dw = \frac{ds}{+ \sqrt{(s-a)^m (b-s)^n}}.$$

On aura entre l'intervalle $a < s < b$ (simplement ou doublement parcouru) et les valeurs de w entre $-\infty$ et $+\infty$ le même genre qualitatif de correspondance que celui qui a lieu entre les valeurs de s et de t .

Il va sans dire d'ailleurs que l'on peut intégrer explicitement la relation (2), p. ex., en posant $m = 2m' + \epsilon$, $n = 2n' + \delta$ (ϵ et δ étant égaux à 0 ou à 1), ce qui revient à écrire (2) sous la forme

$$(2') \quad dw = \frac{ds}{(s-a)^{m'} (b-s)^{n'} \sqrt{(s-a)^\epsilon (b-s)^\delta}},$$

ce qui montre que w est la somme de termes rationnels en s et

$$\sqrt{(s-a)^\epsilon (b-s)^\delta}$$

et de leurs logarithmes.

La relation entre w et t est donnée par l'équation

$$(3) \quad \frac{dw}{dt} = + \sqrt{F_1(s)},$$

où bien, en exprimant s par w (en faisant l'inversion de la fonction élémentaire $w(s)$ définie par (2) ou (2')):

$$(4) \quad \frac{dw}{dt} = + \sqrt{\psi(w)}$$

où on a posé $F_1(s(w)) = \psi(w)$.

$\psi(w)$ ainsi que $\sqrt{\psi(w)}$ sont bornés et différents de 0 pour

$$-\infty < w < +\infty.$$

On peut donc, en écrivant (4) sous la forme

$$dt = \frac{dw}{\sqrt{\psi(w)}},$$

affirmer que $\frac{1}{\sqrt{\phi(w)}}$ est développable en séries de polynomes de Hermite et remplacer (5) par

$$(6) \quad dt = dw \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} H_{\mu}(w) \quad , \quad \left(H_{\mu}(w) = e^{\frac{w^2}{2}} \frac{d^{\mu}}{dw^{\mu}} \left(e^{-\frac{w^2}{2}} \right) \right),$$

où a_{μ} se calcule par la formule

$$(7) \quad a_{\mu} = \frac{1}{\mu! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{\phi(w)}} H_{\mu}(w) dw.$$

L'intégration de (6) nous donne (vu que l'on peut poser $w = 0$ pour $t = 0$, et en tenant compte de la relation $H_{\mu}(w) = -\frac{1}{\mu+1} \frac{dH_{\mu+1}}{dw}$)

$$(8) \quad t = a_0 w - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{a_{\mu}}{\mu+1} [H_{\mu+1}(w) - H_{\mu+1}(0)].$$

Il s'agit maintenant d'expliciter la relation entre s et t . Or, s et w étant liés entre eux par une relation élémentaire (que l'on obtient en intégrant (2)), il suffit de donner une relation analytique explicite qui exprime w en fonction de t . Or, w devenant (d'après (4)), pour $t = \pm \infty$, infini seulement du même ordre que t , peut, à son tour, être représenté par une série convergente de polynomes de Hermite dont les coefficients se calculent par quadratures de fonctions connues. En effet, posant

$$(9) \quad w = \sum c_v H_v(t),$$

on aura

$$c_v = \frac{1}{v! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) e^{-\frac{t^2}{2}} H_v(t) dt,$$

où bien, en tenant compte de la définition des polynomes de Hermite:

$$c_v = \frac{1}{v! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \frac{d^v \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right)}{dt^v} dt;$$

donc en intégrant par parties

$$(10) \quad c_v = -\frac{1}{v! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} H_{v-1}(t) dw.$$

Cette formule peut servir à calculer (au moins du point de vue théorique) c_v avec une approximation indéfinie en fonction des grandeurs a_μ , que nous considérons comme données par les formule (7).

En effet on peut remplacer (pour effectuer la quadrature par rapport à w) t sous le signe \int par son développement (7) et intégrer terme à terme entre des limites finies mais suffisamment grandes, de manière à avoir une erreur plus petite qu'un nombre arbitraire donné a priori. Le choix de ces limites est aisé pour chaque v , les polynômes H_v étant censés connus.

Il va sans dire qu'au lieu d'adopter la formule (9) on pourrait considérer l'ensemble des formules (8) et de l'inversion de la formule (2) (celle là intégrée) comme une représentation *paramétrique* de la relation quantitative entre s et t .

Pour une étude purement qualitative de la relation entre s et t (où bien celle qui existe entre w et t) il conviendrait de remplacer ces grandeurs par des variables qui restent bornées. Ainsi on obtient, comme M. Levi-Civita a bien voulu me communiquer, dans le cas $m = 1$, $n = 2$ en posant

$$\begin{cases} s - a = (b - a) y^2 \\ x = Tgh t \end{cases}$$

une relation entre x et y (tous deux restant dans l'intervalle de 0 à 1) de la forme

$$y = x + \varphi(y) \quad ; \quad \varphi'(y) \leq 1$$

à la quelle peut donc être appliquée avec succès la méthode de résolution par approximations successives.

Cette remarque, qui a servi comme point de départ pour la présente Note, peut d'ailleurs être généralisée pour m et n quelconques.

Meccanica. — *Sur le théorème d'existence des jets liquides.*
Nota di A. WEINSTEIN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sopra la scintillazione delle stelle.* Nota della sign. dott. G. ROSSI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. ARMELLINI.

1. Per suggerimento del ch.mo prof. G. Armellini ho intrapreso nella mia tesi di laurea, lo studio della scintillazione delle stelle, ed ho considerato dapprima in ordine storico le spiegazioni e le teorie adottate dai diversi autori, e gli strumenti scintillometri da essi adoperati; ho quindi eseguito una serie di osservazioni nell'Osservatorio del Campidoglio per accertare i risultati, ed infine sono passata a studiare l'equazione di Lord Rayleigh:

$$(1) \quad \frac{d^2\eta}{ds^2} = \operatorname{tg} \theta \frac{d \log \mu}{ds}$$

che si riconnette alla scintillazione stessa. Espongo sommariamente questo mio lavoro nella presente Nota, e in una successiva.

2. I Greci credevano che la scintillazione fosse dovuta alla distanza delle stelle e a fenomeni ottici-fisiologici, cioè allo sforzo che l'occhio doveva fare per percepirne l'immagine.

Aristotile ⁽²⁾ notò nella stella una variazione d'intensità, di colore e di posizione, che chiamò rispettivamente *scintillazione dinamica*, *scintillazione cromatica*, *scintillazione parallattica*, che tentò di spiegare nel modo indicato e così pure Tolomeo ⁽³⁾. Nel medio-evo invece la scuola araba suppose che la scintillazione fosse dovuta alla rifrazione dei raggi stellari, gettando in tal modo il seme della vera spiegazione.

Ma più tardi si tornò ad una nuova deviazione per opera di Tycho che credette che essa fosse causata dal moto proprio della stella; e sembra che Galileo abbia seguito questa opinione affermando che la scintillazione dipendeva dalla vibrazione della stella, vibrazione che essa partecipava alla sua luce. Descartes avvertì che la scintillazione è provocata dalla fluidità dell'atmosfera, e Gassendi disse che il fenomeno è dovuto al fatto che le stelle, come il sole, irradiano luce propria. Huyghens suppose che la scintillazione delle stelle fosse influenzata dal moto rotatorio della terra, ipotesi che venne poi confermata e messa in luce da L. Respighi, mediante le sue osservazioni spettroscopiche al Campidoglio, di cui parleremo tra breve.

Hooke tentò spiegare la variazione di colore della luce stellare con una irregolare rifrazione dei raggi attraverso l'atmosfera, e così Newton, Jurin, Young e Saussure.

(1) Presentata nella seduta del 19 dicembre 1926.

(2) ARISTOTILE, *De coelo*, II.

(3) TOLOMEO, *Optica*.

3. Nel secolo xvii Simon Marius iniziò le osservazioni per lo studio della scintillazione, inventando lo scintillometro superficiale, descritto poi ampiamente da Arago, e costituito essenzialmente da un cannocchiale, il cui oculare sia posto fuori fuoco; e con esso poté osservare il *fenomeno detto di Marius* costituente nei continui cambiamenti di punti chiari in scuri e viceversa nell'immagine ingrandita della stella.

Dall'immagine allargata si passa con Nicholson a un'immagine rettilinea ottenuta con uno scintilloscopio più tardi perfezionato e descritto da Montigny ⁽¹⁾.

Nicholson fu il primo che vide l'immagine di Sirio cambiarsi in striscie di luce colorata, che passavano rapidamente dinanzi all'occhio, e che provò a contare il numero dei cambiamenti di colore in un secondo di tempo, per avere un indice che esprimesse la rapidità della scintillazione cromatica.

Seguendo questa idea, Humboldt ⁽²⁾ dalle sue osservazioni dedusse come causa del fenomeno, l'ineguale ripartizione del vapor acqueo nell'atmosfera; Biot e Langley ⁽³⁾ notarono come le correnti d'aria calda che producono un innalzamento delle masse d'aria siano la causa di una ineguale ripartizione dei raggi luminosi, e il meteorologo Kämtz ⁽⁴⁾ cercò, come applicazione di questo fenomeno, di predire il tempo. Arago ⁽⁵⁾ perfezionò lo scintillometro superficiale e osservò che la scintillazione è dovuta all'interferenza dei raggi, ma contro questa teoria si levò Moigno e più tardi Exner ⁽⁶⁾ e Lord Rayleigh ⁽⁷⁾ mostrandone l'insussistenza. Dufour ⁽⁸⁾ intraprese una serie di osservazioni regolari e continue, sperando ricavare dal grado della scintillazione, un metodo per le predizioni meteorologiche. Con molta pazienza riunì 13.000 osservazioni eseguite a occhio nudo, e giunse alla conclusione, non trovata da Kämtz, che il *tempo cattivo è preceduto da indebolimento del fenomeno*.

Invece Montigny ⁽⁹⁾ trovò il risultato opposto e cioè che il *cattivo tempo è preceduto da una rafforzata scintillazione*; osservò ancora che un eccesso di bleu tra gli altri colori è indice quasi certo di pioggia, mentre l'apparire frequente del verde caratterizza il bel tempo.

(1) MONTIGNY, «Bulletin de l'Académie Royale de Belgique», Sér. III, t. XVI, n. 12, 1888.

(2) HUMBOLDT, «Kosmos», III, pp. 86-87 e 123, t. IV, p. 172.

(3) KÄMTZ, *Lehrbuch der Meteorologie* Halle a S., 1831-36, Bd. III.

(4) ARAGO in HUMBOLDT's, *Voyage aux régions équinoxiales*, t. I, vol. 47, p. 41. — Id., *Wiederabgedruckt*, riprodotto in «Kosmos», Bd. III. — Id., *Astronomia popolare di Arago*, t. III, p. 372. — Id., «Annuaire du Bureau des longitudes pour 1852».

(6) EXNER in WINKELMANN, *Handbuch der Physik*, II, Bd., pp. 384-387.

(7) LORD RAYLEIGH, «Brit. Ass. Rep.», 1872; «Everett. Phil. Mag. March», 1873.

(8) DUFOUR, «Archives des Sciences physiques et naturelles», 1893, t. 29, p. 545.

(9) MONTIGNY, «Mémoires de l'Académie de Bruxelles», t. XXVII, 1856. — Id., «Bulletin de l'Acad. Royale de Belgique», 1874, sér. II, t. 37, p. 165; t. 38, p. 300; t. 42, p. 255; 1878, II, t. 46, p. 598; t. 47, p. 755; 1879, II, t. 47, p. 755; 1881, III, t. 1, p. 231; 1883, III, t. 6, p. 426; t. 45, p. 391.

Però non tutte le stelle, sia prima che dopo avvenuta la pioggia, presentano lo stesso aumento del bleu, e ciò a causa del colore proprio della stella.

Da osservazioni eseguite con lo scintillometro di curvatura, Montigny ha ricavato che il « tratto ben marcato e distinto è indice di tempo bello, mentre quello diffuso e frangiato è indice di turbamenti atmosferici ».

Donati osservò per primo lo spettro di stelle scintillanti e avvertì variazioni tra loro indipendenti di forma, chiarore e posizione, in modo che i colori si sovrapponevano l'uno all'altro e si dividevano nello spettro: effetto chiamato da Exner col nome di *fenomeno di Donati*.

In seguito Du-Portal con un prisma doppiamente rifrangente, mostrò che le due immagini ordinaria e straordinaria della stella non scintillano identicamente, e mise pure in luce che la scintillazione non è la stessa per osservatori differentemente posti.

4. Veniamo così a colui che Rayleigh ha chiamato « il grande pioniere della scintillazione », a Lorenzo Respighi ⁽¹⁾.

Respighi applicò all'equatoriale di Mertz dell'Osservatorio del Campidoglio, uno spettroscopio Hoffmann a visione diretta; tra il prisma e l'obiettivo pose una lente cilindrica che allargava lo spettro stellare in modo da avere una striscia luminosa, e dopo lunghe e accurate osservazioni formulò le seguenti leggi che definiscono e determinano nettamente i caratteri del fenomeno:

1) Nello spettro delle stelle prossime all'orizzonte si osservano delle grosse righe oscure che nelle condizioni atmosferiche normali, si spostano dal rosso al violetto per le stelle all'ovest, e dal violetto al rosso per le stelle all'est.

2) Presso al meridiano, tanto al sud quanto al nord, il moto delle righe anzidette è generalmente oscillante dall'uno all'altro colore, e talora queste righe sembrano stazionarie, o scorrono soltanto una parte dello spettro.

3) Il moto delle righe stesse è più regolare e meno celere in vicinanza all'orizzonte, mentre nelle maggiori altezze il moto è più irregolare e più rapido.

4) Tenendo lo spettro verticale, il moto delle righe si effettua nello stesso senso come nello spettro orizzontale; ma esse sono meno decise e quasi trasversali fino all'altezza di 30°; nelle altezze superiori esse diventano successivamente più indecise; trasformandosi poi in rigoni longitudinali, e talora in semplici masse scure mobili, e non di rado in semplici cambiamenti di splendore.

5) Le masse lucide sono più rare e meno regolari delle oscure.

(1) L. RESPIGHI, « Atti dei Nuovi Lincei », t. 21, p. 251, anno 1868; t. 22, p. 85, anno 1868-69.

6) Non di rado nelle stelle basse, oltre le righe regolari di scintillazione, si presentano altre serie di righe meno regolari e più inclinate, e talora anche longitudinali.

7) Nelle condizioni atmosferiche normali le stelle vicine presentano gli stessi fenomeni.

8) Nelle condizioni atmosferiche anormali le righe di scintillazione sono più deboli, più irregolari di forma e di moto.

9) Quando dominano venti forti, le righe di scintillazione sono assai deboli e indecise, e talora si rimarkano sullo spettro dei semplici cambiamenti di splendore, anche nelle stelle prossime all'orizzonte e molto lucide.

10) Quando le immagini delle stelle sono molto diffuse, le righe sono debolissime e indecise.

11) Quando le righe sono regolari di forma e di moto, ordinariamente continua il bel tempo, e in generale sembra che la regolarità dei fenomeni di scintillazione sia un mezzo probabile per pronosticare il proseguimento della buona stagione.

12) I fenomeni di scintillazione sono più decisi e marcati nelle serate di maggiore umidità atmosferica.

Da queste leggi il Respighi dedusse la dimostrazione sicura che la scintillazione delle stelle era influenzata dal moto di rotazione della terra, come del resto vedremo tra breve.

Egli trovò ancora più generalmente che: *la regolarità della scintillazione è indizio di stabilità delle condizioni atmosferiche, mentre l'irregolarità parziale o totale, sembra indicare prossime perturbazioni.*

5. Più tardi un notevole contributo alla teoria della scintillazione fu dato da Lord Rayleigh⁽¹⁾ che ha cercato di sottoporre questo fenomeno al calcolo ed è giunto per questa via ad un'equazione differenziale che esamineremo in appresso, e che sebbene non sia riducibile alle quadrature, può essere integrata per approssimazione, essendo l'indice di rifrazione molto prossimo all'unità.

Il Rayleigh inoltre ha tentato di calcolare, con un'equazione analoga, la separazione subita nell'atmosfera da raggi di colore diverso che provengono da una stessa stella, e di applicare questi calcoli alle osservazioni spettroscopiche, servendosi però di metodi approssimati, data la difficoltà analitica.

Premesso questo rapido cenno storico, necessario per comprendere lo stato attuale della questione, passerò, in una prossima Nota, a parlare delle osservazioni che io ho eseguito in proposito nel passato anno 1925 nel R. Osservatorio del Campidoglio, a Roma, e quindi allo studio da me fatto sull'equazione di Rayleigh.

(1) Lord RAYLEIGH, «Phil. Magaz.», vol. 36, ser. 5^a.

Geodesia. — *Sopra la stabilità geodetica.* Nota di G. VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul paramagnetismo degli elementi compresi fra il Ca e lo Zn.* Nota di A. CARRELLI, presentata⁽¹⁾ dal Socio M. CANTONE.

Il fenomeno del paramagnetismo è interpretato come dipendente dall'esistenza di un moto di cariche elettriche nell'atomo o molecola del corpo che lo presenta, moto che lo rende paragonabile ad un magnete. Dalle numerose ricerche sperimentali rivolte principalmente alla determinazione del coefficiente di suscettività magnetica è stato possibile risalire da detto coefficiente al valore del momento magnetico di una molecola grammo o atomo-grammo delle varie sostanze, e per opera principalmente di Weiss si è potuto accertare che tali momenti sono per tutti i corpi paramagnetici con buona approssimazione multipli interi di un'unica grandezza fondamentale, il magnetone di Weiss. D'altra parte la teoria di Bohr ammette che nell'atomo vi siano correnti elettroniche le quali devono dare origine a fenomeni magnetici. In base a questa teoria si dovrebbe avere un valore perfettamente calcolabile del momento magnetico elementare, il cosiddetto magnetone di Bohr che risulta all'incirca cinque volte maggiore del magnetone sperimentale di Weiss. La teoria atomica adunque ammette per i vari atomi l'esistenza di un certo momento magnetico caratteristico di ognuno di essi, e ciò in dipendenza della varia forma e distribuzione spaziale delle varie orbite, momento che in alcuni casi può anche essere nullo. Poichè la presenza del moto elettronico nell'atomo è la causa del suo momento magnetico, questo ultimo deve essere collegato da una relazione al momento della quantità di moto totale del sistema di elettroni ruotanti intorno al nucleo. In base a questi concetti è facile stabilire la relazione che lega il momento della quantità di moto complessiva dell'atomo al momento magnetico da questo posseduto nello stato stazionario normale, e negli altri stati di eccitazione. Ora lo studio del comportamento dell'atomo nel campo magnetico permette di stabilire quale sia l'effettivo momento magnetico dell'atomo e risulta dall'esperienza che la relazione prevista teoricamente non è verificata; l'atomo presenta un'anomalia magnetica. Secondo Landé⁽²⁾ la

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) LANDÉ, *Die neuere Entwickl. der Quantentheorie*, p. 71.

relazione che lega il momento totale della quantità di moto, o il numero j proporzionale a questa al momento magnetico o al numero proporzionale μ è

$$\mu = gj$$

dove g è un fattore che rende conto appunto dell'anomalia magnetica e cioè permette di passare dal valore meccanico all'effettivo valore magnetico. Sono state trovate le espressioni del fattore g di Landé in tutti i casi fondamentali noti da un punto di vista empirico, ma rimane ancora sospesa la questione della origine di tale anomalia. Si ha dunque oltre il metodo diretto della misura della suscettività della sostanza un altro metodo di tipo ottico per la determinazione del momento magnetico dell'atomogrammo, e le determinazioni di questo tipo prendono il nome di determinazioni spettroscopiche.

Raccogliendo tutto il materiale sperimentale noto era stata stabilita dal Kossel⁽¹⁾ una legge riguardante la variazione del numero di magnetoni di ogni atomo del gruppo di elementi compresi fra l'Ar e il Cu. Essa era la seguente: passando da un elemento al successivo il numero di magnetoni dell'atomo aumenta o diminuisce di un'unità, passando da un elemento all'ione monovalente o da questo all'ione bivalente si ha anche la variazione di un'unità.

Deriva da questa legge che l'aumento o la diminuzione di un elettrone nell'atomo produce sempre la variazione di un magnetone. Dall'esperienza infatti risulta un aumento dall'Ar fino al V e una diminuzione dal V al Ni. Su questa curva venivano a trovarsi i valori ricavati da misure di suscettività magnetica e qualcuno ricavato dal comportamento spettroscopico. Sol tanto verso la parte superiore della curva si notavano particolarità che non si riuscivano a chiarire. Oltre ciò rimaneva sempre insoluta la questione della realtà del magnetone di Weiss o di Bohr. In questa Nota non sarà trattata tale questione ma saranno messe in evidenza altre obiezioni che possono farsi alla curva di Kossel.

Nello stato attuale delle nostre conoscenze sul sistema periodico la comparsa della proprietà paramagnetica negli atomi è dipendente dalla presenza in questo di strati elettronici interni in via di completamento. Così il paramagnetismo che compare nel gruppo di elementi precedentemente considerati dipende dalla formazione delle orbite di tipo 3_z , mentre il paramagnetismo del gruppo delle terre rare dalla formazione delle 4_z . Prendiamo in esame il paramagnetismo delle terre rare: dai risultati sperimentali raccolti e riordinati recentemente da Cabrera⁽²⁾ si ha la curva riportata in figura, in cui come ascisse sono segnati i numeri atomici e come ordinate i numeri di magnetoni. Il fatto fondamentale che si nota è la presenza di

(1) SOMMERFELD, *Atomhau*, ecc., 4^a ed., p. 630.

(2) CABRERA, « Journ. de Phys. », agosto-settembre, 1925.

due periodi distinti; il primo parte dal La e termina all'Eu, l'altro invece parte dall'elemento che precede l'Eu il Sm e va fino al Cp. Questa particolarità dipende dal fatto che in tale intervallo si formano le orbite 4_4 che sono appunto in numero di 14. Ora poichè questo gruppo di orbite è a sua volta diviso in due strati, uno di 6 orbite, strato N_{43} o 4^2F_3 , e l'altro

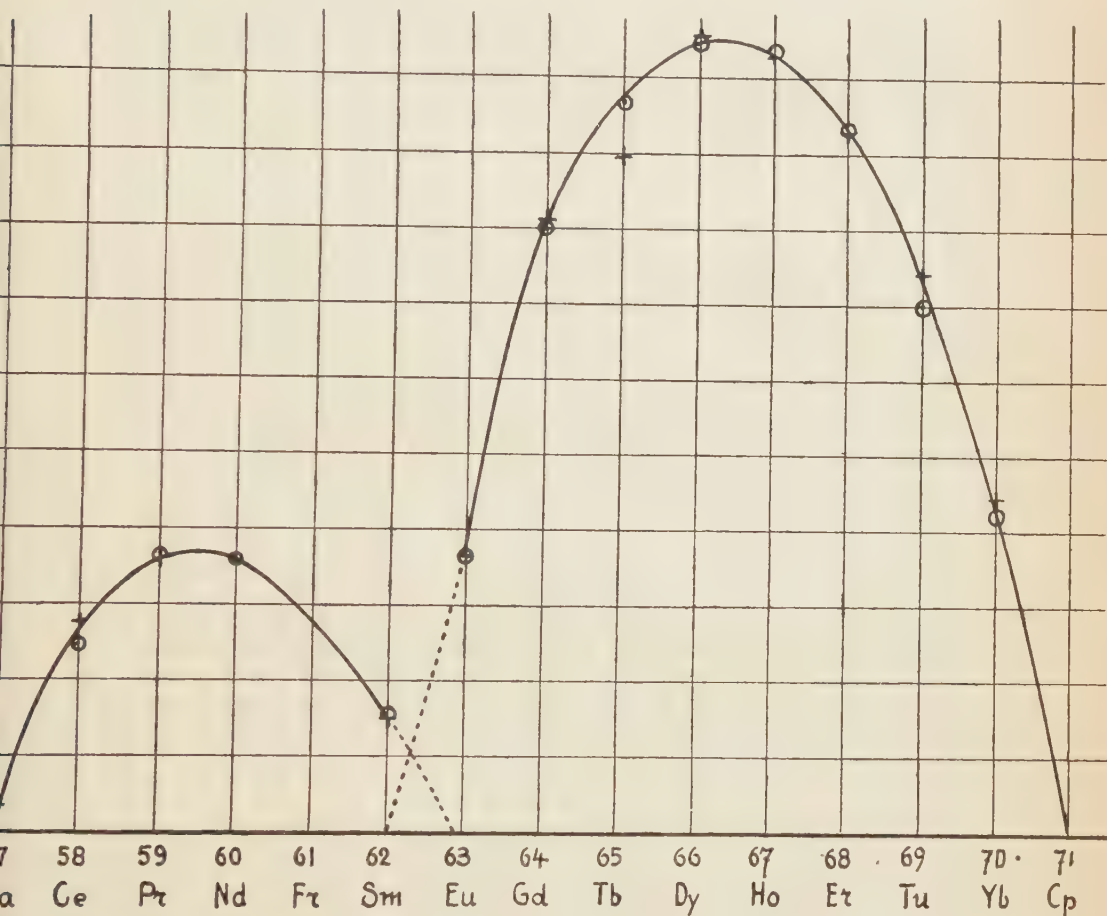


Fig. 1.

di 8 orbite, strato N_{44} o 4^2F_4 secondo la classificazione di Stoner⁽¹⁾, risultano nella curva appunto due periodi distinti uno di 6 l'altro di 8 elementi.

Posto ciò è evidente che un comportamento analogo è da aspettarsi per gli elementi compresi fra il Ca e lo Zn poichè anche per questi si ha la formazione di un duplice strato e precisamente di quello M_{32} o 3^2O_2 con 4 orbite e di quello M_{33} o 3^2O_3 con 6 orbite. La curva di Kossel non

(1) Cfr. LANDÉ, loc. cit.

risponde a tale requisito essendo, come si è detto, ad unico periodo. Inoltre per questa si nota sempre l'aumento o la diminuzione di un'unità nel numero di magnetoni mentre per alcuni di questi elementi l'ultimo elettrone si fissa su di un'orbita 3_3 e quindi a numero quantico azimutale 3, in altre in orbite 4_1 e ben difficilmente si comprende come si possa avere sempre la variazione di un magnetone soltanto passando da un elemento al successivo o al precedente. Questa serie di difficoltà può essere sormontata qualora ci si riferisca ai recenti risultati sulla distribuzione elettronica di tali elementi. Risulta infatti dall'esame sperimentale e teorico degli spettri molto

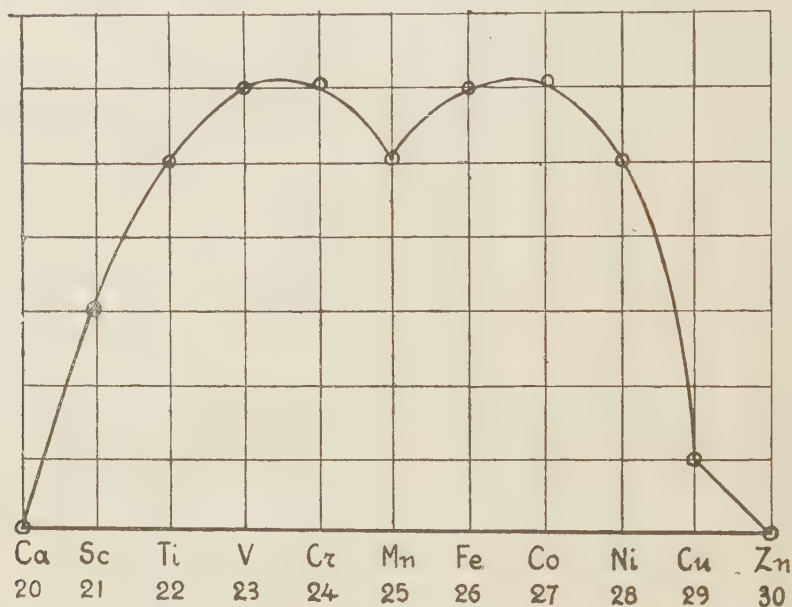


Fig. 2.

complessi di tali atomi che particolarità caratteristiche incominciano a comparire in questi. Russel e Saunders⁽¹⁾ infatti nello studio degli spettri emessi da atomi con due elettroni periferici hanno stabilito che nel fattore g dell'anomalia magnetica non compare il momento della quantità di moto di uno o dell'altro elettrone ma il loro momento risultante, e analoghi risultati sono stati ottenuti per atomi con più di due elettroni. È stato stabilito cioè che nel caso di più elettroni periferici è da parlare di momento risultante di tutti essi, e non basta quindi conoscere il tipo dell'orbita dell'ultimo elettrone fissato dall'atomo per conoscere il momento della quantità di moto complessiva ma bisogna anche stabilire in che modo questa si compone con quella degli altri elettroni periferici. Risulta allora che un'orbita

(1) RUSSEL e SAUNDERS, « *Astrophys. Journ.* » 61, 38, 1925.

di tipo 3_3 può aumentare al massimo di tre unità il momento totale ma può anche influire in maniera minore. Bisogna dunque conoscere il momento totale della quantità di moto degli elettroni periferici l , e il momento di rotazione totale r per passare alla determinazione del momento risultante j e in base alla relazione di Landé si può infine determinare il numero di magnetoni dell'atomo che si considera.

I recenti lavori di Hund⁽¹⁾ permettono di determinare i valori di j poichè, in base alla tabella costruita da questo A.

Elemento	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn
Termine fondamentale.	¹ S	² D	³ F	⁴ F	⁷ S	⁶ S	⁵ D	⁴ F	³ F	² S	¹ S

si ricava la seguente serie di valori per il numero j e dei corrispondenti gj

Elemento	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn
j	0	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{1}{2}$	0
$\mu = gj$	0	3	5	6	6	5	6	6	5	1	0

In figura si riportano i risultati ottenuti e si nota analogamente a quanto avviene per le terre rare la presenza di due periodi. La particolarità caratteristica è però la seguente: per questi due strati M_{32} , M_{33} i periodi non sono rispettivamente di 4 e di 6 elementi. Ma d'altra parte il numero di elettroni che si fissano sulle orbite 3_3 è dato dal seguente quadro

Elemento	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn
3_3	1	2	3	5	5	6	7	8	10	10
4_1	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2

e conseguentemente non si ha un primo stadio di formazione del livello M_{32} seguito da un secondo stadio di formazione del livello M_{33} poichè si passa da un elemento con 3 orbite 3_3 ad un elemento con 5 orbite 3_3 .

(1) HUND, « Zeit. für Phys. », 33, p. 345, 1925.

Resta infine da chiarire perchè sulla curva di Kossel veniva mascherata la doppia periodicità. Evidentemente ciò dipende dal fatto che tale curva era stata determinata in base alle misure di suscettività magnetica, gli elementi cioè si trovano in soluzione allo stato di joni. Anche per le terre rare i valori sono stati determinati per questa via, ma in tal caso le orbite producono il paramagnetismo ad uno strato molto profondo⁽¹⁾.

Concludendo: si è mostrato partendo dai dati spettroscopici che analogamente a quanto avviene per le terre rare anche per il gruppo di elementi fra il Ca e lo Zn è da notare un doppio periodo di variazione nel numero di magnetoni in funzione del numero atomico.

Chimica. — *Composti di addizione fra metalli tetra e bivalenti e basi organiche. (Probabile natura delle valenze secondarie).* Nota di G. SCAGLIARINI⁽²⁾ presentata⁽³⁾ dal Corrisp. M. G. LEVI.

Queste ricerche si possono mettere in relazione colla teoria di Debye e Huchel sulle soluzioni⁽⁴⁾.

Come si sa Debye e Huchel ammettono che gli elettroliti forti in soluzione anche concentrata siano totalmente dissociati. La porzione che, nella teoria classica delle soluzioni, si riteneva non dissociata, corrisponderebbe nella nuova teoria a quella porzione che è impegnata per le azioni intermolecolari e interioniche che si effettuano nelle soluzioni. Tali forze intermolecolari e interioniche sarebbero dovute secondo gli autori a forze di natura elettrostatica e l'attività termodinamica di una soluzione dipenderebbe dal prodotto di un coefficiente di attività per la concentrazione, quindi le attività dei componenti del sistema reagente dipenderanno dai potenziali elettrici delle particelle stesse, cioè dalla loro carica, dai loro momenti elettrici e dalla costante dielettrica del mezzo. In conseguenza di ciò si poteva facilmente prevedere che variando opportunamente la qualità del solvente e per conseguenza la costante dielettrica del mezzo doveva necessariamente variare l'insieme delle azioni intermolecolari a cui le dette attività sono legate e si doveva avere come conseguenza tangibile di tale fatto la formazione di sistemi finali (composti di addizione o complessi) differenti. I com-

(1) HUND (« Züt für Phys. », 33, p. 855) ha determinato teoricamente la curva del paramagnetismo delle terre rare e recentemente SOMMERFELD e LAPORTE (« Züt. für Phys. », 40, p. 333) si occupano della curva del paramagnetismo del gruppo Ca Zn per gli elementi allo stato di joni.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(3) Nella seduta del 21 novembre 1926.

(4) « Physikalische Zeitschrift », 26, p. 96 (1925).

posti riportati nella colonna di sinistra e ottenuti facendo reagire gli alogenuri di stagno, di titanio, cobalto, nichel con basi organiche, in soluzioni rispettivamente di cloroformio, di bromoformio, di tetracloruro d'etano, di dicloroetilene, di piridina, di acqua, di alcool, stanno a confermare quanto sopra:

$\text{SnJ}_4 \cdot 5\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	$\text{SnJ}_{44}\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 2\text{CHCl}_3$
$\text{SnJ}_4 \cdot 4\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 5\text{CHBr}_3$	$\text{SnJ}_4 \cdot 5\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 8\text{CHBr}_3$
$\text{SnJ}_4 \cdot 6\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 3\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_4$	$\text{SnJ}_4 \cdot 2\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$
$\text{SnBr}_4 \cdot 4\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$	—
$\text{SnBr}_4 \cdot 4\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_4$	precipitato giallo amorfo
$\text{SnBr}_4 \cdot 6\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{CHCl}_3$	$\text{SnBr}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{CHCl}_3$
$\text{TiJ}_4 \cdot 4\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 5\text{CHBr}_3$	precipitato rosso gelatinoso
$2\text{TiBr}_4 \cdot 7\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	—
$\text{TiCl}_4 \cdot 12\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 3\text{CHCl}_3$	—
$2\text{TiCl}_4 \cdot 7\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$	—
$\text{CoCl}_2 \cdot 4\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$	—
$\text{NiCl}_2 \cdot 4\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$	} dalla piridina ⁽¹⁾
$\text{CoBr}_2 \cdot 4\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$	
$\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$	—
$\text{NiCl}_2 \cdot 2\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$	} dall'alcool ⁽²⁾
$\text{CoCl}_2 \cdot 10\text{H}_2\text{O} \cdot 2\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	
$\text{NiCl}_2 \cdot 10\text{H}_2\text{O} \cdot 2\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	} dall'acqua ⁽³⁾
$\text{CoBr}_2 \cdot 10\text{H}_2\text{O} \cdot 2\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	
$\text{CoCl}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	—
$\text{NiCl}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	} dall'alcool
$\text{CoBr}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	

Del resto anche L. Cambi ⁽⁴⁾ aveva in altro caso fatto rilevare che facendo reagire cloruro di litio e cloruro di rame in soluzione di aceto-nitrile o di piridina otteneva due composti uno verde e l'altro azzurro delle formule rispettive: $\text{LiCl} \cdot \text{CuCl}_2 \cdot \text{C}_2\text{H}_3\text{N}$ e $3\text{LiCl} \cdot \text{CuCl}_2 \cdot 9\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$.

Anche col variare della concentrazione delle soluzioni reagenti si doveva pure influire sulla composizione del prodotto di addizione formantesi in seno

(1) Preparati da REITZENSTEIN, « Zeit. Anorg. Chem. », 11, p. 254 (1896); GROSSMANN, « Ber. », 37, p. 1256 (1904).

(2) Preparati da REITZENSTEIN, « Annalen », 282, p. 267 (1894).

(3) Preparati da G. A. BARBIERI e F. CALZOLARI, « Rendic. R. Acc. Lincei », 1910, II, p. 583.

(4) « Gazz. Chim. Ital. », 39, I, p. 361 (1909).

al liquido; difatti ciò risulta manifesto qualora si comparino i composti riportati nella colonna di sinistra con quelli della colonna di destra. In essi infatti si vede che eccedendo o colla base o coll'alogenuro di stagno e di titanio si possono ottenere composti differenti. Anche la letteratura ci fornisce vari esempi in appoggio a questo modo di vedere. Infatti Fritz Ephraim ⁽¹⁾ agendo con ammoniaca gassosa sui benzoati, trinitrobenzoati, benzolsolfonati, solfoanilati, ftalati, ecc. di cobalto, nichel, rame e zinco a temperature e pressioni differenti ottenne composti in cui il numero di molecole di ammoniaca legate al medesimo sale variavano successivamente da otto a sei a quattro e a due. Dunque variando due parametri termodinamici, si veniva a variare la composizione del composto a valenza secondaria. Si vede da ciò che queste valenze secondarie sono intimamente legate alle attività intermolecolari. Da ultimo ci si può chiedere che cosa siano queste valenze secondarie e la natura di esse. In base a quanto si è sopra esposto, consideriamo il momento elettrico di una molecola formata dall'unione di diversi ioni. Naturalmente tale unione può avvenire con differenti modalità: se avviene in modo da costituire una molecola col massimo grado possibile di simmetria elettrica, allora il momento elettrico della molecola sarà nullo. Al contrario se la molecola formatasi presenta il massimo grado possibile di dissimetria elettrica, allora il suo momento elettrico sarà pure massimo. Fra queste due estreme, possono verificarsi tutte le possibilità intermedie. Lo studio del momento elettrico delle molecole iniziato dal Langevin in seguito fu approfondito dal Debye e allievi ⁽²⁾. Identificando in queste affinità residuali delle molecole, dovute ai loro momenti elettrici, le valenze secondarie, si potrebbe spiegare ragionevolmente la formazione dei composti di addizione ed in genere dei complessi, venendo a comprendere così anche le valenze secondarie nel quadro generale che tende a considerare le affinità chimiche in fenomeni di natura elettrica.

Sto eseguendo ricerche in proposito che a suo tempo comunicherò.

(1) « Berichte », 51, I, p. 130 e p. 644 (1918).

(2) DIE MARX, *Handbuch der radiologie*, Band VI, p. 567 e segg.

Chimica. — *Reagibilità allo stato solido del biossido di manganese.* Nota ⁽¹⁾ di F. DE CARLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

La decomposizione termica del biossido di manganese si compie in due tempi: dapprima due molecole di MnO_2 perdono un atomo di ossigeno e formano Mn_2O_3 ; e in seguito questo per ulteriore riscaldamento, perde ancora ossigeno e si trasforma in Mn_3O_4 , stabile a temperatura elevata.

Meyer e Rotgers ⁽³⁾ stabilirono che la prima decomposizione avviene sopra 530° e la seconda a 940° .

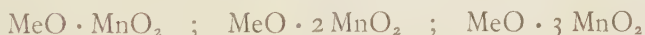
Askenasy e Klonowsky ⁽⁴⁾ con misure di tensione di dissociazione dimostrarono che il biossido di manganese comincia a perdere ossigeno in misura apprezzabile verso 400° e che a 536° il primo stadio della decomposizione è compiuto.

La curva di riscaldamento (diagr. I) che ho tracciato usando un prodotto molto puro e servendomi dello stesso dispositivo descritto nelle ricerche precedenti ⁽⁵⁾, mostra nettamente due arresti in corrispondenza delle due trasformazioni endotermiche.

Poco sopra i 400° si comincia a notare un leggero rallentamento che termina con una fermata a 530° . Fra 930° e 940° un nuovo arresto indica il compiersi della seconda trasformazione.

Reagibilità con gli ossidi alcalino-terrosi. — I composti del biossido di manganese con gli ossidi dei metalli alcalino-terrosi, che si trovano descritti nella letteratura ⁽⁶⁾, possono contenere da una a sette molecole di MnO_2 per una di ossido basico e sono generalmente sostanze cristalline di colore scuro che va dal verde oliva al nero.

Le curve di riscaldamento eseguite con mescolanze di MnO_2 e BaO , SrO , CaO nelle proporzioni:



mostrano il verificarsi di reazioni esotermiche che si iniziano a temperature relativamente basse (150° - 250°), e la cui intensità, come nei casi precedentemente descritti, è massima con il BaO e minima con il CaO (diagr. II e III).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 21 novembre 1926,

(3) «Z. anorg. Chem.», 57, 104 (1908).

(4) «Z. für Elektrochem.», 16, 107 (1910).

(5) «Rend. Acc. Lincei», [5°], XXXIII; 512 (1924); [6°], 1, 533 (1925). «Gazz. Chim.», LVI; 55 (1926).

(6) ABEGG., *Hand. anorg. Chem.*, IV, 2, p. 834; GMELIN KRAUT'S, *Hand. anorg. Chem.*, III, 2, p. 259.

Reagibilità con ossidi suscettibili di essere ossidati. — Sperimentai con Cu_2O ed SnO . L'ossidazione dovuta all' MnO_2 si manifesta in maniera particolarmente vivace; l'ossidulo di rame comincia a reagire a 380° (diagr. IV); l'ossido stannoso a 180° (diagr. V).

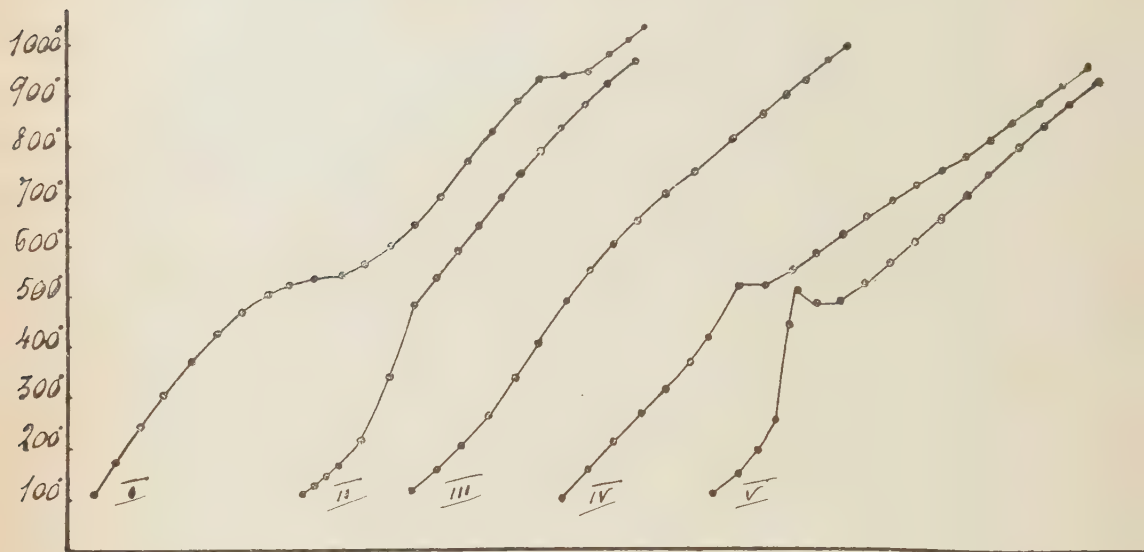


Fig. 1.

Reagibilità con le anidridi. — Comportamento simile a quello osservato con PbO_2 .

Fa solo eccezione il sequiossido di cromo che non reagisce affatto.

Riassumo nella tabella seguente le caratteristiche delle reazioni osservate con queste sostanze.

N.	Numero del diagramma	Anidride	Caratteristiche della reazione	Aspetto della massa dopo la reazione
1	VI	As_2O_3	iniz. 450° , fine 700°	Polv. grigia molto chiara
2	VII	Sb_2O_3	» 350° » 600°	» gialla
3	VIII	Bi_2O_3	debole accel. tra 300° e 500°	» grigio chiara
4	IX	B_2O_3	nessun accel., mancano gli arresti dovuti a scomp. di MnO_2	» grigia con qualche parte fusa di colore violetto
5	I	Al_2O_3	nessuna reazione	} Mn_3O_4 mescolato con l'anidride inalterata
6	»	Cr_2O_3	» »	
7	»	SnO_2	» »	
8	»	TiO_2	» »	
9	»	SiO_2	» »	
10	X	WO_3	accel. tra 300° e 500°	Polv. verde oliva
11	»	MoO_3	» » 200° e 400°	» grigio-verde parzialm. fusa.

Il colore violetto del prodotto ottenuto con l'anidride borica è evidentemente dovuto al borato manganoso. Bisogna concludere perciò che in queste condizioni la riduzione dell' MnO_2 non si arresta a Mn_3O_4 ma si spinge fino a MnO .

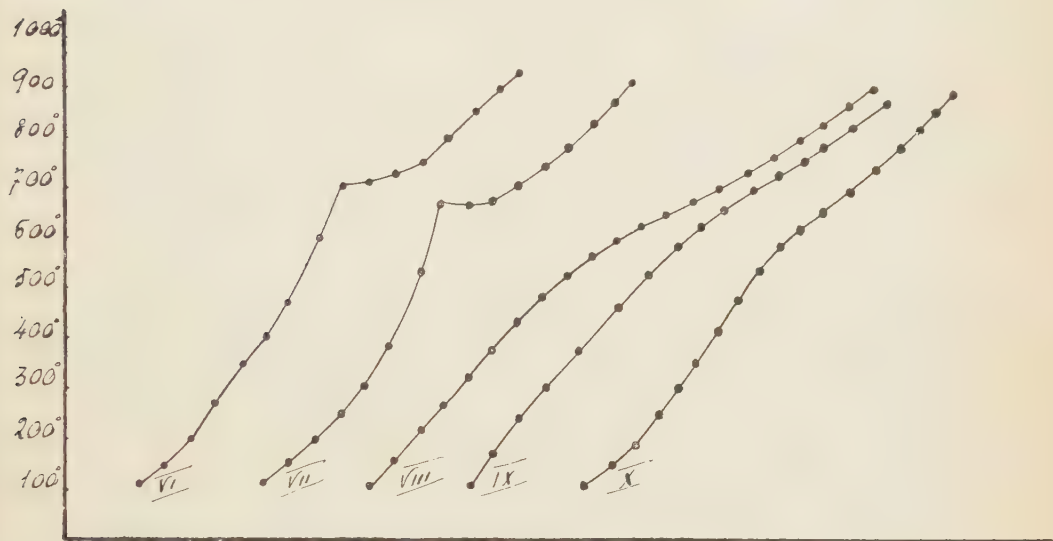


Fig. 2.

Comportamento rispetto a MgO , ZnO , CuO , CdO , PbO . — Questi ossidi non esercitano influenza apprezzabile sulla decomposizione del biossido di manganese. Sperimentai sempre con miscugli in proporzioni equimolecolari, impiegandone quantità abbastanza forti (15-20 gr. in media) per mettermi in condizioni di apprezzare effetti termici anche molto deboli.

Le trasformazioni endotermiche si sono verificate sempre a temperature molto vicine a quelle di decomposizione del biossido di manganese puro.

Debbo perciò concludere che la decomposizione di MnO_2 non è suscettibile di venire influenzata dalla presenza degli ossidi suindicati.

I risultati ottenuti sia con il biossido di piombo che con quello di manganese, posti a confronto con quelli di Hedwall ⁽¹⁾, nei riguardi del biossido di bario, permettono di concludere affermando che queste tre sostanze analogamente alle anidridi e a molti sali, presentano una spiccata capacità di reagire allo stato solido, con un gran numero di prodotti di natura diversa.

(1) «Z. anorg. Chem.», 108, 119 (1919).

Le reazioni che si verificano, si possono dividere in quattro gruppi distinti:

1. Ossidazioni di ossidi suscettibili di essere ossidati.

Queste reazioni sono comuni a tutti e tre i biossidi esaminati.

2. Salificazioni con le anidridi precedute talvolta da ossidazione delle anidridi stesse.

Alcune anidridi abbassano la temperatura di decomposizione dei biossidi e si salificano poi con i loro prodotti di riduzione. Altre volte la salificazione è preceduta dall'ossidazione dell'anidride che passa a un grado di valenza superiore a spese dell'ossigeno del biossido.

3. Addizione con altri ossidi metallici.

La proprietà di addizionarsi direttamente ad ossidi salini è caratteristica solo per PbO_2 e MnO_2 , che, come è noto, hanno proprietà di anidridi. Gli ossidi alcalino terrosi sono quelli che reagiscono più facilmente formando i piombati e i manganiti.

4. Abbassamento della temperatura di decomposizione del biossido.

Hedwall, riscaldando il biossido di bario in presenza di MgO , CuO , CdO e CeO_2 , notò che lo svolgimento di ossigeno cominciava a manifestarsi a temperature molto più basse di quella che si registra riscaldando il BaO_2 da solo. Questa singolare influenza degli ossidi fu interpretata dall'autore⁽¹⁾ ammettendo la formazione, in un primo tempo, di composti di addizione tra biossido ed ossido. Questi composti, molto instabili, cederebbero parte del loro ossigeno a temperature molto basse.

Come già ho fatto osservare, questa proprietà è per ora ristretta al solo caso del BaO_2 perchè con gli altri due biossidi con i quali ho sperimentato non si è osservato mai nulla di simile.

Le temperature, alle quali tutte queste reazioni si compiono, fanno escludere ogni possibilità di intervento dell'ossigeno gassoso proveniente dalla decomposizione del biossido.

Bisogna perciò ammettere, come anche in studi recenti hanno fatto Tammann⁽²⁾ ed Hedwall⁽³⁾, che tali trasformazioni tra sostanze solide, siano dovute al movimento degli atomi nei reticoli cristallini.

L'innalzarsi della temperatura, aumentando l'intensità di queste oscillazioni, determinerebbe un cambiamento di posto delle particelle nei reticoli

(1) « Journ. Phys. Chem. », 28, 1318, (1924).

(2) « Z. anorg. Chem. », 149, 20, (1925).

(3) Loc. cit.

favorendo il passaggio di atomi da un reticolo all'altro con conseguente formazione di nuovi composti.

L'eventuale presenza di tracce di umidità, alle quali il Balarew⁽¹⁾ annette grande importanza, o la formazione di piccole quantità di masse eutettiche possono solo contribuire a rendere più complete tali trasformazioni favorendo l'avvicinamento dei granuli reagenti.

Biologia. — *Sulla sistematica biologica dei Petromizonti.* Nota di G. COTRONEI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Le « gemme estivanti » e la biologia dei cespugli di Clavelina lepadiformis (Müller).* Nota del dott. M. SALFI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. DELLA VALLE.

Durante la mia permanenza alla Stazione Zoologica di Napoli, ho avuto occasione di poter compiere ripetute e periodiche osservazioni su quelle modificazioni particolari dei cespugli di *Clavelina lepadiformis* (Müller), consistenti nella regressione degli ascidiozoi, nella modificazione della struttura dello stolone e specialmente nella formazione di corpi speciali a riserva capaci di resistere ad avverse condizioni ambientali e di evolversi in un successivo tempo favorevole.

Le notizie che si hanno circa le fasi biologiche dei cespugli di *Clavelina* sono assai scarse; i lavori del Giard e Caullery⁽³⁾, del Kerb⁽⁴⁾, dell'Huxley⁽⁵⁾ mentre accennano a varî dei punti più salienti del ciclo di *Clavelina* sono tutt'altro che esaurienti a questo riguardo.

Le osservazioni sono state da me compiute sia su colonie provenienti dal mare, in tutti i periodi dell'anno, sia su cespugli tenuti in acquario.

Una prima parte delle osservazioni si riferisce alle varie fasi che attraversa un cespuglio di *Clavelina*, dalla fase fiorente, che per il Golfo di Napoli corrisponde ai mesi invernali ed al principio della primavera, alla

(1) «Z. anorg. Chem.», 134, 117, (1924); 136, 216, (1924); 138, 349, (1924); 145, 117, (1925).

(2) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

(3) GIARD A. et CAULLERY M., *Sur l'hivernage de la Clavelina lepadiformis (Müller)*, «C. R. Acad. Sc.», tome 123, p. 318, 1896.

(4) KERB H., *Biologische Beiträge zur Frage der Ueberwinterung der Ascidien*, «Arch. Mikr. Anat.», Bd. 72, p. 386, taf. 18, 1908.

(5) HUXLEY J. S., *Studies in Dedifferentiation, VI. Reduction phenomena in Clavellina lepadiformis*, «Pubbl. Staz. Z. Napoli», vol. 7, p. 1, tav. 1-9, 1926.

fase di regresso con relativa scomparsa degli ascidiozoi, modificazione dello stolone, comparsa delle gemme estivanti (estate, principio d'autunno), ed infine alla fase di ritorno delle attività biologiche normali (fine d'autunno, principio dell'inverno).

Contrariamente a quanto osservarono il Giard, il Caullery ed il Kerb pei mari nordici, nei quali il periodo di regresso corrisponde alla stagione invernale, nel Golfo di Napoli questo si verifica nella stagione estiva. Si ha, insomma, in *Clavelina* una vera estivazione delle colonie, estivazione osservata già nel Golfo di Napoli dal Della Valle ⁽¹⁾ per *Perophora Listeri* Wieg. e dal Bancroft ⁽²⁾ per *Botrylloides Gascoi* D. Valle.

Le cause che producono in *Clavelina* tali complessi fenomeni di regressione sono da ricercare nelle mutate condizioni chimico-fisiche ambientali e particolarmente nell'elevarsi della temperatura. Esperienze eseguite allevando piccoli cespugli fiorenti in cristallizzatori la cui acqua era giornalmente rinnovata ma la temperatura veniva gradualmente aumentata fino a raggiungere i 20 gradi centigr., mostrarono appunto la regressione degli ascidiozoi, le modificazioni dello stolone e la costituzione delle speciali gemme estivanti. L'allevamento di cespugli in acqua non rinnovata produce, per l'accumularsi di prodotti tossici, i fenomeni di regresso, ma non soltanto negli ascidiozoi bensì in tutta la colonia, compresa la porzione stoloniale; ed è raro assistere alla formazione di elementi di riserva, quali le gemme estivanti.

Le gemme estivanti sono state oggetto di un accurato esame morfologico ed istologico.

Alle estremità degli stoloni ed a volte anche nelle zone mediali si notano queste masse bitorzolute di color bianco-gialliccio. Ognuna di queste masse risulta formata da più gemme ancora non perfettamente individualizzate, ma che conservano larghe connessioni. La gemma poi completamente costituita ha forma irregolarmente ovoidale. Quanto alla struttura si distinguono nella gemma estivante due parti ben definite: 1^a, una esterna, l'ectoderma; 2^a, l'altra interna, costituita da una massa cellulare mesenchimale.

L'ectoderma è formato da cellule cilindro-cubiche, il cui citoplasma è poco colorabile, ma i cui limiti cellulari sono facilmente visibili anche in preparati scolorati. Il nucleo addossato verso la parete basale si colora fortemente; è piccolo, relativamente alla massa cellulare, ed intorno ad esso per circa un terzo della massa citoplasmatica si nota l'accumulo di granuli di riserva (pseudovitello) fortemente colorabili, framminist ai quali sono frequenti piccole gocce di grasso.

(1) DELLA VALLE A., *Contribuzioni alla Storia Naturale delle Ascidie composte del Golfo di Napoli, con la descrizione di alcune specie e varietà nuove e di altre poco note*. Napoli, 1877.

(2) BANCROFT F. W., *Aestivation of Botrylloides Gascoi Della Valle*, «Mark Anivers. Vol.», New York, p. 147, tav. 11, 1903.

La massa mesenchimale interna consta di elementi vari; in generale questi sono maggiormente affollati verso la parete ectodermica. Predominano elementi polinucleati, rotondeggianti a citoplasma granuloso, scarsamente colorabile. Si notano, oltre a questi, ancora elementi contenenti inclusi vari (sferule di grassi, granuli di pseudovitello, ecc.). Gruppetti di cellule addossate le une alle altre in forma di morula sono anche frequenti.

Relativamente alla presenza del setto dello stolone nella gemma estivante interamente costituita, tutte le numerose osservazioni fatte su sezioni variamente colorate mi portano alla conclusione che nelle gemme estivanti di *Clavelina* non esiste traccia di un setto derivato dal setto dello stolone. L'origine di queste gemme particolari risale all'accumularsi di elementi cellulari mesenchimali migranti, prima nelle zone più distali delle ramificazioni stoloniali, ma in seguito anche in altri punti più prossimali ai singoli ascidiozoi. Correlativamente all'accumularsi delle masse mesenchimali si nota una tendenza delle cellule ectodermiche ad assumere una forma sempre più cilindrica e può notarsi un attivo aumento di queste con la costituzione di sacculazioni, che ben presto divengono sede di accumuli mesenchimali, sacculazioni interpretate dal Seeliger come camere di nutrizione dei giovanissimi ascidiozoi, e quindi perfettamente sterili relativamente alla produzione di nuovi individui. Successivamente tali sacculazioni diventano sempre più indipendenti, fino ad isolarsi completamente. Ognuna di queste costituirà, individualizzandosi, una gemma estivante. Il setto dello stolone è perfettamente estraneo a tutte queste modificazioni, ma gradualmente si riduce fino a scomparire. Naturalmente è da supporre che le cellule derivate dalla sua desintegrazione prenderanno eventualmente parte alla costituzione dei vari elementi della massa cellulare interna della gemma insieme con gli altri elementi di origine mesenchimale.

L'evoluzione della gemma estivante in un nuovo ascidiozoo si compie perfettamente a spese della massa mesenchimale interna, iniziandosi con la costituzione di una cavità centrale; l'ectoderma, come in tutte le gemme di sinascidie, resta perfettamente estraneo: le sue cellule, cilindro-cubiche a poco a poco riacquistano la perduta forma di cellule appiattite.

Numerose osservazioni portano, in generale, alla constatazione di un rapporto di dipendenza tra regressione degli ascidiozoi e comparsa delle gemme estivanti. Mediante tali formazioni le colonie estive ridotte a semplici ramificazioni intricate di stoloni, ricostituiscono i loro zoidi dapprima piccoli e pigri, ma che con l'aggiunta di altri zoidi derivati dei nuovi rami stoloniali ricostituiscono il cespuglio nella sua floridezza.

Biologia. — *Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta: le capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di « B. mori ».* Nota di C. JUCCI, presentata dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *L'eredità materna e la paterna nelle capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di bachi da seta.* Nota di C. JUCCI, presentata dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Su alcuni fenomeni che accompagnano la crisi di maturazione sessuale delle Gambusie* ⁽¹⁾ Nota del prof. E. REMOTTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

Guidate da un criterio forse prevalentemente morfologico, le ricerche, nel campo dello studio comparato dei due sessi, sono state limitate quasi esclusivamente alle differenze di forma estrinsecanti attraverso i cosiddetti caratteri sessuali secondari, e al problema della loro genesi.

Accanto a queste, un campo, oserei dire nuovo, si apre alle speranze del ricercatore: la fisiomorfologia e l'anatomia chimica comparate del sesso che di questo cercano di scrutare, ora nelle strutture, ora negli umori, gli indici differenziali e specifici.

L'abbondante e interessante materiale di Gambusia, che ho potuto esaminare, mi ha permesso di estenderne lo studio appunto su questo terreno.

Oggetto di mie precedenti ricerche ⁽³⁾ fu il comportamento biochimico nei rapporti con l'ambiente, studiato comparativamente nel maschio e nella femmina adulti di questa specie, al fine di dimostrare eventuali differenze che, come nel lavoro accennavo, potevano, fra l'altro, darci anche una spiegazione della diversa capacità di resistenza alle condizioni ambientali e dell'evidentissima sproporzione tra i due sessi di questa specie medesima.

(1) Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Bologna, diretto dal professore E. Giacomini.

(2) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1926.

(3) REMOTTI E., « Boll. di Pesca, Piscicoltura e Idrobiologia », anno II, 1926.

I risultati ottenuti dimostrarono una netta divergenza nel senso di una maggiore intensità, nei maschi, dei fenomeni catabolici cui consegue minore capacità di adattamento alle condizioni ambientali, e di una particolare sensibilità alle variazioni della CO_2 dell'ambiente, sia specificamente, sia in rapporto al Ph.

Ricorderò in proposito, senza dilungarmi su altre ricerche non direttamente attinenti al nostro argomento, come, per una diversità dei processi respiratori parlino anche, se pure indirettamente, i dati dell'analisi biochimica di forme diverse, dati che pongono in evidenza una differenza nel contenuto di materiale energetico. Così nel filugello (Farkas)⁽¹⁾ la femmina contiene, espressa in calorie, una proporzione di materiale energetico per quasi un terzo superiore a quello del maschio, differenza che si accenna notevolissima se si considera il contenuto in materiale energetico specifico della sostanza secca, mentre d'altro lato, sempre in favore di diverso andamento del ricambio, parla, nella stessa specie, la maggior perdita in calorie, a parità di sostanza consumata, del maschio in confronto della femmina. Anche nelle api vi è un andamento caratteristico nel ricambio delle forme che compongono la società. Nei vertebrati, limitandoci sempre alle questioni più direttamente connesse col ricambio, ricorderò l'eccedenza di glicogeno nei muscoli del maschio di cavia in confronto a quelli della femmina.

Complessivamente quindi si può parlare di differenze, oltrechè morfologiche, più profonde di attività funzionali o di chimismo, ciascuno dei due sessi presentando condizioni sue proprie e caratteristiche che sembrano riassumersi nella specificità chimica, che, in alcuni casi, anche l'analisi sierologica ha potuto dimostrare.

Ritornando ora al problema che ci interessa, mi parve importante ricercare se le differenze rilevate nel comportamento biochimico — espressione di più profonde divergenze metaboliche — rappresentassero qualche cosa di innato che l'individuo porta con sé dall'inizio dello sviluppo, qualcosa di più immediatamente legato all'incognito fattore del sesso — lo si voglia o no ritenere materializzato, per così dire, nel cromosoma accessorio — o non piuttosto, invece, fossero da riferirsi al funzionamento delle glandole sessuali, la cui attività modificherebbe il metabolismo complessivo, e, come tali, si rivelassero perciò dopo la crisi di maturazione.

Ho ripreso quindi le mie ricerche su individui giovani di *Gambusia* non ancora sessualmente maturi. Le esperienze sono state condotte con lo stesso metodo delle precedenti, anche per una più sicura comparabilità dei risultati. Sono quindi ricorso, per lo studio delle esigenze respiratorie, al solito sistema della duplice serie di bottiglie disposte a scala di volume regolarmente variabile, e, per la sensibilità alle variazioni della CO_2 , è correlativamente del Ph, all'analisi comparativa dei due sessi in ambiente a

(1) FARKAS, « Pflügers Arch. », 1898.

concentrazione crescente della CO_2 , che vi si accumula con la respirazione, e in ambiente a CO_2 e Ph costanti. Per quest'ultimo genere di esperienze mi sono servito dell'apparecchio già descritto, a circolazione di aria attraverso la NaOH, e che è risultato ottimo allo scopo.

In ripetute serie di esperimenti ho potuto ora constatare come le giovani Gambusie presentino nelle esigenze respiratorie una tipica uniformità, che è rotta solo dall'avvento della maturazione sessuale, profonda crisi dell'organismo che, attraverso l'esplosione dell'attività endocrina delle gonadi — entro certi limiti finora più o meno latenti — non solo ne investe alcune particolarità caratteristiche, ma imprime le sue stigmate a tutto il metabolismo generale, regolandolo in modo specifico è diverso nei due sessi.

Attraverso le nuove esperienze si è potuto quindi dimostrare per i processi ossidativi — contrariamente ai risultati ottenuti sugli adulti, fra i quali le femmine dimostravano una capacità di adattamento di cui non apparivano altrettanto dotati i maschi — un comportamento eguale dei due sessi. Anche per il Ph le forme immature tendono a eguagliarsi, accostandosi ad un valore prossimo a quello presentato dalle femmine mature.

Se ora si pensa che il grado di resistenza alle condizioni della CO_2 e del Ph ambientali, per i rapporti che inevitabilmente, attraverso le membrane branchiali, devono intercorrere fra i liquidi esterni e gli interni, è da ritenersi in stretta correlazione con lo stato di questi ultimi e con la diretta attività quindi dei tessuti dell'organismo, ne risulterà che la maturazione sessuale, accanto alle modificazioni funzionali ben note, deve indurre più profonde variazioni nell'equilibrio generale ionico o salino-proteico dell'organismo stesso e nelle sue possibilità di reazione e di adattamento, una variazione cioè dell'intero chimismo organico, variazione che si esplica in senso diverso nei due sessi.

A cambiamenti consimili di chimismo, in forme peraltro molto lontane, accennano anche le ricerche di Smith⁽¹⁾, che sulle Dafnie avrebbe dimostrato una diversa forma di metabolismo nella fase partenogenetica, durante la quale si accumulerebbe glicogeno, e in quella sessuale ad accumulo prevalentemente lipoideo.

Come d'altro lato la crisi puberale induce differenziazioni morfologiche nuove e cambiamenti profondi in molte attività esistenti — per una correlazione così stretta che, ove il funzionamento sessuale acquisti carattere di periodicità, questo si riflette sulle manifestazioni ad esso collegate — così non è da meravigliarsi che esso possa avere la sua più vasta ripercussione sul chimismo generale, conferma, forse lontana e indiretta, di quella specificità chimica dei sessi, quale le ricerche particolarmente di Russo tenderebbero a dimostrare, se il funzionamento delle glandole sessuali può avere tale ripercussione da modificare, col Ph interno, gli stessi substrati chimici dell'organismo.

(1) SMITH, « Quart. Journ. of Microsc. Scien. », 1911, 1913.

E che, d'altro canto, i momenti di crisi profonda morfologica si accompagnino e, per così dire, s'innestino a più profonde crisi chimico-fisiologiche, lo dimostrerebbero, per una fase sia pure molto diversa della vita, le ricerche di Aleskin ⁽¹⁾ che ha rilevato le brusche variazioni del Ph nel sangue della rana al momento della metamorfosi, variazioni per le quali si stabilisce una condizione di maggior acidità, che diviene permanente per la nuova successiva fase di vita.

Del resto, poichè la metamorfosi o la crisi sessuale sono in talune forme accompagnate dall'insorgere di tropismi che le conducono a cambiamenti così profondi d'ambiente verso condizioni del tutto nuove del Ph come della concentrazione gasosa, non è inverosimile ritenere che nelle modificazioni appunto del mezzo interno, le quali creano nuove esigenze in confronto dell'ambiente, sia da ricercarsi uno dei fattori delle migrazioni stesse.

L'accurata analisi infine dei risultati delle presenti esperienze, relativamente alla resistenza verso variazioni del Ph, ci dimostrano che, se essi tendono, come più sopra abbiamo detto, ad accostarsi ai valori delle femmine mature, restano pur sempre, sebbene lievi, differenze simili a quelle presentate dagli adulti, differenze che ci permettono di intravedere il sesso, prima ancora che la maturazione, con tutto il corredo fisiomorfologico che l'accompagna, ci offra una indicazione precisa.

Tutto ciò ci proverebbe che, se la sessualità è di fatto contraddistinta da un particolare chimismo la cui manifestazione più palese si avrebbe all'epoca della crisi sessuale, tuttavia, ancor prima di questa, il mezzo interno accenna già, dal punto di vista biochimico, a quelle differenze che si renderanno apertamente manifeste con l'entrata in piena attività dell'organo stesso, quando esso, inseritosi nell'economia organica, nuovo anello della catena metabolica, farà decisamente risentire i suoi effetti, ridestando nell'organismo l'eco dei consensi e delle correlazioni funzionali, che le oscure forze del sesso dovevano avere preparato.

Se ciò che precede può stare ad indicare dunque come i due sessi siano contraddistinti da tutto un caratteristico proprio corredo biochimico, non possiamo ancora con eguale certezza affermare quanta parte possa avere nel fenomeno un'originaria sessualità del germe e quanta le gonadi, le quali, se non ancora mature, pure si preparano ad assolvere un compito così importante per la specie. Ma in complesso tali divergenze d'indole fisiologica, che le nostre presenti ricerche mettono in evidenza in forme giovani prima ancora del sopravvenire della crisi sessuale, avvalorano l'idea che la differenziazione dei sessi sia correlativa ad una precoce differenziazione degli umori e, riconnettendosi con le differenze morfologiche da un lato, istochimiche dall'altro, non farebbero che orientare sempre più il problema del sesso verso una specificità non solo morfologica, ma ancora chimica.

(1) ALESKIN, « Biochemische Zeit. », Bd. 170, I.

*
* *

Riassumendo, le forme sessualmente immature di *Gambusia* presentano, di fronte ai processi ossidativi, un comportamento uniforme, rotto solo dall'avvento della maturazione sessuale che imprime un andamento diverso nel maschio e nella femmina.

Nelle esigenze invece, in rapporto ai valori di Ph, già si notano, sebben lievi, differenze simili a quelle presentate dagli adulti, differenze che ci permettono di intravedere il sesso prima ancora che la maturazione, con tutto il corredo fisiomorfologico che l'accompagna, ci offra una indicazione precisa.

Biologia. — *Una possibile variante dell'ologenesi.* Nota di D. ROSA presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

G. C.

ERRATA-CORRIGE

Chimica. — *Costituzione e spettri d'assorbimento dei nitrososolfuri del ferro.* Nota del Corrisp. L. CAMBI e di L. SZEGÖ.

Nella Nota apparsa sotto questo titolo, nell'ultimo fascicolo dei « Rendiconti » (1), per un'omissione tipografica sono stati pubblicati a pag. 497 i diagrammi, riferentisi alle misure discusse nella Nota stessa, senza la seguente tabella esplicativa delle singole curve che recavano il numero d'ordine da 1 a 6 nella fig. 1 e da 1 a 9 nella fig. 2. Detti numeri corrispondono alle indicazioni seguenti:

Fig. 1:

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| (1) $K \cdot S_3Fe_4(NO)_7$ M/500 | (4) $Fe(NO)SO_4$ M/25 |
| (2) $K \cdot SFe(NO)_2$ M/100 | (5) $Fe(CNS)_3$ M/20 |
| (3) $K \cdot S_2O_3Fe(NO)_2$ M/250 | (6) $Fe(C_6H_5N_2O_2)_3$ M/100 . |

Fig. 2:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $K \cdot S_3Fe_4(NO)_7$ M/250 | (6) $C_6H_5 \cdot SFe(NO)_2$ M/500 |
| (2) $K \cdot S_3Fe_4(NO)_7$ M/2500 | (7) $K \cdot S_2O_3Fe(NO)_2$ M/500 |
| (3) $K \cdot S_3Fe_4(NO)_7$ M/10.000 | (8) $Fe(CNS)_3$ M/500 |
| (4) $Fe(C_6H_5N_2O_2)_3$ M/500 | (9) $Fe(NO)SO_4$ M/50 |
| (5) $K \cdot SFe(NO)_2$ M/250 . | |

Inoltre a p. 492 alle linee 24 e 25 nelle equazioni indicate con II e III deve leggersi, in luogo di Fe^{++} , $2Fe^{++}$.

(1) Questi « Rendiconti », vol. IV, fasc. 11 (1926), 491.

INDICE DEL VOLUME IV, SERIE VI. — RENDICONTI

1926

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — Eletto Socio Corrispondente. 80.
ID. — « Osservazioni sui moti dei vapori metallici nelle macchie solari ». 242.
ACQUA C. — « Il “ virus ” della malattia del giallume (poliedria) nel baco da seta in rapporto con le moderne teorie sui “ virus filtrabili ” ». 73.
ADUCCO V. — Eletto Socio Nazionale. 80.
ARMELLINI G. — « Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili ». 242, 415.
ID. — « Sopra la differenza tra la grandezza visuale e la grandezza bolometrica delle stelle, in relazione alla temperatura assoluta ». 242, 337.
ASTON F. W. — Eletto Socio Straniero. 80.

B

- BAGLIONI S., BRACALONI L. e GALAMINI A. — « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Il contenuto dell'alcool nel sangue (alcoolemia) dell'uomo a digiuno, in seguito ad ingestione di bevande alcooliche ». 505, 545.
BARBIERI U. — « Determinazione astronomica di latitudine ed azimut eseguita a Monte Settepani nel 1911 ». 132, 195.
ID. — « Azimut assoluto di Eremo di Cherasco nell'orizzonte di Mondovì ». 282, 512.

- BARBIERI U. — « Determinazione astronomica di latitudine compiuta a Mondovì ». 282, 363.
BARTORELLI A. — « Sopra una dimostrazione di interdipendenza fra le leggi di Curie e di Haiiy ». 532.
BEDARIDA A. M. — « Una nuova congruenza rettilinea ». 31.
BELLUIGI A. — « Valutazione dello smorzamento nei pendoli sismografici ». 37.
BENEDETTI E. — « Intorno all'azione del campo elettromagnetico oscillante ad alta frequenza su alcuni germi vegetali ». 324.
BIGIAMI D. — « Reazione del nitrossile con i nitroderivati aromatici e con gli azossicomposti ». 457.
BLANC A. — Eletto Socio Corrispondente. 80.
BOGGIO T. — « Sullo scostamento geodetico ». 255.
BOMPIANI E. — « Ancora sulla geometria delle superficie considerate nello spazio rigato ». 190, 262.
ID. — « Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano ». 435.
BORTOLOTTI E. — « Sulle rappresentazioni conformi, e su di una interpretazione fisica del parallelismo di Levi-Civita ». 552.
BRACALONI L. — Vedi BAGLIONI S. e GALAMINI A.
BRUGNATELLI L. — Vedi MILLOSEVICH F.
BRUNETTI A. — « Sulla teoria della polarizzazione dei raggi X indipendenti ». 43.

- BRUNETTI A. — « Sopra l'esistenza dell'elemento a numero atomico "61" ». 372, 515.
- ID. — « Sull'identificazione dell'elemento a numero atomico «61» ». 373, 518.
- BRUNI G. e FERRARI A. — « Sulla struttura cristallina di alcuni cloruri bivalenti ». 10.
- BURZIO F. — « Ordine di grandezza delle quantità relative al 2° problema balistico. — Una formula per la mutazione balistica ». 113.

C

- CALDONAZZO B. — « Una estensione del teorema di Bernouilli ». 25, 124.
- CAMBI L. e SZEGÒ L. — « Costituzione e spettri d'assorbimento dei nitrososolfuri del ferro ». 342, 491.
- CAMPANILE S. — « Ricerche sulle variazioni stagionali dei composti inorganici di azoto esistenti nel lago di Castelgandolfo ». 533.
- CAMPBELL W. W. — Eletto Socio Straniero. 80.
- CAPPELLETTI C. — « La forma a batteroide e l'immunità nelle Leguminose ». 478, 533.
- CAROBBI G. — « Ricerche sopra alcune notevoli sublimazioni vesuviane ». 223, 306.
- ID. — « Nuove ricerche sopra alcune notevoli sublimazioni vesuviane ». 382.
- ID. — Vedi ZAMBONINI F.
- CARRELLI A. — « Sul paramagnetismo degli elementi compresi fra il Ca e lo Zn ». 521, 569.
- CARTAN E. — Eletto Socio Straniero. 80.
- CASTELNUOVO G. (Segretario). — Presenta le opere giunte in dono, segnalando quelle dei Soci GINORI CONTI, MATTIROLO, SILVESTRI, SABBATANI, RUSSO e CLIFFORD DOBELL. 405.
- CECCONI A. — « Un teorema sul lavoro di deformazione elastica ». 272.
- CHARRIER G. — « Sull'1-N-fenil- α , β nafto-1, 2, 3-triazolchinone ». 149, 312.
- CISOTTI U. — « Inversione delle formule di Poisson sui moti rigidi ». 237.
- ID. — « Sulle uniformizzanti di funzioni non uniformi ». 342, 481.
- ID. — « Una notevole eccezione del teorema di Kutta Joukowski ». 419.
- COMPTON A. — Eletto Socio Straniero. 80.
- CORBELLINI G. — « Di una classe di varietà caratterizzate per mezzo del parallelismo ». 26, 92.
- CORBINO O. M. — « Sulla tensione di trasformazione tra gli stati quantici fondamentali dell'elio ». 342.
- ID. — Propone che il testo di Note importanti contenute in plichi sia conservato nell'Archivio dell'Accademia. 404.
- COTRONEI G. — « Sulla sistematica biologia dei Petromizonti ». 581.
- CRUDELI U. — « Sui campi elettromagnetici aventi nullo sul contorno il campo elettrico (magnetico) e tangenziale sul contorno stesso il campo magnetico (elettrico) ». 373, 522.
- CUSMANO G. — « Nuovo processo di deidrogenazione del mentolo ». 324, 385.

D

- DAL PIAZ G. — « A proposito della scoperta di un presunto filone di roccia vulcanica e postglaciale nei dintorni di Bressanone nell'Alto Adige ». 14, 86.
- D'ANCONA U. — « Ricerche sulla riproduzione dell' "Alosa finta" (Cuv.) ». 333.
- DE ANGELIS G. — Vedi TIZZONI G.
- DE CARLI F. — « Prodotti di addizione tra anidride solforosa ed idrocarburi aromatici ». 389, 460, 523.
- ID. — « Reagibilità allo stato solido del biossido di manganese ». 466, 577.
- ID. — « Borati anidri d'argento, bario e zinco ». 532.
- DE LORENZO G. — « L'Elephas antiquus di Pignataro Interamna in Valle del Liri ». 91, 185.
- DE MOTTONI G. — « Esperienze di controllo di un nuovo metodo interferometrico

per la misura di oggetti microscopici ed ultramicroscopici per mezzo di reticoli di diffrazione». 373, 447.

DIONISI A. — Eletto Socio Corrispondente. 80.

F

FABIANI R. — « Resti di un apparato eruttivo di età giurese scoperti in Sicilia ». 390, 467.

FANO G. — « La varietà delle forme binarie del 7° ordine a sesta spinta identicamente nulla ». 86, 161.

FANTAPPIÉ L. — « La polidromia dei funzionali analitici lineari ». 26.

ID. — « La teoria dei funzionali analitici nell'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali di qualsiasi ordine ». 557.

FENOGLIO M. — « Studio cristallografico del [Di-Metilidrossigliosissimo] Nicheloato di sodio ». 223.

FERMI E. e PERSICO E. — « Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nella nuova meccanica ondulatoria ». 353, 452.

FERNANDES L. — Vedi ROLLA L.

FERRARI A. — Vedi BRUNI G.

FINZI B. — « Su l'energia cinetica relativa ». 443, 506.

FRANCHI S. — « Se esista nel Massiccio Cristallino delle Alpi Marittime un secondo grande dicco granitico » (Memoria). 342.

FUBINI G. — « Sulla teoria delle superficie R e delle loro trasformazioni ». 5, 81.

ID. — « Proprietà proiettive delle superficie a curvatura metrica costante ». 5, 167.

G

GALAMINI A. — Vedi BAGLIONI S., BRACALONI L.

GARBASSO A. — Eletto Vicepresidente dell'Accademia. 79.

ID. (Presidente). — Ringrazia i Soci per la sua nomina a Vicepresidente dell'Accademia. 403.

GARBASSO A. — Propone di esprimere con telegramma la soddisfazione e gratitudine a S. E. Mussolini per l'impegno assunto di occuparsi delle Scienze sperimentali in Italia. 403.

ID. — Rivolge un fervido saluto al Socio A. MARTELLI chiamato a far parte del Governo Nazionale. 403.

ID. — Comunica i ringraziamenti dei nuovi Soci. 403.

ID. — Annuncia la morte del Socio Nazionale A. NACCARI. 403.

ID. — Comunica i ringraziamenti del professore TSCHERMAK per le felicitazioni inviategli nel 90° anniversario della nascita. 404.

ID. — Dissuggerella il plico contenente la Nota del Corrisp. L. ROLLA e L. FERNANDES e la Nota della dott.sa R. BRUNETTI. 404.

ID. — Presenta 12 plichi del Socio E. PATERNO e altri dei sigg. G. CANDIANI, CESARE NOÈ MEI e del dott. V. VANNI, da conservarsi nell'Archivio dell'Accademia. 404.

ID. — Comunica una lettera del Corrispondente BLANC il quale scusa la sua assenza. 537.

GENNARO V. — Vedi REPOSSI E.

GIACOMINI E. — Eletto Socio Nazionale. 80.

GINORI-CONTI P. — Eletto Socio Nazionale. 80.

GORINI C. — « Il comportamento del "Bacterium Typhi" nel latte ». 335, 399.

H

HAGEN G. — Fa omaggio del Catalogo Astrografico 1900.0 della Sezione Vaticana. 537.

HERRERA L. — « Aspetti di lotta e di parassitismo nelle imitazioni di infusori ». 188, 343.

ID. — « Chemiotattismo e fagocitosi nelle imitazioni dei leucociti ». 247.

HENNEGUY L. — Eletto Socio Straniero. 80.

HLAVATÝ V. — « Les paramètres locaux dans une variété de Riemann ». 99.

J

- JUCCI C. — « Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta: le capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di "B. Mori" ». 584.
- ID. — « L'eredità materna e la paterna nelle capacità di sviluppo larvale negli incroci reciproci tra due razze di bachi da seta ». 584.

K

- KAHANOVICZ M. — « Spettro tipo "Pickering" nell'argon ». 285.
- KRALL G. — « Sulla deformazione infinitesima del campo di integrazione nelle equazioni di Fredholm ». 113, 429.

L

- LEVI G. — Eletto Socio Nazionale. 80.
- LEVI-CIVITA T. — « Sui moti einsteiniani in seconda approssimazione ». 3.
- ID. — Anche a nome del prof. U. AMALDI, fa omaggio del II volume: « Lezioni di meccanica razionale » e ne discorre. 405.
- LEVY H. — « Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica ». 35.
- LOMBARDI L. — Fa omaggio della quarta ediz. del suo « Corso teorico pratico di Elettrotecnica ». 405.
- LONGO B. — « Primi risultati della semina del melo "senza fiori" (Pyrus apetala Münchh) ». 91, 188.

M

- MAGGINI M. — « Misure interferometriche sui quattro grandi satelliti di Giove ». 37, 127.
- MAGNANINI. — « Il modello di Bohr e la pretesa colorazione degli joni ». 530.
- MAJORANA Q. — « Su di un fenomeno termico residuo ». 342, 419.
- MANCINELLI R. — « Sull'effetto Evershed nelle macchie solari ». 276.

MASOTTI A. — « Rotazione uniforme di una coppia di sottili cilindri rotondi in un liquido perfetto indefinito ». 37, 190.

ID. — « Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde parallele, 275, 359; seconda approssimazione ». 443.

MATHEWS P. A. — Eletto Socio Straniero. 80.

MAZZA L. — « Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo ». 145, 215, 389.

MILLOSEVICH F. — Eletto Amministratore dell'Accademia. 79.

ID. — Per incarico del Corrisp. BRUGNATELLI L., presenta la Memoria di A. CAIVATO: « Nuove osservazioni sulle zeoliti del gruppo della natrolite (natrolite e metanatrolite, scolecite e metascolecite, mesolite e metamesolite) ». 404.

ID. (Relatore). — A nome anche del Socio ZAMBONINI F., riferisce favorevolmente per l'inserzione negli Atti Accademici della Memoria di F. RANFALDI: « Sullo zolfo rombico dell'isola di Vulcano (Eolie) ». 404.

MINETTI S. — « Sulla ricerca delle singola-

rità delle $f(\chi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \chi^n$ ove $a^n = = g(n)$ per n intero positivo con $g(n)$ trascendente intera ». 14.

ID. — « Ancora sugli sviluppi tayloriani di $\sum a_n \chi^n$ dove $a^n = g(n)$ con $g(n)$ trascendente intera ». 113.

MONTI M. — Vedi SCAGLIARINI G.

N

NANNEI B. — « Metodo per la misura delle variazioni delle capacità calorifiche nei campi magnetici ». 145, 296.

ID. — « Cicli di isteresi elastica in fili di bismuto ». 366.

NATTA G. e REINA A. — « Sugli ossidi e idrati del cobalto: struttura cristallina dell'ossido e dell'idrato cobaltosi ». 48.

ID. e SCHMID F. — « Sugli ossidi ed idrati di cobalto ». - Nota II. « Struttura cristallina dell'ossido salino di cobalto ». 145.

P

- PAIS A. — «Influenza dello stimolo radio-ormonico, diretto verso i testicoli e le ovaie, sui caratteri dei discendenti». 78, 227.
- PAGLIARULO M. L. — «Della dispersione rotatoria e refrattiva delle soluzioni acquose dell'acido tartarico destrogiro». 149, 199.
- PARIBENI R. — Eletto Amministratore aggiunto dell'Accademia. 79.
- PARRAVANO N. — Eletto Segretario aggiunto dell'Accademia. 79.
- ID. (Segretario aggiunto). — Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci G. FANO e F. SILVESTRI, di W. H. VRIGHT, il terzo volume dell'edizione nazionale «Le Opere di A. Volta» ed il numero speciale del Quinto Congresso di Chimica industriale di Parigi. 537.
- PATERNÒ E. — «La trasmutazione degli elementi». 491, 541.
- PERSICO E. — Vedi FERMI E.
- PETRI L. — Eletto Socio Corrispondente. 80.
- PHILIBERT M. — «Sur le dédoublement apparent de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow». 223, 300.
- ID. — «Encore sur le dédoublement apparent de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow». 376.
- PICONE M. — «Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche in tre o più variabili». 18.
- PICOTTI M. — «I risultati delle ricerche fisico-chimiche compiute nelle crociere della R. Nave "Marsigli" nello Stretto di Messina». 199, 282.
- POGGI R. e POLVERINI A. — «Sulla distruzione dei filtri con ossidanti alternati applicata all'analisi quantitativa». 55.
- ID. — «Sopra la determinazione del fosforo e dell'arsenico nelle sostanze organiche». 315.
- POLVERINI A. — Vedi POGGI R.

Q

- QUERCIGH E. — «Sulla natura della stibio-bismutinite». 68.

QUILICO A. — «Esame röntgenografico degli idruri metallici. Idruri di rame». 57.

R

- RAIMONDI E. — «Formole generali per il calcolo dell'effetto di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita». 195, 272.
- ID. — «Calcolo approssimativo dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita». 195, 353.
- RANZI S. — «Ricerche sui placodi dei Ciclostomi, Ganoidi e Teleostei con particolare riguardo al destino del primo placode epibranchiale». 394.
- RASETTI F. — «Sopra l'effetto Doppler nella fluorescenza sensibilizzata». 133.
- REINA A. — Vedi NATTA G.
- REMOTTI E. — «Comportamento fotoreattivo in girini e avannotti alimentati con tiroide». 335, 390.
- ID. — «Su alcuni fenomeni che accompagnano la crisi di maturazione sessuale delle Gambusie». 533, 584.
- REPOSSI E. e GENNARO V. — «I minerali delle serpentine di Piossasco (Piemonte)». 150.
- RESEGOTTI G. — «Studio cristallografico di alcuni nitroderivati aromatici». 153, 218.
- RESTAINO S. — Vedi ZAMBONINI F.
- ROBERTSON T. B. — Eletto Socio Straniero. 80.
- RODOLICO F. — «Ricerche cristallografiche su alcuni eteropolimeri composti». 390, 471.
- ROLLA L. — Eletto Socio Corrispondente. 80.
- ROLLA L. e FERNANDES L. — «Sopra l'elemento di numero atomico 61». 86, 181.
- ID. — «Sopra un nuovo elemento: il Florenzio (Numero atomico "61")». 342, 498.
- RONCHI V. — «Ancora sulle ombre volanti». 37, 131.
- ID. — «Sulla funzione ottica del liquido lacrimale». 381, 476.

- POSA D. — « Una possibile variante dell'ologenesi ». 588.
 ROSSI G. — « Sopra la scintillazione delle stelle ». 565.
 RUFFINI A. — Eletto Socio Nazionale. 80.

S

- SACCO F. — « La questione dell'età degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino ». 428, 500.
 SALFI M. — « Le "gemme estivanti" e la biologia dei cespugli di *Clavelina lepadiformis* (Müller) ». 533, 581.
 SANDONNINI C. — « Colori di mescolanza dell'acqua con acido acetico e con alcool isopropilico ». 63.
 SCAGLIARINI G. — « Analogia di comportamento e isomorfismo fra cerio e torio ». 72, 149, 204.
 ID. — « Composti di addizione fra metalli tetra e bivalenti e basi organiche. (Probabile natura delle valenze secondarie) ». 467, 574.
 SCAGLIARINI G. e MONTI M. — « Composti di addizione fra alogenuri dello stagno e del titanio a basi organiche ». 150, 210.
 SCAGLIARINI G. e TARTARINI G. — « Composti fra alogenuri di Titanio e sostanze organiche ossigenate ». 68, 318.
 ID. e ID. — « Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche ». 150, 387.
 SCIALOJA V. — Eletto Presidente dell'Accademia. 79.
 SCORZA G. — Eletto Socio Corrispondente. 80.
 ID. « Sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito ». 242, 485.
 ID. — « Un lemma sul prolungamento nel corpo complesso di talune algebre reali ». 413.
 SEGRE B. — « Una generalizzazione della trasformazione di Koenigs ». 353, 438.
 SEGRÉ C. — Eletto Socio Corrispondente. 80.
 SELLA M. — « Altri fatti sopra le migrazioni dei tonni accertati per mezzo degli ami ». 153, 223.
 SEVERI F. — Eletto Socio Nazionale. 80.

- SCHMID F. — Vedi NATTA G.
 SOMIGLIANA C. — « Sulle relazione che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità ». 342.
 SOULA J. — « Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet ». 103.
 STELLA A. — Eletto Socio Corrispondente. 80.
 STOLFI A. — Vedi ZAMBONINI F.
 SZEGÖ L. — Vedi CAMBI L.

T

- TARTARINI G. — Vedi SCAGLIARINI G.
 TERRACINI A. — « Sull'elemento lineare proiettivo di una superficie ». 267.
 ID. — « Caratterizzazione dei sistemi dei Bianchi di ∞^1 superficie ». 272, 348.
 TIZZONI G. e DE ANGELIS G. — « L'azione del radio sul sarcoma del ratto (tipo Jensen) ». 247.

V

- VISCO S. — « Sul comportamento del glucogeno negli animali digiunanti trattati con insulina ». 154.
 VOLTERRA V. — Confermato a rappresentante dell'Accademia nel Consiglio Internazionale di Ricerche. 79.
 ID. — « Sulle fluttuazioni biologiche ». 541.
 VRANCEANU G. — « Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo ». 443, 508.
 ID. — « Sopra la stabilità geodetica ». 569.

W

- WATAGHIN G. — « Sulla ipotesi balistica e l'effetto Doppler ». 37, 138.
 ID. — « Sull'aberrazione della luce e teoria della relatività ». 291.
 WEINSTEIN A. — « Sur les jets liquides à parois données ». 119.
 ID. — « Sur la représentation analytique de certains mouvements apériodiques ». 512, 561.
 ID. — « Sur le théoreme d'existence des jets liquides ». 564.

Z

- ZAMBONINI F. — Vedi MILLOSEVICH F.
- ZAMBONINI F. e CAROBBI G. — « Sulla presenza del fluosilicato sodico e di quello di potassio tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio ». 86, 171.
- ZAMBONINI F. e RESTAINO S. — « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — VI. Solfati di cerio (ceroso) e potassio ». 5.
- ZAMBONINI F. e RESTAINO S. — « Solfati di cerio ceroso e tallio talloso ». 86, 175.
- ZAMBONINI F. e STOLFI A. — « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — VII. Solfati di lantanio e ammonio ». 424.
- ZARISKI O. — « Sulla rappresentazione conforme dell'area limitata da una lemniscata sopra un cerchio ». 22.
- Id. — Sullo sviluppo di una funzione algebrica in un cerchio contenente più punti critici ». 109.
-

INDICE PER MATERIE

A

Analisi funzionale. — « La polidromia dei funzionali analitici lineari ». L. FANTAPPIÈ. 26.

— « La teoria dei funzionali analitici nell'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali di qualsiasi ordine ». ID. 557.

Astrofisica. — « Osservazioni sui moti dei vapori metallici nelle macchie solari ». G. ABETTI. 242.

— « Sopra la differenza fra la grandezza visuale e la grandezza bolometrica delle stelle, in relazione alla temperatura assoluta ». G. ARMELLINI. 242, 337.

— « Sull'effetto Evershed nelle macchie solari ». R. MANCINELLI. 276.

— « Ancora sulle ombre volanti ». V. RONCHI. 37. 131.

Astronomia. — « Misure interferometriche sui quattro grandi satelliti di Giove ». M. MAGGINI. 37, 127.

— « Sopra la scintillazione delle stelle ». G. ROSSI. 565.

B

Batteriologia. — « Il comportamento del "Bacterium Typhi" nel latte ». C. GORINI. 335, 399.

Biologia. — « Il "virus" della malattia del giallume (poliedria) nel baco da seta in rapporto con le moderne teorie sui "virus filtrabili" ». C. ACQUA. 73.

Biologia. — « Intorno all'azione del campo elettromagnetico oscillante ad alta frequenza su alcuni germi vegetali ». E. BENEDETTI. 324.

— « Sulla sistematica biologia dei Petromizoni ». G. COTRONEI. 581.

— « Ricerche sulla riproduzione dell' "Alosa finta" (Cuv.) ». U. D'ANCONA. 333.

— « Aspetti di lotta e di parassitismo nelle imitazioni di infusori ». L. HERRERA. 188, 343.

— « Chemiotattismo e fagocitosi nelle imitazioni dei leucociti ». ID. 247.

— « Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta: le capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di "B. Mori" ». JUCCI C. 584.

— « L'eredità materna e la paterna nelle capacità di sviluppo larvale negli incroci reciproci tra due razze di bachi da seta ». ID. 584.

— « Influenza dello stimolo radio-ormonico, diretto verso i testicoli e le ovaie, sui caratteri dei discendenti ». A. PAIS. 78, 227.

— « Comportamento fotoreattivo in girini e avannotti alimentati con tiroide ». E. REMOTTI. 330, 390.

— « Su alcuni fenomeni che accompagnano la crisi di maturazione sessuale delle Gambusie ». ID. 533, 584.

— « Una possibile variante dell'ologenesi ». D. ROSA. 588.

— « Le "gemme estivanti" e la biologia dei cespugli di *Clavelina lepadiformis* (Müller) ». M. SALFI. 533, 581.

Biologia. — « Sul comportamento del glucogeno negli animali digiunanti trattati con insulina ». S. VISCO. 154.

Biologia matematica. — « Sulle fluttuazioni biologiche ». V. VOLTERRA. 541.

Biologia vegetale. — « Primi risultati della semina del melo "senza fiori" (*Pyrus apetala* Münchh) ». B. LONGO. 91, 188.

Botanica. — Vedi **Biologia vegetale**.

C

Chimica. — « Reazione del nitrossile con i nitroderivati aromatici e con gli azosicomposti ». D. BIGIARI. 457.

— « Costituzione e spettri d'assorbimento dei nitrosolfuri del ferro ». L. CAMBI e L. SZEGÖ. 342, 491.

— « Ricerche sopra alcune notevoli sublimazioni vesuviane ». C. CAROBBI. 223, 306.

— « Nuove ricerche sopra alcune notevoli sublimazioni vesuviane ». ID. 382.

— « Sull' 1-N-fenil- α , β nafto-1, 2, 3-triazolchitone ». G. CHARRIER. 149, 312.

— « Nuovo processo di deidrogenazione del mentolo ». G. CUSMANO. 324, 395.

— « Prodotti di addizione tra anidride solforosa ed idrocarburi aromatici ». F. DE CARLI. 389, 523, 460.

— « Reagibilità allo stato solido del biossido di manganese ». ID. 466, 577.

— « Borati anidri d'argento, bario e zinco ». ID. 532.

— « Il modello di Bohr e la pretesa colorazione degli ioni ». G. MAGNANINI. 530.

— « Sugli ossidi e idrati del cobalto: struttura cristallina dell'ossido e dell'idrato cobaltosi ». G. NATTA e A. REINA. 49.

— « Sugli ossidi e idrati di cobalto. Nota II. Struttura cristallina dell'ossido salino di cobalto ». ID. e ID. 145.

— « La trasmutazione degli elementi ». E. PATERNO. 491, 541.

— « Sulla distruzione dei filtri con ossidanti alternati applicata all'analisi quantitativa ». R. POGGI e G. POLVERINI. 55.

Chimica. — « Sopra la determinazione del fosforo e dell'arsenico nelle sostanze organiche ». R. POGGI e G. POLVERINI. 315.

— « Esame röntgenografico degli idruri metallici. Idruri di rame ». A. QUILICO. 57.

— « Sopra l'elemento di numero atomico "61" ». L. ROLLA e L. FERNANDES. 86, 181.

— « Sopra un nuovo elemento: il Florenzio (numero atomico "61") ». ID. 342, 498.

— « Colori di mescolanza dell'acqua con acido acetico e con alcool isopropilico ». C. SANDONNINI. 63.

— « Analogia di comportamento e isomorfismo fra cerio e torio ». G. SCAGLIARINI. 72, 149, 204.

— « Composti di addizione fra metalli tetra e bivalenti e basi organiche. (Probabile natura delle valenze secondarie) ». ID. 467, 574.

— « Composti di addizione fra alogenuri dello stagno e del titanio a basi organiche ». G. SCAGLIARINI e M. MONTI. 150, 210.

— « Composti fra alogenuri di titanio e sostanze organiche ossigenate ». G. SCAGLIARINI e G. TARTARINI. 68, 318.

— « Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche ». ID. e ID. 150, 387.

— « Sulla presenza del fluosilicato sodico e di quello di potassio tra i prodotti della attività del Vesuvio ». F. ZAMBONINI e G. CAROBBI. 86, 171.

— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — VI. Solfati di cerio (ceroso) e potassio ». F. ZAMBONINI e S. RESTAINO. 5.

— « Solfati di cerio ceroso e tallio talloso ». ID. e ID. 86, 175.

— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — VII. Solfati di lantanio e ammonio ». F. ZAMBONINI e A. STOLFI. 424.

Chimica-Fisica. — « Sulla struttura cristallina di alcuni cloruri bivalenti ». G. BRUNI e A. FERRARI. 10.

Chimica fisiologica. — « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Il contenuto dell'alcool nel sangue (alcoolemia) dell'uomo a digiuno, in seguito ad ingestione di bevande alcoliche ». S. BAGLIONI, L. BRACALONI e A. GALAMINI. 505, 545.

Cristallografia. — « Studio cristallografico del [Di-Metilidrossigliossimo] Nicheloato di sodio ». M. FENOGLIO. 223.
— « Studio cristallografico di alcuni nitroderivati aromatici ». G. RESEGOTTI. 153, 218.
— « Ricerche cristallografiche su alcuni eteropolicomposti ». F. RODOLICO. 390, 471.

E

Elettrochimica. — « Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo ». L. MAZZA. 145, 215, 389.

Embrilogia. — « Ricerche sui placodi dei Ciclostomi, Ganoidi e Teleostei con particolare riguardo al destino del primo placode epibranchiale ». S. RANZI. 394.

F

Fisica. — « Sulla teoria della polarizzazione dei raggi X indipendenti ». A. BRUNETTI. 43.

- « Sopra l'esistenza dell'elemento a numero atomico "61" ». ID. 327, 515.
- « Sull'identificazione dell'elemento a numero atomico "61" ». ID. 373, 518.
- « Sul paramagnetismo degli elementi compresi fra il Ca e lo Zn ». A. CARRELLI. 521, 569.
- « Sulla tensione di trasformazione tra gli stati quantici fondamentali dell'Elio ». O. M. CORBINO. 342.
- « Esperienze di controllo di un nuovo metodo interferometrico per la misura di oggetti microscopici per mezzo di reticoli di diffrazione ». G. DE MOTTONI. 373, 447.

Fisica. — « Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nella nuova meccanica ondulatoria ». E. FERMI e E. PERSICO. 353, 452.

- « Spettro tipo "Pickering" nell'argon ». M. KAHANOVICZ. 285.
- « Su di un fenomeno termico residuo ». Q. MAJORANA. 349, 419.
- « Metodo per la misura delle variazioni delle capacità calorifiche nei campi magnetici ». B. NANNEI. 145, 296.
- « Cicli di isteresi elastica in fili di bismuto ». ID. 366.
- « Della dispersione rotatoria e refrattiva delle soluzioni acquose dell'acido tartarico ». M. L. PAGLIARULO. 149, 199.
- « Sopra l'effetto Doppler nella fluorescenza sensibilizzata ». F. RASETTI. 133.
- « Sulla ipotesi balistica e l'effetto Doppler ». G. WATAGHIN. 37, 138.
- « Sull'aberrazione della luce e teoria della relatività ». ID. 291.

Fisica matematica. — « Sui campi elettromagnetici aventi nullo sul contorno il campo elettrico (magnetico) e tangenziale sul contorno stesso il campo magnetico (elettrico) ». U. CRUDELI. 373, 225.

Fisiologia. — Vedi **Chimica fisiologica**.

Fisiologia vegetale. — « La forma a batteroide e l'immunità nelle leguminose ». C. CAPPELLETTI. 478, 533.

G

Geodesia. — « Determinazione astronomica di latitudine ed azimut eseguita a Monte Settepani nel 1911 ». U. BARBIERI. 132, 195.

- « Azimut assoluto di Eremo di Cherasco nell'orizzonte di Mondovì ». ID. 282, 512.
- « Determinazione astronomica di latitudine compiuta a Mondovì ». ID. 363.
- « Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo ». G. VRANCEANU. 443, 508.

Geodesia. — « Sopra la stabilità geodetica ». G. VRANCEANU. 569.

Geofisica. — « Valutazione dello smorzamento nei pendoli sismografici ». A. BELLUIGI. 37.

— « I risultati delle ricerche fisico-chimiche compiute nelle crociere della R. Nave "Marsigli" nello Stretto di Messina ». M. PICOTTI. 199, 282.

Geologia. — « A proposito della scoperta di un presunto filone di roccia vulcanica e postglaciale nei dintorni di Bressanone nell'Alto Adige ». G. DAL PIAZ. 14, 86.

— « Resti di un apparato eruttivo di età giurese scoperti in Sicilia ». R. FABIANI. 390, 467.

— « Se esista nel Massiccio Cristallino delle Alpi Marittime un secondo grande dicco granitico ». (Memoria). S. FRANCHI. 342.

— « La questione dell'età degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino ». F. SACCO. 428, 500.

Geometria. — « Una nuova congruenza rettilinea ». A. M. BEDARIDA. 31.

— « Ancora sulla geometria delle superficie considerate nello spazio rigato ». E. BOMPIANI. 190, 262.

— « Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano ». ID. 435.

— « Sulla teoria delle superficie R e delle loro trasformazioni ». G. FUBINI. 5, 81.

— « Proprietà proiettive delle superficie a curvatura metrica costante ». ID. 5, 167.

— « Una generalizzazione della trasformazione di Koenigs ». B. SEGRE. 353, 438.

— « Sull'elemento lineare proiettivo di una superficie ». A. TERRACINI. 267.

— « Caratterizzazione dei sistemi del Bianchi di ∞^1 superficie ». ID. 272, 348.

I

Idrobiologia. — « Ricerche sulle variazioni stagionali dei composti inorganici di azoto esistenti nel lago di Castelfandolfo ». S. CAMPANILE. 533.

Idromeccanica. — « Un'estensione del teorema di Bernouilli ». B. CALDONAZZO. 25, 124.

Idromeccanica. — « Una notevole eccezione del teorema di Kutta Joukowski ». U. CISOTTI. 419.

— « Rotazione uniforme di una coppia di sottili cilindri rotondi in un liquido perfetto indefinito ». A. MASOTTI. 37, 190.

— « Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde parallele; seconda approssimazione ». ID. 359, 443.

— « Forniole generali per il calcolo dell'effetto di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita ». E. RAIMONDI. 195, 272.

— « Calcolo approssimativo dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita ». ID. 195, 353.

M

Matematica. — « Sullo scostamento geodetico ». T. BOGGIO. 255.

— « Sulle rappresentazioni conformi, e su di una interpretazione fisica del parallelismo di Levi-Civita ». E. BORTOLOTTI. 552.

— « Inversione delle formule di Poisson sui moti rigidi ». U. CISOTTI. 237.

— « Di una classe di varietà caratterizzata per mezzo del parallelismo ». G. CORBELLINI. 26, 92.

— La varietà delle forme binarie del 7° ordine a sesta spinta identicamente nulla ». G. FANO. 86, 161.

— « Les paramètres locaux dans une variété de Riemann ». V. HLAVATÝ. 99.

— « Sulla deformazione infinitesima del campo di integrazione nelle equazioni di Fredholm ». G. KRALL. 113, 429.

— « Sulla ricerca delle singolarità delle

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \zeta^n \text{ ove } a^n = g(n) \text{ per } n$$

intero positivo con $g(n)$ trascendente intera ». S. MINETTI. 14.

— « Ancora sugli sviluppi tayloriani di $\sum a_n \zeta^n$ dove $a^n = g(n)$ con $g(n)$ trascendente intera ». ID. 113.

Matematica. — «Sulle singolarità delle funzioni armoniche in tre o più variabili». M. PICONE. 18.

— «Sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito». G. SCORZA. 242, 485.

— «Un lemma sul prolungamento nel corpo complesso di talune algebre reali». ID. 413.

— «Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet». J. SOULA. 103.

— «Sulla rappresentazione conforme dell'area limitata da una lemniscata sopra un cerchio». O. ZARISKI. 22.

— «Sullo sviluppo di una funzione algebrica in un cerchio contenente più punti critici». ID. 109.

Meccanica. — «Ordine di grandezza delle quantità relative al 2° problema balistico. - Una formula per la mutazione balistica», F. BURZIO. 113.

— «Una teorema sul lavoro di deformazione elastica». A. CECCONI. 272.

— «Sulle uniformizzanti di funzioni non uniformi». U. CISOZZI. 342, 481.

— «Sull'energia cinetica relativa». B. FINZI. 443, 506.

— «Sui moti einsteiniani in seconda approssimazione». T. LEVI-CIVITA. 3.

— «Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica». H. LEVY. 35.

— «Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità». C. SOMIGLIANA. 342.

— «Sur les jets liquides à parois données». A. WEINSTEIN. 119.

— «Sur la représentation analytique de certains mouvements apériodiques». ID. 512, 561.

— «Sur le théorème d'existence des jets liquides». ID. 564.

Meccanica celeste. — «Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema di due corpi di masse variabili». G. ARMELLINI. 242, 415.

Mineralogia. — «Sopra una dimostrazione di interdipendenza fra le leggi di Curie e di Haiiy». A. BARTORELLI. 532.

— «Sulla natura della stibiobismutinite». E. QUERCIGH. 68.

Mineralogia. — «I minerali delle serpentine di Piosasco (Piemonte)». E. REPOSSI e V. GENNARO. 150.

N

Necrologie. — Annunzio della morte del Socio Nazionale O. MARINELLI. 79; del Socio Nazionale A. NACCARI. 403.

Nomine. — Nomina della Presidenza. 79. — Nomina di nuovi Soci. 80.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia. — 235, 407, 539.

Ottica cristallografica. — «Sur le doublement apparent de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow». M. PHILIBERT. 223, 300.

— «Encore sur le dédoublement apparent de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fédorow». ID. 376.

Ottica fisiologica. — «Sulla funzione ottica del liquido lacrimale». V. RONCHI. 381, 476.

P

Paleontologia. — «L'Elephas antiquus di Pignataro Interamna in Valle del Liri». G. DE LORENZO. 94, 185.

Patologia. — «L'azione del radio sul sarcoma del ratto (tipo Jensen)». (Memoria). G. TIZZONI e G. DE ANGELIS. 247.

Personale Accademico. — 79, 403, 537.

Presentazione di libri. — 405, 537.

R

Relazioni di Commissioni. — 404.

Z

Zoologia. — «Altri fatti sopra le migrazioni dei tonni accertati per mezzo degli ami». M. SELLA. 153, 223.

Appendice al volume IV, serie 6^a

1926

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio straniero J. Massart

comunicata dal Socio O. MATTIROLO nella seduta del 3 giugno 1926.

Ringrazio il Presidente nostro che ha voluto affidarmi l'incarico di rievocare davanti a voi, onorevoli Consoci, la figura nobilissima del nostro Socio Straniero JEAN MASSART, che la morte rapiva, quando, dopo lunga faticosa preparazione, giungeva a penetrare i più ardui problemi della biologia.

Jean Massart sacrificò se stesso sugli altari della patria e della scienza; onde la sua figura ci appare circondata da una doppia aureola di gloria, esempio e monito alle generazioni future di quanto un uomo può compiere nel breve corso della vita.

Dire di lui, mio Collega carissimo, è per me un onore e nello stesso tempo un dovere, che assolverò con sentimento di amarezza profonda e con vivissima commozione.

Jean Massart nacque il 7 marzo dell'anno 1865 a Ettersbeck. Laureato in Scienze Naturali nel 1887 e in Medicina nel 1891, fu incaricato di un Corso di Scienze Naturali nel 1895 e nominato Professore nel 1897.

Conservatore del Giardino Botanico di Bruxelles nel 1902, fu nel 1906 chiamato a dirigere l'Istituto Botanico, che Léo Errera morendo, generosamente donava, alla città di Bruxelles, carica che tenne ininterrottamente fino alla morte.

Uomo di scienza, dedito al lavoro di laboratorio, oratore simpatico e convincente, trascorse la vita nell'ambiente sereno degli studi, fino a quando, scoppiata la grande guerra, dovette assistere alla tragica sorte del suo paese, invaso dalle truppe germaniche, prostrato, ridotto a schiavitù, devastato con metodi prescelti per incutere timore nel popolo e rendere inutile ogni tentativo di reazione armata. *Oderint dum metuant* era la divisa germanica! L'anima di Massart, educata alla libertà di pensiero e di azione non si prostrò allo spettacolo infame dell'onda travolgente della forza brutale; ma sentì la necessità e la potenza della resistenza morale; l'unica che fosse ancora concessa al popolo del Belgio! Non avendo potuto impugnare le armi, tenuto d'occhio dai tedeschi, come elemento pericoloso, poté a stento rifugiarsi in Francia presso l'amico Georges Poirault, Di-

rettore della Villa Thuret a Capo d'Antibes e quivi, abbandonati gli studi, diede tutto se stesso con coraggio indomabile alla lotta contro l'oltracotante invasore; e coll'ingegno e colla penna, sorretto da amici fidati, intraprese una eroica azione, non scevra di pericoli personali, culminata colla pubblicazione di due volumi memorabili, che sparsi, sotto l'egida di un nome ormai celebre nel mondo, valse forse più che una battaglia a gettare l'onta sugli invasori. Il mite botanico divenne in quegli anni di guerra assertore solenne della libertà del suo popolo, convincente, affascinante narratore delle nefandità commesse dall'esercito germanico nel Belgio.

Comment les Belges résistent à la domination allemande (Contribution au Livre des douleurs de la Belgique) ⁽¹⁾; e la *Presse clandestine dans la Belgique occupée* ⁽²⁾; sono due volumi scritti dal Massart con metodo rigorosamente scientifico. In essi è la verità stessa che parla, ed ogni, anche più lieve, asserzione è strettamente documentata anche con prove fotografiche ineccepibili. Essi sono l'espressione tragica dell'eroismo e dell'energia di un popolo che non piegò mai il capo sotto il giogo e non potè essere domato.

Sono questi due libri di storia tali, che peseranno in eterno sulla Germania e non saranno dimenticati mai!

Ho stimato mio dovere, prima di rievocare i meriti dello scienziato di onorare il patriota e di presentarne la nobile, eroica figura, degnissima del rispetto, della ammirazione e della riconoscenza che il Belgio unanime nutre e nutrirà nei secoli per questo suo illustre, valoroso, superbo patriota.

Al termine dell'immane conflitto, rientrato in patria, riprese gli studi, dedicando, con lena raddoppiata, l'ingegno e la mirabile sua attività alla scienza, nell'intento di risollevare le energie del suo popolo che la guerra aveva duramente prostrate.

Oratore simpatico, convincente, affascinante, si fece conferenziere per divulgare le scoperte che andava mano mano elaborando, facendo proseliti e allievi, che numerosi accorrevano a Lui.

Semplice nei modi, odiatore convinto delle parole inutili, osservatore oculatissimo e profondo, entusiasta della natura, ne intuiva il fascino, trovando in essa la intima ragione di quella ineffabile poesia che accarezza e sublima l'anima umana, come espressione dell'eterna bellezza.

Così alto e profondo era il suo sentire al cospetto della natura, che Egli odiava quanti tentassero riprodurre le armonie naturali colle parole stampate.

Il devrait être défendu de déposer de la poésie le long des chemins de la nature, diceva egli, stigmatizzando quanti arrovellano l'ingegno a descrivere colle parole gli indefinibili e inesprimibili incanti di un paesaggio, di un orizzonte, di un tramonto, di un fiore!

La poesia era per lui la stessa natura che parla a chi la sa intendere e non ha bisogno di interpreti umani.

(1) Librairie Payot et C.^{ie} Paris, 1916.

(2) Berger-Levrault. Paris, 1917.

Ragionava il nostro biologo come il Serafico di Assisi, che vedeva e sentiva Dio nella contemplazione della natura!

Nell'intento di allargare e completare le sue cognizioni botaniche e biologiche, quantunque assai scarso di mezzi finanziari, ottenuto un sussidio dal suo Governo, valendosi delle sue cognizioni e della pratica medica, imbarcatosi come sanitario di bordo, potè dar corpo ad un suo sogno, quello cioè di visitare il *Paradiso dei botanici*. Così Egli nel 1894 e 1895 fu a Giava, dove soggiornò sette mesi nel celebre Laboratorio fondato dal Treub a Buitenzorg e in quello annesso di Tjibodas sui fianchi del Vulcano Gebel, fra gli incanti della più esuberante vegetazione tropicale.

La relazione di questo viaggio, scritta con attraente vivacità di forma, con eleganza di stile, ricca di osservazioni originali, ebbe la più lieta accoglienza dagli studiosi che già avevano ammirato il rendiconto del suo primo viaggio al Sahara.

Un Botaniste en Malaisie è un libro che avvince il lettore, mentre gli concede una attraente visione scientifica della vegetazione asiatica tropicale.

I medesimi pregi avrebbero certamente infiorata la narrazione dei suoi due viaggi nel Brasile, dove il *nostro* ebbe accoglienze così festose che determinarono il Governo degli Stati Uniti a dargli incarico di una serie di Conferenze che egli non potè assolvere, perchè il male fatalmente andava distruggendo la forte fibra dell'infaticabile lavoratore.

Con questi viaggi il Massart, osservatore diligentissimo e naturalista completo, si rese padrone delle cognizioni necessarie per elevare l'ingegno alla considerazione delle grandi questioni che interessano la Biologia come espressione sintetica delle leggi che regolano la vita e i rapporti fra gli esseri viventi e l'ambiente in cui vivono.

E fu appunto questa preparazione scientifica che diede al Massart l'intuito dell'importanza della Biologia, considerata come coronamento degli studi di Botanica e di Zoologia. E però Egli ne promosse con fede incrollabile l'insegnamento, che tenne con mirabili risultati e volgarizzò con un Trattato in due volumi divenuto classico per le Scuole di lingua francese.

Egli opinava che tale insegnamento più che ad un zoologo, dovesse essere affidato ad un botanico, imperocchè, Egli diceva, la teoria cellulare era sorta dallo studio delle piante; la conoscenza stessa dei riflessi cellulari riposa sulle esperienze dei botanici, sulle quali si fondarono le ricerche sperimentali sulla evoluzione; che lo studio della alimentazione dei protisti rispecchiava la nutrizione dei vegetali superiori più che non quella degli animali; che la conoscenza stessa dei protisti è fondamento indispensabile per assurgere alla conoscenza dei metafiti.

Furono queste considerazioni che decisero l'Università di Bruxelles ad affidare il nuovo insegnamento al botanico Massart.

La Biologia è disciplina indispensabile ai naturalisti e ai medici, ma perchè essa possa loro giovare, allargandone, illuminandone le idee, permet-

tendo loro una visione sintetica dei fenomeni che regolano la vita degli esseri superiori, è indispensabile che essi abbiano preventivamente acquisite le nozioni generali dei due rami delle scienze naturali che trattano rispettivamente dei vegetali e degli animali.

Soltanto con una tale preliminare preparazione lo studio della Biologia potrà essere proficuo e concedere la visione delle gravi questioni che essa è destinata a trattare.

E così, io penso, si dovrebbe procedere anche in Italia dove invece in alcune (fortunatamente poche Università) si volle abolire lo insegnamento della Botanica e della Zoologia per gli studenti della Facoltà Medica e anche per quelli delle Scuole di Veterinaria, sostituendo tali insegnamenti con quello della Biologia generale.

Parlare di cose che non si conoscono dagli allievi, assurgere a considerazioni scientificamente sintetiche, allora quando mancano i principî sui quali fondare i ragionamenti di indole generale, a me pare un assurdo inconcepibile e disastroso, i cui effetti culturali non tarderanno a manifestarsi; quando ancora si consideri, in quali stretti limiti si sia ridotto da noi e reso quasi irrisorio nelle Scuole medie l'insegnamento delle Scienze Naturali.

Il tempo purtroppo, a non lunga scadenza, farà ragione di tale inconsulto modo di concepire la cultura scientifica dei medici e dei veterinari futuri.

Fino dai primi anni giovanili il Massart, sotto la guida e per consiglio del padre aveva atteso allo studio della Sistematica dei vegetali, di cui divenne conoscitore perfetto.

La sua attività di studioso rivolse in special modo allo studio della Flora del littorale del Belgio, come lo dimostrano le numerose pubblicazioni dedicate a questo argomento e come ne è superba prova la grandiosa sua illustrazione dei Distretti littoranei e alluvionali del Belgio, la quale comprende il primo volume di *Les aspects de la végétation en Belgique* ⁽¹⁾, prezioso studio di Geografia botanica, intrapreso nel 1903, al quale erasi associato il Collega Ch. Bommer; opera edita sotto gli auspicî dei due Ministeri dell'Interno e dell'Agricoltura, pubblicata dal Giardino Botanico dello Stato; in una edizione di lusso, quale soltanto, prima della guerra, una nazione ricca come era il Belgio, poteva permettersi. Lo studio del Massart, sussidiato da 86 tavole, illustra in modo meraviglioso la vegetazione delle Dune littoranee, quella delle alluvioni marine e fluviali e quella dei caratteristici *Polders* argillosi e sabbiosi e delle Dune interne, che Egli studiò con ricerche analitiche minuziose nelle varie associazioni vegetali, sulle condizioni dei mezzi speciali e dei loro modi di azione, che danno alla vegetazione caratteri propri, occupandosi in modo particolare della influenza dell'agente antropico sulla vegetazione delle piante coltivate.

(1) Cfr. BOMMER e J. MASSART, *Les aspects de la Végétation en Belgique*, Bruxelles, 1908.

Avendo Egli, dopo la guerra, ottenuto dal Re Alberto, due baraccamenti militari abbandonati a Nieuport, fondò in essi un laboratorio botanico, dove, come prima della guerra, aveva fatto a Concy, raccoglieva gli studiosi e li interessava allo studio della Flora locale. E non pago ancora di queste sue iniziative, un'altra di maggior mole ne svolgeva a Rouge-Cloitre, dove intendeva occupare se stesso e i suoi numerosi allievi allo studio degli incroci fra le differenti specie dei vegetali, investigandoli dal punto di vista genetico.

Molti progetti occupavano la sua mente; l'avvenire pareva sorridere alle sue iniziative, quando la malattia fatale lo colse nel 1925 rendendo vani i sogni di gloria e di ricerche!

Il *nostro* che vedeva il mondo dei vegetali coll'occhio acuto dell'ecologo e del biologo, non poteva concepire un Orto Botanico ecologico, regolato da quelle leggi architettoniche e simmetriche che determinarono gli impianti dei nostri vecchi, gloriosi Orti Botanici, sbocciati dalle necessità, dalle idee e dal gusto dei tempi passati.

Egli sognava e volle un Orto senza apparenze esteriori, senza eleganza, un Orto puramente ecologico, dove egli potesse seminare come avviene in natura; abbandonando ogni tentativo di coltivare ciò che dopo la semina non si sviluppava, non riseminando mai nello stesso luogo quelle specie che spontaneamente lo abbandonavano.

Nel nuovo Orto, i soli lavori edonistici da lui permessi, furono quelli destinati a mantenere i viali di passaggio in condizioni di servizio e a strappare le piante invadenti.

Così ebbe origine l'Orto di Rouge-Cloitre, nel terreno in cui dovevasi innalzare l'edificio destinato all'Istituto Léo-Errera.

All'osservazione di un suo allievo che il nuovo giardino non avrebbe potuto servire a studi di sistematica, rispose che il suo giardino era destinato allo studio ecologico dei vegetali e che perciò dovevasi in esso sistematicamente escludere qualunque cosa avesse anche un lontano sapore di Sistematica!

Sarà questo il tipo degli Orti Botanici dell'avvenire? io ne dubito; con queste idee non è egli meglio sopprimere addirittura ogni parvenza di Orto e valersi ancora più economicamente e naturalmente di ciò che la natura stessa (molto meglio dell'uomo!) coltiva nei prati, nei boschi, nelle acque?

Mi permetto però di osservare che queste idee del 1924, erano ben differenti da quelle che lo stesso Massart enunciava nell'anno 1902, quando dettava le modalità colle quali desiderava dovessero costruirsi i giardini botanici ad uso delle Scuole medie per sostituire la dimostrazione pratica a quella semplicemente verbale. Ma qui si trattava di uno scopo essenzialmente pratico e didattico.

Lo spazio accordatomi, non concedendomi di trattare delle singole pub-

blicazioni del Massart, mi limiterò a ricordare che la sua attività scientifica è dimostrata da un totale di più che 154 lavori ⁽¹⁾.

Di questi, 29 si occupavano di Floristica; 28 di Geografia botanica e di questioni ecologiche; 26 sono destinati a ricerche di Fisiologia vegetale; 23 illustrano argomenti di Ecologia; mentre 20 trattano di Genetica, di Embriologia; molti altri sono rappresentati da trattati scolastici, da conferenze, da studi di Anatomia e di Teratologia, ecc.

Si rimane compresi di ammirazione, come in sessant'anni di vita, abbia Egli compiuto così imponente serie di contribuzioni scientifiche originali, e stupiti quando si pensi ai viaggi, all'apostolato da lui per tanti anni esercitato nel Laboratorio, che ricorda il magnifico e munifico Léo Errera, educandovi una falange di allievi e allieve i cui lavori sono riassunti nei 10 poderosi volumi dei *Recueils de l'Institut botanique Léo Errera* (1906-1922); e quando infine si considerino le sue benemerenze patriottiche, le cure famigliari, i disagi delle escursioni. La vita sua fu continuo, ammirando tormento di febbrile lavoro enciclopedico.

In questo uomo il Belgio ha perduto un patriota eminente, uno scienziato insigne, fecondo e modesto, uno di quegli uomini che, per la inesausta attività di iniziative, operano come i fermenti, suscitando da soli molteplici energie latenti, indirizzandole al culto del bene e del bello.

Massart si è spento a Houx presso Namur il 15 di agosto 1925 e fu sepolto, come era desiderio suo, nel piccolo cimitero del suo paesello, ai piedi di una roccia, accompagnato dal dolore e dal pianto di pochi intimissimi famigliari.

Ricordando oggi i meriti di un uomo così raro, che fu nostro illustre Consocio, io penso che l'Accademia ha assolto un dovere e mi allieto dell'onore che mi fu fatto, di rievocare Colui che può essere meritatamente elevato a simbolo dell'amore alla scienza e della patria! ⁽²⁾

(1) Secondo l'elenco pubblicato dal giornale « Les Naturalistes Belges » (anno VI, n. 9, settembre 1925) i lavori sommerebbero a 154.

(2) Devo alla cortesia del sig. dr. P. Brand, allievo prediletto e assistente del Massart all'Istituto Léo Errera, molte delle notizie, qui riferite; e mi è quindi gradito il dovere di manifestargli la mia gratitudine per l'aiuto concessomi.

BIBLIOGRAFIA di J. MASSART (1)

Bulletins et Mémoires, Classe des Sciences. Académie royale de Belgique.

La cicatrisation chez les végétaux. 1898.

Recherches sur les organismes inférieurs: Sur le protoplasme des Schizophytes. 1901.

Sur l'irritabilité des plantes supérieures. 1902.

L'évolution est-elle irréversible? 1924.

La coopération et le conflit des réflexes qui déterminent la forme du corps chez *Araucaria excelsa*. 1924.

Recherches expérimentales sur la spécialisation et l'orientation des tiges dorsoventrales. 1924.

Sur l'irritabilité des spermatozoïdes dans l'œuf de la Grenouille. 1888.

Recherches sur les organismes inférieurs: La loi de Weber vérifiée par l'héliotropisme d'un Champignon. 1888.

Sur la pénétration des spermatozoïdes dans l'œuf de Grenouille. 1889.

Recherches sur les organismes inférieurs: La sensibilité à la concentration chez les êtres unicellulaires marins. La sensibilité à la gravitation. 1891.

Recherches sur les organismes inférieurs: Le lancement des trichocystes chez *Paramecium aurelia*. 1901.

Les naturalistes actuels et l'étude de la nature. 1912.

Action de la lumière continue sur la structure des feuilles. 1920.

Recherches sur les organismes inférieurs: Sur la motilité des Flagellates. 1920.

La notion de l'espèce en biologie. 1920.

Les quatre étapes de la conjugaison sexuelle. 1921.

Recherches sur les organismes inférieurs: Les réflexes chez les Polyporées. 1923.

Sur l'autostérilité du Coquelicot (*Papaver Rhoeas*). 1923.

Recueil de l'Institut Botanique Léo Errera.

Clautriavia, un nouveau genre de Flagellates.

La récapitulation et l'innovation en embryologie végétale.

Sur la morphologie du bourgeon: La différenciation raméale chez les lianes.

Sur des fleurs bicalcarées de *Corydalis solida*.

La cicatrisation chez les végétaux.

Recherches sur les organismes inférieurs: Le lancement des trichocystes chez *Paramecium aurelia*.

Essai de classification des réflexes non nerveux.

Sur l'irritabilité des plantes supérieures.

Sur les excitants de la division cellulaire (avec M^{lle} M. Maltaux).

Essai de géographie botanique des districts littoraux et alluviaux de la Belgique. 1908.

Esquisse de géographie botanique de la Belgique. 1910.

La création de réserves naturelles. 1913.

Le rôle de l'expérimentation en géographie botanique. 1913.

Quelques adaptations végétales au climat de la Côte d'Azur. 1922.

Sur la polarité des organes végétaux. 1922.

Franges buissonneuses sur les éboulis. 1922.

Les intellectuels allemands et la recherche de la vérité. 1922.

L'action de la lumière continue sur la structure des feuilles. 1922.

Recherches sur les organismes inférieurs: Sur la motilité des Flagellates. 1922.

(1) Dal giornale « Les naturalistes belges », loc. cit.

La notion de l'espèce en biologie. 1922.

Les quatre étapes de la conjugaison sexuelle. 1922.

La biologie des inondations de l'Yser et la flore des ruines de Nieuport. 1922.

Bulletin de la Société Royale de Botanique de Belgique.

Les études de M. W. Pfeffer sur la sensibilité des végétaux aux substances chimiques. 1888.

La biologie de la végétation sur le littoral belge. 1893.

La récapitulation et l'innovation en embryologie végétale (thèse de doctorat spécial). 1894.

Un botaniste en Malaisie. I à VIII. Quelques herborisations. 1895.

La dissémination des plantes alpines. 1898.

Un voyage botanique au Sahara. 1898.

Comment les plantes vivaces maintiennent leur niveau souterrain. 1902.

Projet d'une étude détaillée de la Géographie botanique de la Belgique (avec M. C. Bommer). 1903.

Les Muscinées du littoral belge. 1904-05.

Essai de géographie botanique des districts littoraux et alluviaux de la Belgique.

Les fourmis jardinières. 1906.

Sur l'introduction du calcul dans l'hérédité. 1911.

Pour la protection de la nature en Belgique. 1912.

Que sont devenues nos plantes rares? 1913.

La création des réserves naturelles en Belgique. 1920.

Bulletin du Jardin botanique de Bruxelles.

Un jardin botanique pour les écoles moyennes. 1902.

L'accommodation individuelle chez *Polygonum amphibium*. 1902.

La pollination sans fécondation. 1902.

Comment les plantes vivaces maintiennent leur niveau souterrain. 1903.

Comment les plantes vivaces sortent de terre au printemps. 1903.

Comment les jeunes feuilles se défendent contre les intempéries. 1903.

Les collections éthologiques au Jardin botanique de l'Etat. 1904.

Recherches sur les organismes inférieurs: Considérations théoriques sur l'origine polyphytétique des modes d'alimentation de la sexualité et de la mortalité chez les organismes inférieurs. 1905.

Notice sur la terre des plantes grasses au Jardin botanique de l'Etat. 1905.

La collection phylogénique au Jardin botanique de l'Etat. 1905.

Les Muscinées du littoral belge. 1905.

Société royale des Sciences Médicales et Naturelles de Bruxelles.

Journal:

Recherches sur l'irritabilité des leucocytes (en collaboration avec M. Ch. Bordet). 1890.

La sensibilité tactile chez les organismes inférieures. 1890.

Annales:

L'origine polyphytétique des modes d'alimentation de la sexualité et de la mortalité chez les organismes inférieurs. 1904.

Léo Errera. 1905.

Bulletin:

Clautriavia, un nouveau genre de Flagellate. 1900.

Sur la répartition des caractères héréditaires dans l'individu végétal. 1903.

Quelques fleurs doubles. 1905.

La base matérielle de l'hérédité et de la variabilité d'après les dernières recherches des cytologistes. 1905.

Les caractères ataviques dans les hybrides d'*Impatiens*. 1906.

Les chimères végétales. 1911.

Pourquoi les graines ne germent pas dans les fruits charnus. 1919.

La lutte pour l'existence entre les plantes dans les inondations de l'Yser. 1920.

L'autofertilité et l'autostérilité. 1922.

La mission biologique belgo-brésilienne. 1923.

Bulletin scientifique (biologique) de la France et de la Belgique.

Parasitisme organique et parasitisme social (en collaboration avec M. Emile Vandervelde). 1893.

Sur l'irritabilité des Noctilques. 1893.

Pourquoi les graines ne germent pas dans les fruits charnus. 1917.

Sur la polarité des organes végétaux. 1918.

Annales de l'Institut Pasteur (Paris).

Le chimiotaxisme des leucocytes et l'infection microbienne (avec M. Ch. Bordet). 1891.

Le chimiotaxisme des leucocytes et l'immunité. 1892.

Sur les modifications des leucocytes dans l'infection et dans l'immunisation (avec M^{lle} C. Evrard et M. J. Demoor). 1893.

Essai de classification des réflexes non nerveux. 1901.

Extension de l'Université libre de Bruxelles.

Impressions de la nature équatoriale. Java, 1895.

Le désert. 1898,

Comment les montagnes se font et se défont. 1900.

La guerre et les alliances entre animaux et végétaux. 1900.

L'évolution et ses facteurs.

Collection de cartes, schémas, profils et coupes relatifs aux excursions scientifiques dirigées par J. Massart de 1904-1908. 1909.

Cartes, coupes et tableaux relatifs aux excursions dans le Crétacé et le Jurassique en 1914. 1914.

La vie et la mort. 1919.

Impressions de la nature équatoriale. Le Brésil, leçons 1 et 4 (en collaboration avec A. Navez (2-3) et P. Brien (5-6). 1923.

Relations des excursions conduites par J. Massart:

a) Sur le littoral belge, par M^{lle} J. Wéry. 1906.

b) En Brabant, par M^{me} Schouteden-Wéry. 1909.

c) Dans la vallée de la Meuse, par M^{lle} J. Barzin. 1911

d) En Hollande, par M^{me} Lefebvre.

Revue de l'Horticulture belge et étrangère

Au Jardin botanique de l'Etat à Bruxelles. 1903.

Le niveau souterrain des Tulipes et des Crocus. 1904.

Les plantes épiphytes. 1904.

Les plantes de sous-bois. 1904.

Une expérience sur l'hérédité. 1905.

Quelques fleurs doubles. 1905.

L'horticulture sur les dunes littorales. 1905.

Annales du Jardin botanique de Buitenzorg.

Sur la morphologie du bourgeon. La différenciation raméale chez les lianes. 1895.
Les végétaux épiphylls. 1898.
Sur les ronds de sorcières de *Marasmius oreades*. 1910.

Archives de Biologie.

Sensibilité et adaptation des organismes à la concentration des solutions salines. 1889.

Bulletin de la Société belge de Microscopie.

La sensibilité de la conjonctive à la concentration des solutions salines. 1891.
Sur des fleurs bicalcarées de *Corydalis solida*. 1897.
Liste des Flagellates observés aux environs de Coxyde et de Nieuport. 1900.

Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique.

Les conditions d'existence des arbres dans les dunes littorales. 1904.
Les lianes: leurs mœurs, leur structure. 1906.

Revue Universitaire.

Les déplacements de la côte belge. 1891.
L'intervention des animaux dans l'évolution des végétaux. 1893.

Revue de l'Université libre de Bruxelles.

Notes javanaises. 1895-96.
Promenades de naturalistes à Zermat (avec M. A. Lameere). 1898.
Léo Errera (1858-1905). 1905.

Annales de Gembloux.

La productivité du sol: les facteurs biologiques. 1908.
L'application du calcul à l'hérédité. 1911.

Les Naturalistes belges.

Les forêts vierges de Java. 1920.
Les inondations de l'Yser au point de vue biologique. 1921.

Actes du III^e Congrès international de Botanique à Bruxelles (1910).

Les herborisations du Congrès de Botanique. 1912.
Ville de Bruxelles: Cours d'éducation B. Cours complémentaires.
Les causes de la distribution géographique des végétaux (syllabus autographié). 1920.

Bulletin de la Société royale belge de Géographie.

Théophile Durand. 1912.

Annales de Géographie. Paris.

D'où vient la flore du littoral belge? 1916.
Quelques adaptations végétales au climat de la Côte d'Azur. 1917.
Franges buissonneuses sur les éboulis. 1919.

Gardener's Chronicle. London.

A botanic garden in the sand-Hill. 1904.

Report of the British Association for Advancement of Science. Portsmouth. 1911.
Phytogeography as an experimental science.

Bulletin des Commissions royales d'Art et d'Archéologie.

Les noms de lieux dits. 1914.
L'habitation rurale. 1914.

Conférence interalliée des Académies des Sciences

(en collaboration avec de la Vallée-Poussin et Lecointe).
2^e session à Paris, novembre 1918. Bruxelles. 1919.

Journal Médical de Bruxelles

Médecins pour Hadjis. 1896.

Revue des Idées.

Les naturalistes actuels et l'étude de la nature. 1913.

Revue de Paris. 1918.

Les intellectuels allemands et la recherche de la vérité.

Revue Scientifique

Une organisation scientifique interalliée. 1917.

Liures et Brochures.

L'évolution régressive en biologie et en sociologie (avec MM. J. Demoor et Em. Vandervelde). Paris, 1897.

Sommaire du cours de botanique fait en candidature en sciences à l'Université de Bruxelles. 1^{re} édit. Bruges, 1906; 2^e Bruges, 1912; 3^e Bruxelles, 1919.

Les aspects de la végétation en Belgique. I. Les districts littoraux et alluviaux. Bruxelles, 1908.

Collection de cartes, schémas et plans relatifs, aux herborisations de la candidature en sciences. 1^{re} édit. 1910; 2^e augmentée, 1923.

Nos arbres. Bruxelles, 1911.

Pour la protection de la nature en Belgique. Bruxelles, 1912.

Les aspects de la végétation en Belgique. II. Les districts flandrien et campinien. Bruxelles. 1912.

Comment les Belges résistent à la domination allemande. Paris, 1916.

Le chiffon de papier. Paris, 1917.

La presse clandestine dans la Belgique occupée. Paris-Nancy, 1917.

Le Front de Flandre. Bruxelles. Touring-Club, 1919.

Les intellectuels allemands et la recherche de la vérité. Bruxelles, 1920.

Eléments de biologie générale et de botanique. Bruxelles, 1921-1923.

Diagrammes, cartes, schémas, tableaux relatifs à la première excursion géographique interuniversitaire. Bruxelles, 1921.

En collaboration : La Mer : Histoire naturelle du littoral. Bruxelles, Touring-Club. 1922.

L. D.

Commemorazione del Socio Nazionale C. Viola

letta dal Socio F. ZAMBONINI nella seduta del 3 giugno 1926.

Il 4 agosto 1925 moriva in Bologna, ove da pochi mesi si era ritirato, dopo il collocamento a riposo concessogli dietro sua domanda, il prof. CARLO VIOLA, che apparteneva alla nostra Accademia, come Corrispondente prima, come Socio nazionale poi, fin dal 4 luglio 1905.

Con Carlo Viola gli studi geologici e mineralogici perdevano un indagatore infaticabile, che durante un quarantennio aveva, con lena inesaurita, prodigato il suo ingegno acuto ed originale intorno a problemi fondamentali della cristallografia, e contribuito, in modo notevole, alla formazione di quella carta geologica dell'Italia, ancora lungi dal compimento, dopo sessant'anni di lavoro del R. Ufficio Geologico.

Il Viola nacque in Zara il 2 novembre 1855, ma, italiano di origine e di sentimenti, dopo i primi studî universitari seguiti nelle Università di Gratz e di Vienna, insofferente della dominazione austriaca, venne a Roma, dove conseguì la laurea di ingegnere civile nel 1880. Fu assistente per un anno del prof. Pisati, titolare della cattedra di Fisica Tecnica nella R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri di Roma, e, subito dopo, superato brillantemente l'apposito concorso, entrò come allievo ingegnere nel Corpo Reale delle Miniere. Fino al giugno 1895 rimase a Berlino, nell'Accademia Montanistica prima e nell'Istituto geologico poi, per eseguire studî di perfezionamento ed indagini varie. Rientrato in Italia, dopo due anni passati come addetto al distretto minerario di Ancona, fu chiamato, alla fine del 1888, a Roma, presso il R. Ufficio Geologico, dove rimase, a prescindere da un breve periodo (1899-1900) trascorso in Sardegna come direttore della Scuola Mineraria e del distretto minerario di Iglesias, fino al 1905, quando, in seguito a concorso, fu nominato professore di Mineralogia nella R. Università di Parma.

Durante i lunghi anni trascorsi a Roma, egli fu addetto dapprima al rilevamento geologico delle provincie di Salerno, Potenza, Catanzaro, Bari, Lecce, Foggia, e, più tardi, alla revisione di quello della provincia romana. Ed è durante quel periodo che il Viola, così intensamente occupato dai lavori di ufficio, costretto a lunghe e faticose peregrinazioni in regioni di viabilità allora assai difficile, lontane dalle città, senza le più elementari comodità della vita, trovò, nel suo entusiasmo veramente raro per la ricerca scientifica, la possibilità di eseguire, per pura iniziativa personale, superando difficoltà di ogni genere, la maggior parte dei suoi lavori di cristallografia

teorica e di ottica cristallografica, ai quali è durevolmente legato il suo nome. L'Ufficio Geologico mancava, allora, di mezzi e di apparecchi per le indagini cristallografiche, ed il Viola poté lavorare sperimentalmente in quel campo soltanto per l'ospitalità che il prof. Blaserna gli accordò nell'Istituto Fisico di Roma. E poichè, come è naturale, in quell'Istituto non vi era quanto occorreva alle sue ricerche, così il Viola, dal 1895 al 1904, si recò a lavorare a sue spese, durante le vacanze estive, nell'Istituto Mineralogico di Monaco di Baviera, dove poté giovare non soltanto degli apparecchi, ma anche, il che è più importante, della discussione scientifica col Sohnke, presto mancato ai vivi, e col Groth, cioè con due dei più illustri precursori e preparatori di quel rinnovamento profondo che doveva iniziarsi pochi anni più tardi, con la scoperta di Lauc. E sempre a sue spese si provvide di un goniometro a due cerchi, che egli fece costruire, dopo lunghi studi, perfezionando e modificando il tipo allora da un decennio introdotto nella scienza dal prof. V. Goldschmidt.

Le pubblicazioni scientifiche del nostro compianto Collega ammontano a circa 200, e si riferiscono, oltre che alla scienza delle costruzioni, alla geologia, alla petrografia, alla cristallografia ed alla mineralogia descrittiva.

Nei lavori di geologia sono riferiti i risultati dei rilevamenti geologici eseguiti come ingegnere rilevatore del R. Ufficio Geologico, ed alcuni rivestono una particolare importanza, come quello, insieme a Giovanni Di Stefano, sul singolare giacimento di marne triasiche e di rocce eruttive alla Punta delle Pietre Nere, presso il lago di Lesina, in Provincia di Foggia, e le Note e Memorie dedicate alla regione vulcanica degli Ernici. Ingegno eminentemente versatile, il Viola volle anche cimentarsi in qualche lavoro di paleontologia, e merita di essere ricordata la Memoria sui pettini del calcare a piccole nummuliti dei dintorni di Subiaco, nella quale è anche descritta una nuova specie, che il Viola, con pensiero affettuoso e gentile, volle dedicare alla compagna veramente eletta della vita, la signora Clara Viola Schneider.

Tra gli scritti petrografici, hanno un duraturo valore quelli sulle rocce eruttive della già citata Punta delle Pietre Nere, pochissimo conosciute, prima che il Viola le illustrasse, come pure quelli sulle lave dei vulcani degli Ernici, e le Note dedicate alla angitite anfibolica di Guimarra in Sicilia ed alla diabase della Nurra, in Sardegna.

Poche ricerche ha eseguito il Viola di Mineralogia descrittiva, ma alcune di esse vanno ricordate. Così, si devono al Viola il ritrovamento del raro minerale Lawsonite in Basilicata, uno studio accurato della bellissima aragonite di Sicilia, dello spinello dell'Isola d'Elba (eseguito, questo, insieme al suo allievo dott. Ferrari), e le belle indagini intorno alla associazione regolare dei cristalli di rutilo e di ematite, che posero in chiaro la vera essenza del fenomeno.

Ma, indubbiamente, l'opera più importante ed originale del Viola è

rappresentata dai suoi numerosi contributi (circa un centinaio) alla cristallografia teorica ed alla determinazione delle costanti ottiche delle sostanze cristalline. È questo un complesso di lavori, importanti non solo per i risultati, ma anche, e, forse, più, per lo spirito che li animò. Grazie a quei lavori, infatti, il Viola si è assicurato un posto fra coloro che, nell'ultimo decennio del secolo passato, iniziarono nella cristallografia un movimento profondamente rinnovatore. Ed in Italia Viola fu solo, e, dobbiamo pure dirlo, non venne compreso, ma fu, anzi, per lungo tempo osteggiato, sicchè l'opera sua non ebbe influenza sui nostri giovani studiosi. Certamente, il Viola non ebbe quel potere di entusiasmare i giovani, quella comunicativa smagliante che fanno di uno studioso un Maestro ed un divulgatore dei nuovi trovati della Scienza: i suoi stessi lavori non sono dei modelli di chiara esposizione, e la difficoltà dei soggetti trattati, come pure una certa tendenza a non maturare e perfezionare i risultati primi delle indagini, lo fecero incorrere in alcune sviste, che gli furono acerbamente rimproverate. Ma sarebbe grave errore il far risalire alle circostanze ora accennate il fatto che l'opera del Viola non sia stata generalmente apprezzata come avrebbe dovuto. La causa vera è da ricercare nell'indirizzo degli studî mineralogici, un po' dovunque, ma sopra tutto in Italia, verso la fine del secolo passato ed anche dopo. Ridotta la cristallografia ad un catalogo delle forme semplici dei varî sistemi, ed a monotone esercitazioni sul modo il più elementare possibile di dimostrare relazioni o di risolvere problemi pratici, dimenticato il principio di Neumann, condensati, nei corsi, fenomeni fondamentali come il polimorfismo e l'isomorfismo, in pochi cenni sommarî, non è che troppo logico che fisici e chimici abbiano, da noi, abbandonata a sè stessa una scienza che sembrava incapace di progresso e di interessare coloro che nella forma esteriore dei cristalli non potevano vedere altro che una delle proprietà fisiche, estrinsecazione della natura chimica e della struttura intima. Se, tanti anni prima, Arturo Schopenhauer aveva fulminato, per il loro empirismo, gli « uomini del crogiolo e dalla storta », che cosa si sarebbe dovuto dire dello spirito dominante, e non solo allora, nelle ricerche cristallografiche e mineralogiche italiane? Vietata, sotto pena di essere presi in sospetto come romanzieri o poeta della scienza, qualunque disamina di questioni teoriche o generali, gli studiosi rivolgevano la loro attività a cercare qualche minuscola faccietta smussante uno spigolo od un vertice, a calcolare nuove costanti, spesso non più esatte di quelle già note, a descrivere nuovi giacimenti di minerali anche frequenti, senza un reale e considerevole aumento delle nostre cognizioni. Non mancavano menti elette nei giovani, che avrebbero potuto e voluto fare di più, ma è meglio non ricordare le loro traversie. Del resto, l'idolatria del « fatto », la sfiducia nelle ricerche teoriche erano, pur troppo, assai diffuse in Italia in ogni ramo di scienza, e soltanto nel 1907, uno dei nostri sperimentatori più severi, Augusto Righi, ammoniva che « se è dovere nostro l'indirizzare i nostri

allievi alle pazienti ricerche, addestrarli alle rigorose misure, che solo possono fornire il necessario controllo ai concetti sintetici e alle teorie, non dobbiamo però cadere in esagerazione nel frenare la loro fantasia, non dobbiamo rendere troppo scettici ed utilitari coloro, cui natura donò forse un felice intuito scientifico».

Eppure, noi avevamo, nel campo mineralogico, una Scuola italianissima, quella di Quintino Sella e, soprattutto, di Arcangelo Scacchi, l'uno e l'altro esempi di studiosi, precisi e severi nell'esperimento, arditi e geniali nelle idee e nelle coordinazioni. Ma si preferì, col nostro vecchio vezzo italiano, di negleggere i nostri per sopravvalutare lo straniero, lasciare nell'ombra l'opera di coloro che nei tempi tristi della Patria avevano saputo tenerne alto il nome, per seguire pedissequi la parte più gretta e formale di scuole straniere. Ed avvenne nella cristallografia e nella mineralogia quanto accadde nella biologia. Un giudice competentissimo, Battista Grassi, nostra gloria vera, disse, in una delle nostre pubblicazioni ufficiali e più solenni, che i nostri studi niun vantaggio avevan ricevuto dal trapiantamento fra noi di scuole, di metodi e di scienziati stranieri, troppo alieni al temperamento della nostra razza, incline, come ha mostrato nei secoli, piuttosto ad imporre i propri caratteri agli stranieri scesi fra noi, che a farsene imitatori.

Se nella biologia, come scrisse il Grassi, le scuole straniere non portarono vantaggio, l'aver trascurato l'esempio mirabile di Arcangelo Scacchi, che con le sue ricerche sulla poliedria e sulla polisimmatria aveva affrontato problemi di decisiva importanza per la cristallografia, con le sue indagini sui minerali pneumatolitici aveva aperto nuove vie alla minerogenesi, con gli studi sui tartrati ed i racemati seppe farsi, molti anni più tardi, apprezzare da van't Hoff, ebbe nel nostro Paese per la mineralogia e la cristallografia, conseguenze nefaste, che si sintetizzano così: noi siamo rimasti assenti nel complesso formidabile di ricerche che hanno costruito il nuovo e meraviglioso edificio della struttura delle sostanze cristalline.

Si comprende, pertanto, come, nell'ambiente che ho lumeggiato, i lavori cristallografici del Viola non potessero essere egualmente valutati. Egli infatti, è stato un appassionato seguace di uno scienziato di genialità veramente rara, Eugrafio Fedorov, che, dopo aver determinato tutti i possibili sistemi di punti, negli edifici cristallini, ha, con la cristallografia zonale, trovato la via che porta alla giusta orientazione ed all'interpretazione del complesso delle forme cristalline delle varie sostanze. Non solo, ma il Fedorov ha, col piatto a multipla rotazione, inventato un metodo del tutto nuovo di determinazione delle costanti ottiche delle sostanze cristalline. Su queste nuove vie, anche oggi tanto poco note ai più si è inoltrato il Viola trent'anni fa, ed il suo contributo di idee e di fatti sperimentali è onorevole e gli valse, distinzione molto rara per studiosi italiani, già nel 1900, la nomina a socio della allora Imperiale Società Russa di Mineralogia.

Continuando nelle sue indagini cristallografiche volle il Viola dedurre

la legge di Haüy degli indici numeri interi e piccoli in base a considerazioni sull'accrescimento dei cristalli. È, però, veramente singolare, che un uomo come il Viola, aperto alle idee più ardite e moderne, si sia lasciato trasportare fino a chiamare la teoria della struttura a reticoli spaziali « un dogma, che appartiene piuttosto alla metafisica, che alla cristallografia »: esempio eminente dell'influenza che le idee dominanti possono esercitare anche sulle menti più libere. Ciò non impedì, tuttavia, al Viola di cercare di precisare il reale valore della legge di Haüy: alle critiche aspre che gli furono mosse, egli poté rispondere ricordando le osservazioni acutissime che, quasi mezzo secolo innanzi, Quintino Sella aveva esposto intorno alle forme a simboli complicati dell'argento rosso, del quarzo e della calcite, e mostrando col fatto quanto fossero illusori tanti simboli di forme semplici osservate nella pirite e nella calcite.

Anche a lungo si occupò il Viola della determinazione dei feldspati nelle lamine sottili, contribuendo alla soluzione del problema, importantissimo per la petrografia, sia con lavori teorici che con determinazioni sperimentali.

Fu, così, condotto il nostro Collega ad interessarsi in modo speciale del totalreflettometro, indagando specialmente intorno ai metodi atti a permettere la determinazione ottica completa, in base ad una sola lamina di orientazione qualsiasi. Non tutti i metodi proposti dal Viola sono sicuri, ma, certamente, il suo contributo non può essere e non è stato, infatti, trascurato da quanti si sono occupati della questione. Singole determinazioni egli ha eseguito su vari minerali italiani; particolare menzione meritano quelle sull'anortite del Vesuvio.

Al complesso delle sue idee il Viola dette forma definitiva in due trattati, pubblicati l'uno in tedesco nel 1904, l'altro in italiano nel 1919. Non si potrebbe tutto accettare quanto è contenuto in quei libri, ma non mancano le idee originali, che invogliano a nuove indagini, che invitano a revisioni ed a critiche di molti concetti troppo spesso diffusi senza un rigoroso esame.

Oltre che alla nostra Accademia ed alla Società Russa di Mineralogia, il Viola appartenne anche, come uno dei suoi venti soci stranieri, alla Società Mineralogica Inglese. E pochi mesi prima che la morte ce lo rapisse, la Società Italiana delle Scienze lo accolse fra i suoi quaranta Soci.

Se lo studioso fu ricco di ingegno e di coltura, tutto pervaso da quell'amore per la ricerca che senza tregua sospinge chi ne è preso, l'uomo fu profondamente buono, delicato e gentile. Ed è per questo che io ho voluto ricordarlo, oggi, con un calore non comune alle commemorazioni accademiche. Se come cantò il Poeta,

A egregie cose il forte animo accendono
L'urne de' forti.....

il ricordo di coloro che onorarono la nostra Compagnia sia ammaestramento e, anche, ammonimento.

Commemorazione del prof. Antonio Maria Antoniazzi

(1° aprile 1872-30 novembre 1925)

comunicata dal Corrisp. EMILIO BIANCHI nella seduta del 3 giugno 1926

Stetti con Lui l'ultima volta il 2 novembre dello scorso anno (1925) in occasione delle estreme esequie al compianto dott. Eugenio Padova.

Quando l'Antoniazzi mi vide, mi disse: «Non sarebbe stato meglio che tu fossi venuto per me?». Ed al mio cenno di affettuosa protesta soggiunse: «Siccome so che tu verrai, tieniti preparato!».

Il dolore per la perdita del suo allievo gli aveva ricondotto nell'animo il desiderio della morte. Quel desiderio che, ripetuto tante volte dopo il fiero attacco del 16 dicembre 1924, negli ultimi mesi aveva però avuto conferme sempre più rare; perchè il carissimo Amico, sia pure lentamente, rinasceva alla vita.

A quelle sue parole di sconforto io opposi una prudente persuasione; lo trassi affettuosamente a considerare le ultime prove della sua rinnovata attività; la diligente ripresa alle sedute dell'Istituto Veneto, il proposito suo di iniziare le lezioni universitarie, gli insegnamenti di pratica astronomica impartiti in notti, oramai rigide, al suo nuovo allievo dott. Zagar, le sue ottime condizioni fisiche. Mi ribattè, è vero, che ancora trovava difficile talvolta la lettura degli scritti; ma, poco dopo, parve rinato alla speranza; e fu vivissima la gioia sua quando lo pregai di darci la sua preziosa collaborazione in un prossimo dovere di ufficio a Roma. Quella collaborazione di sereno giudizio e di profonda, sempre chiara visione del meglio, da noi tutti sempre tanto desiderata e che lo faceva nostro compagno prezioso di responsabilità.

Fu così che per tutto quel giorno la parola di sconforto non riapparve più; riconfermò entusiasticamente la sua adesione a quello spirito di solidarietà fra Colleghi che tanto aveva già dato di buoni frutti, e trattò questioni diverse del nostro studio con una così esatta precisazione di ricordi, di apprezzamenti e di progetti da parte sua, che io lo lasciai vivamente confortato, molto più di quello che non lo fossi lontano da Lui in seguito alla trepidante considerazione delle lettere che frequentemente mi scriveva.

Lo assillava il pensiero delle responsabilità del suo posto; gli pareva di non poter più fare completamente il suo dovere, gli pesava anche quella attesa, da tutti concessagli col più vivo ed affettuoso sentimento di devozione, che tutti pensavamo sarebbe stata tra breve conclusa col suo normale reingresso nella vita della nostra famiglia astronomica.

Invece il 30 novembre dello scorso anno, verso le ore 11, dopo aver passato la mattina in Osservatorio ad occuparsi, di ottimo umore, di questioni scientifiche diverse, mentre stava rientrando in casa, colpito fulmineamente, si accasciava inconscio della sua fine, che susseguiva pressochè immediata.

Come scrissi all'illustre Presidente dell'Accademia dei Lincei quando ebbi l'invito di commemorare il povero Amico, sonvi qui dentro Uomini Egregi che ben meglio di me avrebbero potuto tessere le lodi di Antonio Maria Antoniazzi, precisare il valore scientifico dell'opera sua e metterne in luce le doti rare di mente e di cuore. Domando venia adunque se la mia parola poco varrà a tale scopo. Ho una sola speranza: di almeno saper esprimere l'eco vivissima degli affetti che Egli lasciò fervidi tra quanti gli furono amici e compagni di lavoro.

Intorno alla sua fanciullezza dirò le notizie che mi volle cortesemente favorire il fratello suo, Monsignore Emilio.

Nato a Collalto, in comune di Refrontolo, il 1° aprile 1872, venne educato nei primi anni dallo zio Monsignore, uomo di grande cuore, di larghissima cultura ed esimio oratore sacro. Fu lo zio che gli instillò nell'animo, con la coscienza del proprio dovere, quel senso di illimitata bontà che sempre lo accompagnò per tutta la vita.

Mancando in paese le prime scuole, andava ogni giorno a Follina, dove riceveva lezioni dalle sorelle del compianto professore Lorenzoni. Forse sino da allora l'occhio perspicace del Lorenzoni incominciò a notare ed amare il bravo fanciullo. Fece con molto onore le Scuole tecniche a Conegliano e l'Istituto tecnico a Padova, da dove non si mosse più.

Abbandonata l'idea di dedicarsi alla Medicina, si iscriveva nel 1889 alla Facoltà di Scienze e vi conseguiva la laurea in matematica a pieni voti e lode il 17 luglio 1893.

Nell'ottobre dello stesso anno è aggregato all'Osservatorio in qualità di allievo; dal 1° gennaio 1894 è nominato assistente effettivo, nel 1902 astronomo aggiunto, astronomo titolare nel 1909; straordinario di astronomia e Direttore della Specola col 1° febbraio 1913; ordinario nel 1917.

A completare questi cenni di carriera astronomica basterà aggiungere che nell'anno scolastico 1908-1909 ebbe l'incarico del corso di Geodesia teoretica, avendo conseguita nel 1908 la libera docenza in astronomia; e che svolse, nell'anno scolastico 1910-11, un corso pareggiato di astronomia presso quell'Ateneo.

La produzione scientifica dell'Antoniazzi non è abbondante; e ciò per due ragioni. Anzitutto perchè egli si induceva a pubblicare soltanto quello che riteneva opportuno e quasi necessario di far conoscere, e poi perchè ogni suo lavoro non vedeva la luce se non dopo una profonda e perfetta elaborazione. Quando si dice che l'Antoniazzi fu ben degno successore del

suo Maestro, del Lorenzoni, si intende appunto di dire che tutta la sua attività scientifica, così produttiva come didattica, è ben degna d'essere quella di un allievo di quel grande Maestro, che portò la Scuola Astronomica padovana al grado più elevato di potenzialità didattica e di esemplare perfezione.

La caratteristica di precisione, di chiarezza e di esauriente sviluppo dello argomento, appare specifica in tutti i lavori dell'Antoniazzi, sino dai più giovanili.

Possono così chiamarsi quelli che videro la luce dall'inizio della sua carriera astronomica sino al 1900. Tra essi meritano speciale menzione quello relativo ad *Alcune espressioni dei rapporti n_1 ed n_2 proposte per la seconda approssimazione nel calcolo di un'orbita ellittica su tre osservazioni*; quello dal titolo: *Equazioni di condizione per le occultazioni osservate a Padova nel 1894 e nel 1895*; quello sui *Passaggi dei lembi della Luna e posizioni del cratere Moestling A osservati al Circolo Meridiano di Padova negli anni 1897 e 1898*; e quello dal titolo *Osservazioni di pianeti e di comete fatte negli anni 1899 e 1900*.

Tutta l'ossatura della astronomia teorica ed osservativa è esaminata ed acutamente applicata in questi quattro lavori.

Nel primo di essi l'Antoniazzi riassume una parte della sua tesi di laurea trattando il nesso esistente fra le diverse espressioni date da Gauss, Oppolzer, Gibbs e De Gasparis per i rapporti delle aree nei calcoli delle orbite ellittiche; e dimostra la superiorità del procedimento proposto dal Gauss per le successive ipotesi di correzione dei rapporti stessi, anche se di alcun poco più pesante degli altri dal punto di vista del calcolo numerico.

Nel secondo lavoro l'Antoniazzi, prendendo occasione della riduzione di molte occultazioni osservate a Padova dal 1776 al 1893, esamina a fondo tutto il problema relativo al contributo che l'osservazione di tali fenomeni può dare alla correzione degli elementi orbitali del nostro Satellite; espone i criteri da seguire per assicurarsi, il più rapidamente possibile, della visibilità locale di una occultazione, deduce la forma generale delle equazioni di condizione fra le piccole correzioni incognite agli elementi lunari, agli elementi stellari ed a quelli che definiscono la posizione geografica del luogo di osservazione; fa una esposizione critica delle diverse forme date dai diversi autori per dette equazioni, e calcola le 53 relative a 53 fenomeni osservati a Padova nel 1894 e 95, prendendo in considerazione come incognite le tre correzioni che sarebbero da applicarsi alle coordinate geografiche locali, le due relative alle coordinate delle stelle osservate, le quattro relative agli elementi lunari e quella infine relativa all'incertezza cumulativa dell'istante osservato pel fenomeno. Precisa poi l'Antoniazzi le caratteristiche intrinseche di ognuna di queste incognite.

Nel terzo lavoro ricordato, quello *Sulle osservazioni meridiane dei lembi*

lunari e del cratere Moesting, dopo una meravigliosa introduzione del Lorenzoni, nella quale è sviscerato in tutto il suo sviluppo storico il problema delle osservazioni di posizione della luna, l'Antoniazzi riporta la serie delle sue osservazioni lunari del 1897-98; ma ne fa il calcolo completo, nel senso che non solo deduce da esse le correzioni da apportarsi alle coordinate equatoriali dell'astro quali deduconsi dalle Tavole teoriche, ma conclude anche le correzioni agli elementi orbitali lunari; precisamente: la correzione costante alla longitudine, la correzione periodica della equazione parallattica, quella dell'inclinazione dell'orbita sull'eclittica e quella infine del nodo dell'orbita stessa.

Anche il lavoro dal titolo modesto di *Osservazioni di pianeti e di comete fatte negli anni 1899-1900* resterà come modello in questo ordine di ricerche, preceduto come è da una sintetica esposizione (in molti punti originale) della teoria degli strumenti equatoriali.

Come già ho detto, sono quattro capitoli fondamentali della Astronomia teorica e pratica che l'Antoniazzi ha trattato in queste quattro pubblicazioni; ebbene: nessun testo di astronomia potrà mai raggiungere la semplicità di esposizione, la completezza di contenuto, la rigosità di concetto e di formulazione che risaltano in questi lavori; essi ben possono additarsi agli studiosi di astronomia quali esempi insuperabili di ricerca scientifica seria e conclusiva. Noi sogliamo ricordarli come prodotti tipici della grande Scuola astronomica padovana.

Ma la eccellenza dell'Antoniazzi come osservatore e come critico sia delle osservazioni che delle questioni teoriche astronomiche, già saldamente affermata nei lavori ai quali ho accennato, rifulge completa in altre tre sue ricerche; quella sul *Valore medio della parallasse solare risultante dalle osservazioni del pianeta Eros* fatte all'Equatoriale Dembowski (obb. 187 mm.) della Specola di Padova dal 23 ottobre 1900 al 13 febbraio 1901; quella sulle *Posizioni del nucleo e direzione della cometa di Halley nella sua apparizione del 1910*, osservate alla Specola di Padova, e quella dal titolo « *Posizioni medie per il 1900, o di 637 stelle della zona da 46° a 55° di declinazione boreale*, osservate al Circolo meridiano della Specola di Padova ».

Il primo lavoro, relativo alla parallasse solare conclusa dall'Antoniazzi colle sue osservazioni del 1900-1901, non potrebbe meglio essere precisato nella sua intrinseca importanza, di quanto appaia dalla relazione fatta su di esso dal Lorenzoni nel presentarlo per la pubblicazione negli Atti dell'Istituto Veneto. Ben a ragione il Lorenzoni esalta, sia pure con misurate parole, « il vivo e nobile desiderio dell'Antoniazzi di portare un contributo non ispregevole per quanto minimo alla precisa determinazione di uno fra gli elementi fondamentali dell'astronomia ». Ricordata la esigua potenzialità ottica dello strumento usato, detto del primo calcolo approssimato fatto dall'Antoniazzi onde giudicare quasi *a priori* della attendibilità delle sue osservazioni, riassume il Lorenzoni l'ingente lavoro di calcolo compiuto dal

Nostro per arrivare alle 174 equazioni di condizione del problema fornite dalle misure fatte, e giustamente mette in rilievo il valore della parallasse media solare di $8'',795$ così concluso, in assoluta coincidenza con quello che derivò dalla serie di misure micrometriche fatte a Collurania (Teramo) dal prof. Cerulli col potente e magnifico equatoriale di Cook, e per soli 11 millesimi di secondo d'arco inferiore al valore medio dedotto dall'Hinks da tutte le osservazioni micrometriche e da tutti i rilievi fotografici fatti in occasione di quella fortunata opposizione di Eros.

L'altro lavoro ricordato, relativo alla cometa di Halley nella sua apparizione del 1910, compulsa le osservazioni fatte a Padova nei riguardi specialmente della posizione del nucleo della cometa e della direzione nello spazio della coda. Fu l'Antoniazzi il primo che in quella occasione affermò la impossibilità dell'incontro della coda cometaria con la Terra. Ma assai più importanti sono le conclusioni dedotte dal calcolo e dalla discussione critica delle osservazioni padovane fatta dal Nostro con un suo formulario del problema che lo condusse a questi risultati: 1° che la coda dell'astro era adagiata nel piano dell'orbita rimanendo rispetto al raggio vettore dalla parte opposta alla direzione del moto della cometa; 2° che l'asse della coda nel primo tratto, a partire dal nucleo, formava col prolungamento del raggio vettore un angolo di circa 28° ; ed un angolo di 40° circa, la corda lunga i $\frac{3}{20}$ della distanza terra-sole (3600 raggi terrestri); e che, a partire da quel punto, la curvatura dell'asse caudale andava diminuendo fino a ridursi quasi a zero e la sua direzione diventava pressochè normale al raggio vettore.

Il Catalogo, infine, delle 637 stelle, osservate a Padova dall'Antoniazzi al Circolo Meridiano di quella Specola, va considerato come un modello in questo ordine di ricerche astronomiche; il suo valore intrinseco, così dal punto di vista della precisione dei risultati come da quello della critica complessiva delle osservazioni, lo fa assurgere fra i cataloghi più degni di fiducia, e ben può paragonarsi (ed anzi sotto certi aspetti li supera) ai migliori fra i cataloghi moderni stellari.

Dopo la sua nomina a professore di astronomia presso la R. Università di Padova, l'Antoniazzi, seguendo anche in ciò l'esempio del suo illustre Maestro, attenuò di molto la sua produzione scientifica osservativa e di calcolo, per tutto dedicarsi alla elaborazione del corso universitario che in brevi anni portò alla più bella e severa perfezione.

Io non insisterò nel mettere in rilievo la scrupolosa diligenza che Egli poneva nel compimento dei suoi doveri didattici; ricorderò soltanto che il caro Amico, proprio in obbedienza al suo sentimento del dovere, sino a pochi giorni prima della morte certo cimentò troppo le sue non ancora consolidate energie; sottoponendosi, nel silenzio della notte, a gravi e penose veglie per compiere quella preparazione delle lezioni universitarie che, per causa del male

che l'aveva un anno prima colpito, in più dello sforzo normale, domandava a lui l'improbo esercizio diretto a vincere la difficoltà ancora rimastagli di leggere spedito e sicuro. Non esitò egli a sottrarsi così non poche ore di quel riposo che sarebbe stato indispensabile per la rivalutazione delle sue forze vitali.

Le pubblicazioni del Nostro, dal 1913 in poi, sono tutte rivolte alla considerazione di speciali problemi che avevano attinenza cogli argomenti dei suoi corsi universitari.

Così nel campo della classica astronomia sferica riesamina taluni dei problemi che hanno attinenza col cerchio minore passante per tre punti dati sulla sfera e dà di essi problemi una nuova soluzione semplice diretta e completa.

Così ancora, nella preparazione del suo corso sulla Precessione e Nutazione, è condotto ad esaminare il problema generale del movimento di rotazione diurna della terra ed a convincersi della possibilità di fare una trattazione più diretta che prima non si facesse della questione relativa al nesso esistente fra i movimenti precessionali nutazionali e quelli che danno origine alle variazioni periodiche delle latitudini terrestri. Trattazione che egli sviluppa in tre Note pubblicate nei Rendiconti dei Lincei.

Invogliato poi a tentare una applicazione del calcolo vettoriale alle questioni fondamentali della astronomia, nè dà saggi cospicui relativi a problemi di astronomia sferica, alla parallasse, alla aberrazione della luce, alla precessione, alla nutazione ed alla deduzione delle formule per il calcolo delle perturbazioni speciali sugli elementi di una orbita ellittica.

E poichè, per confidenze da Lui stesso avute, credo non impossibile che Egli stesse concretando una redazione definitiva, sotto forma di trattato, delle sue lezioni, io penso che tutti si uniranno a me nell'esprimere il voto che il valoroso suo successore alla cattedra di Padova possa darci presto la edizione di quello che sarà senza dubbio un prezioso trattato moderno di astronomia teorica.

Accenno rapidamente al contributo che il Nostro diede alla geodesia italiana, come incaricato dapprima dell'insegnamento, poi come membro autorevolissimo della R. Commissione geodetica italiana ed infine come operatore in lavori diversi di carattere astronomico geodetico.

E pongo termine a questa commemorazione, necessariamente breve e ristretta, dell'opera scientifica del nostro caro Amico e Collega, ricordando che Egli era membro corrispondente di questa R. Accademia dei Lincei; membro effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della R. Accademia di Padova.

Ma, prima di chiudere il mio discorso, permettetemi di rievocare ancora una volta quelle preziosissime doti del suo animo che ce lo resero Collega caro e amato tanto quanto le sue belle doti di mente.

Il fratello suo, Monsignore Emilio, così chiude la bella lettera con la quale ebbe la cortesia di fornirmi qualche dato sulla fanciullezza del povero Antoniazzi:

«Ella sarà in grado più di me di sapere della sua carriera scientifica. Sarà certo opportuno far rilevare la sua profonda bontà di animo non solo verso la famiglia nelle purtroppo numerose disgrazie, l'affetto tenero specialmente verso le due sorelle ora morte, nella loro lunga malattia procurando di alleviare i dolori delle ammalate, ma ancora verso gli estranei, che sapeva soccorrere con delicatezza e con generosità ».

Parole sacrosantamente vere; e che con delicata misura (quale doveva imporsi un fratello) delineano la bontà d'animo e di cuore del povero Amico. Noi non conosciamo che in parte tutto il bene silenziosamente fatto da Lui a parenti, ad amici o a parenti di amici. Sappiamo però che fu molto e che sempre fu fatto nella convinzione di adempiere un proprio dovere. Fu sempre un sublime esempio di bontà.

Commemorazione del Socio straniero Felice Klein

comunicata ⁽¹⁾ dal Socio LUIGI BIANCHI.

Il 22 giugno dell'anno scorso si chiudeva in Göttingen la lunga e gloriosa carriera di FELICE KLEIN, nostro Socio straniero dal dicembre 1883. Con Lui un astro di prima grandezza scompariva dal cielo matematico.

Alla genialità della ricerca congiunse il Klein le altissime qualità di impareggiabile insegnante ed uno straordinario talento organizzatore, che si esercitò con mirabile successo non solo nei campi della scienza pura, ma ben anche in quelli delle sue applicazioni.

In giovanissima età, grazie alla potenza ed alla rapidità di concezione del suo intelletto matematico, coadiuvate dallo studio indefesso, Egli si era procurato una vastissima e profonda cultura in tutti i rami delle matematiche, e da questa sicura base poteva muovere alle conquiste a cui si sentiva chiamato. Fu sopra tutto la geniale intuizione geometrica, di cui natura l'aveva dotato, che gli permise di scoprire legami inaspettati fra le più disparate ricerche che, mentre aprivano nuovi orizzonti, segnavano già di per sé luminosi progressi.

Tentiamo di tracciare, in rapida sintesi, i momenti principali della carriera di F. Klein, così ricca di conquiste importanti e suscitatrice di nuove energie in tutto il mondo matematico. Nacque Felice Klein il 25 aprile 1849 a Düsseldorf, sul Reno, in modeste condizioni di famiglia. Dicesi che dal padre Egli ereditasse il grande talento di organizzatore e l'instancabile amore al lavoro, dalla madre l'interesse alle speculazioni scientifiche e le doti di insegnante. Compiuti brillantemente gli studi secondari, particolarmente filologici e storici, nel ginnasio di Düsseldorf, muoveva F. Klein nel 1865, all'età di 16 anni e 1/2, all'Università di Bonn per dedicarsi allo studio delle scienze naturali e matematiche. Nel 1866 diventa ivi assistente del fisico e geometra PLÜCKER, coll'incarico di preparare le lezioni di fisica sperimentale; e frattanto da Plücker medesimo viene istruito nella geometria dello spazio rigato, compiendovi progressi tanto rapidi da potere coadiuvare il maestro nella preparazione dell'opera: *Neue Geometrie des Raumes*, di cui i primi fogli erano già pronti nel 1868 quando Plücker morì.

Alla fine del medesimo anno il Klein presenta, per la sua promozione all'Università di Bonn, una tesi *sui complessi di secondo grado* dove, servendosi della trasformazione lineare generale delle coordinate di retta, introduce le nuove sei coordinate ora dette di Klein, e i sei complessi fondamentali

(1) Pervenuta all'Accademia il giorno 6 ottobre 1926.

relativi, studiandone le mutue relazioni. Giovandosi poi della Memoria allora uscita di Weierstrass sulle forme quadratiche, Egli riduce l'equazione del complesso generale di secondo grado a forme canoniche, ordinandole secondo i divisori elementari del determinante caratteristico. Così riconobbe che il complesso di secondo grado studiato prima dal Battaglini e da questi ritenuto, in seguito ad un erroneo computo di costanti, come il più generale, era invece in doppio senso specializzato. Di poi, con un'acuta analisi delle relazioni fra i complessi fondamentali, il Klein trova che la superficie delle singolarità del complesso di secondo grado, introdotta da Plücker, viene a coincidere colla superficie del quarto ordine e quarta classe, dotata di sedici punti doppi e sedici piani doppi, che si era presentata prima nei lavori di Kummer del 1864 (superficie di Kummer).

A questo splendido inizio di studi geometrici fece seguito una serie di lavori che, per l'originalità e per i nuovi importanti risultati conseguiti, collocarono ben presto il giovane autore fra i geometri di alto valore.

Nel 1869, con lo scopo principale di redigere gli scritti postumi di Plücker sulla geometria della retta, il Klein abbandona Bonn e si reca a Göttingen, chiamato dalla fama e dalla fiducia di ALFREDO CLEBSCH, le cui mirabili lezioni di geometria, in relazione cogli integrali Abeliani, e le geniali ricerche sulle forme algebriche avevano raccolto intorno al grande maestro un eletto circolo di studiosi. In questo primo periodo, trascorso a Göttingen, il Klein assimilò rapidamente, presso Clebsch, le nuove teorie specialmente le algebriche e strinse relazione con MAX NÖTHER il quale, come allievo del Clebsch a Giessen, aveva già iniziato le sue celebri ricerche, e con lui rimase poi sempre in viva corrispondenza scientifica.

Ma il desiderio di ampliare sempre più il cerchio delle sue cognizioni matematiche e di porsi in contatto coi matematici delle diverse scuole, prima di aprirsi una via propria, lo condusse già nell'inverno 1869-70 a Berlino, attrattovi particolarmente dalla fama di WEIERSTRASS, KUMMER e KRONECKER. Quivi si incontrò la prima volta con SOPHUS LIE, col quale si unì in istretta amicizia e comunanza di studi, così feconda per l'avvenire di ambedue i grandi matematici.

Di immediato effetto per l'inizio di una serie di splendidi lavori del Klein fu l'incontro con O. STOLZ, dal quale occasionalmente udì parlare la prima volta della geometria non-euclidea. Con geniale intuizione Egli riconobbe subito che questa nuova geometria doveva identificarsi colla metrica proiettiva già da alcuni anni introdotta dal CAYLEY. Ma quando, in una conferenza al Seminario di Weierstrass, espose queste sue idee, in luogo dell'approvazione del sommo matematico, vi incontrò un'aspra critica. Per la prima volta il metodo intuitivo del Klein veniva a trovarsi in contrasto con quello rigorosamente logico-critico della Scuola di Berlino!

Intratteniamoci alquanto, se pure brevemente, sulla serie di fondamentali ricerche del Klein sulla geometria non-euclidea, che egli cominciò a

pubblicare dal 1871 in poi, dopo aver preso frattanto conoscenza dell'antecedente *Saggio di geometria non-euclidea*, pubblicato nel 1868 dal nostro Beltrami. Esse dimostrarono all'evidenza come fossero giuste le vedute del Klein nel riconoscere nella metrica del Cayley l'immagine più completa della geometria non-euclidea (in senso lato). Oggidì, grazie specialmente agli studi del Klein, la geometria non-euclidea è entrata a far parte del patrimonio matematico comune, e quasi può produrre meraviglia che il Cayley non abbia avvertito il legame della sua metrica colla nuova geometria. Ma per il Cayley si trattava soltanto di generalizzare analiticamente l'ordinaria geometria metrica costruendo una geometria *metrico-proiettiva*, nella quale le proprietà metriche venivano ad apparire quali proprietà proiettive subordinate ad una varietà quadratica fondamentale, l'assoluto del Cayley.

Il Klein, ponendosi fin dal principio dal punto di vista puramente matematico, senza entrare in disquisizioni filosofiche sui fondamenti, domanda soltanto, come il Beltrami, se il postulato di Euclide sulle parallele è una conseguenza, o meno, degli altri assiomi e postulati. Ma affinchè la trattazione analitica, fondata sull'uso delle coordinate per fissare i punti dello spazio, non sia infirmata fin da principio da un circolo vizioso, una questione preliminare è da risolvere. Può stabilirsi la nozione di coordinate senza far uso del postulato d'Euclide? Klein comincia dall'osservare che la geometria proiettiva può fondarsi indipendentemente da qualunque nozione metrica e dalla teoria delle parallele. In secondo luogo la nozione di birapporto (rapporto anarmonico) di quattro elementi in una forma geometrica di prima specie può introdursi, al modo sintetico di Staudt, come un puro numero (Wurf), senza far uso di misura di segmenti. Dopo ciò possono definirsi le coordinate omogenee nel piano e nello spazio, e si può costruire una geometria analitica proiettiva libera da qualunque nozione metrica.

Ciò premesso, e volendo stabilire le leggi della misura, cominciando dalle più semplici forme geometriche: la punteggiata ed il fascio di rette, il Klein, invece di assegnarle *a priori* al modo del Cayley, le fa scaturire dalla nozione stessa di misura e dalle proprietà fondamentali a cui deve soddisfare. Perviene così alla formola fondamentale per la misura della distanza di due punti, o dell'angolo fra due raggi, come data, salvo un fattor costante, dal logaritmo del birapporto che i due estremi del segmento, o i due lati dell'angolo, formano sulla punteggiata o nel fascio, coi due elementi fissi (reali od immaginari) immobili in ogni movimento della forma in sè, che rappresentano gli elementi all'infinito o l'assoluto della metrica.

Indi, per la geometria piana, si introduce come *base* della metrica (assoluto) una conica immaginaria o reale, i cui punti sono i punti all'infinito della metrica. Similmente per la geometria dello spazio è da introdursi come assoluto una quadrica, nuovamente immaginaria o reale, in quest'ultimo caso però con generatrici immaginarie (a punti ellittici). Quando la conica fondamentale (o la quadrica) è *propria* si hanno due specie di geometria: la

geometria *ellittica* se l'assoluto è immaginario, la geometria *iperbolica* quando l'assoluto è reale. Negando il postulato d'Euclide, l'una e l'altra geometria sono egualmente possibili e il nome di geometria non-euclidea (in senso lato) deve appartenere a tutte due. Se da principio questo nome venne applicato alla sola geometria iperbolica, ciò dipese dal fatto che si ammetteva tacitamente il principio della *infinità* della retta, ciò che non è affatto conseguenza degli altri principi e postulati (Riemann).

La metrica del Cayley a due dimensioni non è poi altro che la metrica delle molteplicità a due dimensioni e a curvatura costante, positiva nel caso ellittico, negativa nel caso iperbolico. Similmente la metrica Cayleyana a tre, o ad un numero qualunque di dimensioni, corrisponde esattamente, secondo i concetti introdotti da Riemann nella sua celebre tesi, alla metrica degli spazi a curvatura costante, positiva o negativa.

Quanto alla ordinaria geometria *euclidea*, essa si presenta ancora come una metrica del Cayley, però solo come caso limite, nel quale la conica fondamentale degenera, come involuppo in una coppia di punti immaginarii coniugati (i punti ciclici), ovvero, nello spazio S_3 , la quadrica assoluta degenera, come involuppo, in una conica immaginaria (cerchio all'infinito). Questa terza geometria limite venne chiamata geometria *parabolica* dal Klein, il quale mostrò altresì come le formole relative per la misura dei segmenti e degli angoli si deducono, con conveniente passaggio al limite, da quelle della geometria Cayleyana generale.

Per chiudere questa rapida rassegna dei lavori del Klein sulla geometria non-euclidea, che tanta influenza ebbero sull'ulteriore sviluppo delle sue idee geometriche ed analitiche, accenniamo in fine alle sue importanti ricerche sulla geometria ellittica a tre dimensioni. Egli studiò a fondo la composizione del gruppo dei movimenti in questo spazio mediante i movimenti elementari da lui detti *Schiebungen* (scorrimenti) assimilabili alle traslazioni dell'ordinario spazio euclideo, e diede un adeguato sviluppo alle idee appena enunciate da Clifford stabilendo la nozione di *parallele* in questo spazio.

Ma ritorniamo alla descrizione degli studi preparatori del Klein, dal soggiorno di Berlino, che egli abbandonò nella primavera del 1870 per recarsi a Parigi a proseguirvi col suo amico S. Lie le ricerche comuni, i cui primi risultati furono consegnati dagli autori nelle Memorie sui sistemi di curve e superficie W che si trasformano in sè per una serie ∞^1 di trasformazioni lineari costituenti un ciclo chiuso (un gruppo ad un parametro). Queste notevoli ricerche furono come il preludio, per Lie, della sua grande teoria dei gruppi continui di trasformazioni, laddove il Klein si occupò dello sviluppo di queste idee nel campo dei gruppi discontinui. Preziosa fu a questo riguardo la conoscenza che i due giovani matematici fecero a Parigi di DARBOUX e JORDAN. Particolarmente lo studio del grande trattato di Jordan sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni, allora pubblicato, che rendeva accessibili le geniali idee di Galois, attrasse tutto l'interesse di Klein

e Lie ed ebbe la più decisiva e fortunata influenza per l'indirizzo ulteriore delle loro ricerche.

Ma il soggiorno a Parigi venne interrotto, dopo 2 mesi e $\frac{1}{2}$ dallo scoppio della guerra Franco-Prussiana, ed il Klein, riconosciuto inadatto al servizio militare attivo, volle iscriversi pel servizio sanitario nell'esercito, che dovè abbandonare, ammalatosi di tifo. Dopo la guarigione si reca, al principio del 1871, a Göttingen per abilitarvisi, dispensato dal presentare una tesi speciale in base al riconoscimento degli importanti lavori pubblicati che ricevono, particolarmente da Clebsch, i più caldi elogi; e nell'autunno del 1872, all'età di 23 anni, ottiene una cattedra di professore ordinario nell'Università di Erlangen. Ivi dettò, come discorso inaugurale, quel celebre scritto, noto poi sotto il nome di *programma di Erlangen* dal titolo: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, alle cui vedute geniali e profonde si ispirarono, per più di un cinquantennio, le ricerche del Klein medesimo e della sua scuola. Ed ancora oggidì nessuna teoria geometrica può riguardarsi come completa se non trova chiaramente il suo posto nel programma di Erlangen.

L'importanza di questo programma sta essenzialmente nel principio generale che lo informa, principio che permise di ordinare e classificare, nel modo più naturale, le disparate ricerche geometriche accumulate dalla fine del 18° secolo fino al 1870, senza apparenti legami fra loro, con pericolo di scindere la geometria in tanti rami separati. Klein rinvenne tale principio ordinatore appunto nella nozione generale di *gruppo*, della cui importanza fondamentale per le matematiche i suoi studi precedenti, in comune con Lie, l'avevano ben penetrato.

Ad ogni speciale geometria è coordinato, secondo Klein, un gruppo continuo di trasformazioni dello spazio, e sono le proprietà delle figure *invarianti* rispetto alle trasformazioni del gruppo che costituiscono quella geometria. Così per la geometria elementare, come per la geometria differenziale classica, il gruppo coordinato è quello dei movimenti dello spazio; per la geometria proiettiva è il gruppo totale delle collineazioni, per la geometria non-euclidea un sottogruppo di quest'ultimo, e cioè il gruppo delle collineazioni che trasformano in sè una varietà quadratica fondamentale.

È anche importante osservare col Klein che le trasformazioni del gruppo possono applicarsi non solo ai punti dello spazio ma ad enti algebrici qualunque che possano fissarsi con un numero finito di coordinate, enti che, a loro volta, seguendo le idee di Plücker, si riguardino come elementi dello spazio.

Così uno stesso gruppo può corrispondere a diverse geometrie, nelle quali gli elementi soltanto sono diversi, e ne risulta un principio di *trasporto* di proprietà geometriche utilissimo in varie ricerche. Un esempio è dato dalla celebre *trasformazione di contatto*, scoperta da S. LIE, che fa passare dalla geometria dello spazio rigato a quella dello spazio di sfere, riguardate come elementi.

In seguito Klein rilevò che le idee del programma di Erlangen si applicano pure alla meccanica, ed in epoca recente poté ancora mostrarne l'efficacia nello spiegare i fondamenti matematici della teoria della relatività.

Dopo esserci così diffusi nella descrizione di questi lavori del Klein, che gettarono i fondamenti delle sue splendide ricerche successive, ci volgiamo a passare in rassegna, per necessità, molto più rapidamente, i nuovi rigogliosi frutti che Egli ne fece scaturire nella piena maturità del suo ingegno inventivo. Tre anni durò la permanenza del Klein nella Università di Erlangen, dalla quale passò, nel 1875, all'Istituto tecnico Superiore di Monaco di Baviera, in molto più ampia ed adeguata sede, che gli permise di fondare una scuola fiorente pel numero e pel valore di allievi attratti a quel centro dalla fama sempre crescente del giovane maestro. Nei tre anni di Erlangen, e nei cinque successivi di insegnamento a Monaco, le ricerche del Klein prendono un prodigioso sviluppo. Mentre il suo amico Lie fonda la grande teoria dei gruppi continui di trasformazioni, Egli volge i suoi studi ai gruppi discontinui. Sono dapprima i gruppi finiti di sostituzioni lineari sopra una variabile di cui scopre l'adeguata rappresentazione geometrica nei gruppi di rotazioni dei poliedri regolari. Ne sorge una serie di ricerche algebriche intorno alla risoluzione della equazione di 5° grado che illustrano e completano le ricerche anteriori di Hermite, Brioschi e Kronecker, ponendo al centro della teoria *l'equazione dell'icosaedro*, come risolvete di Galois dell'equazione di 5° grado. In questi studi, raccolti poi nel 1884 dal Klein medesimo nel suo libro: *Ueber das Ikosaeder* prendono egualmente parte, e nel modo più suggestivo, diversi rami delle matematiche: l'algebra colla teoria degli invarianti, la teoria dei gruppi e la teoria dei numeri, la geometria e in fine, come teoria dominante, quella delle funzioni secondo Riemann.

Dai gruppi finiti le sue ricerche si volgono ai gruppi infiniti, ma discontinui, collo studio sistematico delle funzioni ellittiche modulari. Nel 1879 appaiono le ammirabili Memorie del Klein sulle trasformazioni del 7° e dell'11° grado delle funzioni ellittiche, che già lo dimostrano in possesso di tutti i mezzi tratti dalla fusione dei varî rami delle matematiche. L'aritmetica del gruppo modulare e dei suoi sottogruppi coi loro campi fondamentali, in relazione colla geometria non-euclidea e colla teoria geometrica degli invarianti nel campo ternario, ma soprattutto la nuova geniale trattazione delle superficie Riemanniane, elevate a strumento geometrico-analitico di ricerca, concorrono, mirabilmente fuse, al successo di questi e degli studi ulteriori.

Nella residenza di Monaco, in quella successiva all'Università di Lipsia (1880-86) e nella definitiva di Göttingen, dal 1886 in poi, proseguono le ricerche originali e le lezioni del Klein senza interruzione. Oltre le funzioni modulari ellittiche, esse trattano delle funzioni iperellittiche e delle Abelianne generali, delle funzioni ipergeometriche, delle equazioni differenziali lineari

e delle funzioni di Lamé, e raggiungono in fine la più alta meta colla costruzione della teoria generale delle funzioni *automorfe*.

Sono queste, secondo la denominazione di Klein, le funzioni uniformi di una variabile complessa dotate delle proprietà (come le funzioni ellittiche e le modulari) di riprendere il medesimo valore quando sull'argomento si eseguisce una qualunque sostituzione lineare di un gruppo infinito (necessariamente discontinuo).

Verso il 1880 il Klein era già in possesso dei principî fondamentali della nuova teoria, quando entrò in campo (1881-1882) un altro matematico di genio ENRICO POINCARÉ, formatosi alla Scuola di Hermite ed all'inizio allora della sua luminosa carriera che, movendo dalle ricerche di Fuchs sulle equazioni differenziali lineari, prese a trattare il medesimo soggetto. Come Klein, anche Poincaré parte dalla nozione di poligono fondamentale per un assegnato gruppo di sostituzioni lineari e fa largo uso dei principî di geometria non-euclidea, come prezioso ausilio nella ricerca. Ma, mentre il Klein desume l'esistenza delle corrispondenti funzioni automorfe dai principî generali della teoria delle funzioni, seguendo le idee di Riemann, il Poincaré procede da principio per via aritmetica, e per una classe estesa di funzioni automorfe trova l'effettiva espressione analitica per quozienti di serie, da lui dette Θ -Fuchsiane e Θ -Kleiniane, alla cui costruzione era pervenuto, con mirabile ispirazione, dalla teoria delle funzioni ellittiche (serie *thêta*, serie di Eisenstein).

Dalle prime pubblicazioni di Poincaré si inizia col Klein un'attiva corrispondenza, ed il primo viene così a conoscenza della letteratura anteriore sull'argomento, e rapidamente assimila le idee fondamentali sviluppate dal Klein sulle traccie di Riemann. La grande teoria delle funzioni automorfe, una delle più belle conquiste dell'analisi moderna, viene stabilita dagli sforzi riuniti dei due grandi matematici ⁽¹⁾. A base della teoria stanno i teoremi d'esistenza scoperti dal Klein e da lui detti *teoremi fondamentali*, ed ora piuttosto noti sotto il nome di teoremi di *uniformizzazione*. Di questi teoremi stabiliti da Klein intuitivamente solo una parte ricevè una effettiva dimostrazione da Klein stesso e da Poincaré mediante considerazioni di *continuità* non del tutto esenti da critica, chè i metodi rigorosi di dimostrazione non erano ancora in quel periodo sufficientemente sviluppati. E solo molto dopo, per opera principalmente del Koebe, a partire dal 1907, i teoremi fondamentali del Klein vennero tutti gradatamente dimostrati, conrermando la piena sicurezza dell'intuito matematico dell'autore.

L'opera matematica del Klein, di cui nelle pagine precedenti abbiamo tentato di descrivere le maggiori conquiste, trovasi ora raccolta nei tre

(1) La lettura della corrispondenza fra Klein e Poincaré, pubblicata da MITTAG-LEFFLER nel volume 39° degli « Acta mathematica », forma una delle pagine più istruttive della storia delle matematiche moderne, e ricorda il glorioso periodo, all'inizio del secolo scorso, quando per opera di Abel e di Jacobi venne costruita la teoria delle funzioni ellittiche.

volumi che, per iniziativa dei suoi amici ed ammiratori, presentano in edizione completa (Springer, 1918-1923) tutte le sue Memorie. Il Klein stesso ne ha curato la pubblicazione accompagnando ciascuna Memoria di commenti e note che illustrano il momento storico della ricerca e danno insieme come una storia delle matematiche nell'ultimo cinquantennio.

Pari all'ammirazione che fdesta l'opera del Klein come matematico inventore è quella che sorge al ricordo dei meriti eccezionali dell'insegnante e dell'organizzatore. La sua, carriera accademica fu un succedersi di continui trionfi, poichè la fama del suo insegnamento adunò intorno alla cattedra del Klein, a Monaco, a Lipsia e da ultimo a Gottinga, un numero sempre maggiore di uditori che accorrevano da tutta la Germania e dall'estero ad ascoltare le lezioni del grande maestro.

Nei suoi corsi che si aggiravano, particolarmente i superiori, intorno ai più svariati argomenti di matematica, di meccanica e di fisica matematica, Egli curava sopra tutto l'esposizione delle idee e del loro concatenamento, volendo che si offrisse ai giovani l'orizzonte possibilmente più vasto. Per ciò sorvolava molte volte sui dettagli delle dimostrazioni che gli allievi potevano trovare in trattati e Memorie da lui indicati. Dei singoli corsi tenuti faceva eseguire esposizioni manoscritte che, in parte riprodotte per litografie, li rendevano accessibili a più ampi circoli.

Ma l'opera più importante del Klein nell'insegnamento fu quella svolta nei seminarii e nei colloqui speciali. Gli argomenti che suggeriva agli allievi per ricerche personali erano quasi sempre tolti dai lavori in atto del maestro, ed assegnati a ciascuno con giudizio sicuro sulla capacità del giovane e secondo un piano generale di perfezionamento di vari punti delle teorie. Nei colloqui personali con questi allievi Egli spendeva signorilmente i tesori del suo talento e della sua immensa erudizione, preoccupato soltanto del progresso della scienza; ed a ricerca compiuta insegnava loro il miglior modo di disporre i risultati per la pubblicazione, sì da accostarsi a quella perfezione di forma che era come una necessità del suo talento d'artista. Tanta e così imponente mole di lavoro, insieme all'incessante succedersi delle sue ricerche originali, non lasciarono al Klein il tempo di redigere da solo i trattati sulle funzioni ellittiche modulari, e sulle generali funzioni automorfe, di cui già nel 1884, nella prefazione al volume sull'icosaedro, era accennato il progetto. Fortunamente per la scienza, un valoroso allievo del Klein, il prof. R. FRICKE, di cui sono ben noti gli importanti contributi arrecati a queste teorie, poté assumerne il compito e lo condusse felicemente a termine. Così furono pubblicati i due volumi delle: *Elliptische Modulfunktionen* (1890-92), e gli altri due sulla: *Theorie der automorphen Funktionen* (1897-1912). Analoga origine ebbero, nei campi della fisica matematica e della meccanica, il libro del PÖCKELS: *Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$* (1890), quello del BÔCHER: *Ueber die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie* (1894), in fine quello che porta

i nomi riuniti di KLEIN e SOMMERFELD: *Ueber die Theorie des Kreisels* (1897-1920).

Buona parte della sua meravigliosa attività dedicò ancora il Klein ai « *Mathematische Annalen* », nella cui Direzione egli entrò fin dal 1873, dopo la morte del fondatore A. Clebsch. Col programma, fedelmente mantenuto, che il periodico, escludendo indirizzi unilaterali, dovesse tenere aperte le sue pagine a tutte le produzioni matematiche, di Germania e di fuori, che apparissero nuove ed importanti, i « *Mathematische Annalen* » mantennero e consolidarono il posto cospicuo che viene loro riconosciuto fra le Riviste delle scienze matematiche.

Ad un'altra impresa di alta importanza per la scienza si accinse il Klein nel 1894 quando, insieme con W. DYCK, ideò l'*Enciclopedia matematica*, che si proponeva l'esposizione di tutte le matematiche e delle loro applicazioni dal principio del 19° secolo. All'impresa dedicò il Klein tutto il suo interesse scientifico ed il grande talento organizzatore, giovandosi delle sue ampie conoscenze personali in tutto il mondo matematico. Oltre che ai lavori preparatorii prese parte alla redazione dei singoli volumi, particolarmente alla formazione ed al completamento del quarto volume dedicato alla meccanica.

Le presenti notizie hanno voluto raffigurare fin qui il Klein come matematico inventore e come maestro. Ma il quadro della sua prodigiosa attività riuscirebbe troppo incompleto se non toccassimo, almeno da ultimo, dell'opera che Egli spese, particolarmente negli ultimi decenni della sua vita, per il riavvicinamento della matematica pura alle scienze di applicazione e per l'organizzazione degli studi. Già fin dagli anni del suo insegnamento a Monaco Egli aveva cominciato ad interessarsi, insieme ad A. BRILL, dell'organizzazione degli studi in quella Scuola superiore e di stabilire maggiori legami della matematica colle scienze applicate, ponendosi, a tal fine, in istretta relazione con eminenti personalità della Tecnica. Fu però soltanto dopo il 1892, a Göttingen, che cominciò per Klein il nuovo intenso periodo di attività, dominato dal pensiero costante che anche nella Scuola la matematica dovesse uscire dall'isolamento e prendere più vivo contatto cogli altri interessi culturali. Per l'insegnamento superiore Egli mirava ad istituire nelle Facoltà fisico-matematiche presso le Università corsi speciali di matematica e di scienze applicate. Duplice doveva essere lo scopo di questi corsi: impartire una cultura matematica superiore ad ingegneri in vista del perfezionamento della Tecnica e formare eventualmente insegnanti per le cattedre di Ingegneria; in secondo luogo offrire agli alunni Universitarii la possibilità di orientarsi nelle questioni della Tecnica.

Forti ed aspre furono le resistenze che, per lo sviluppo del suo programma, il Klein incontrò da ambedue le parti: dalle Università e dalle Scuole degli Ingegneri.

Ma la grande autorità del nome del Klein, l'attivissima sua propaganda

e la persuasiva eloquenza, colla quale seppe sostenere i suoi progetti lungamente meditati, pervennero alla fine, dopo molti sforzi, a vincere in gran parte le resistenze. L'Università di Göttingen vide sorgere la nuova Scuola coi nuovi Istituti per la matematica e per le scienze applicate, quali erano stati ideati principalmente dal Klein, e dotati di tutti i mezzi necessari al loro funzionamento. Il Klein si occupò allora intensamente di porre questi Istituti ed i nuovi colleghi in intima relazione colla vita scientifica Universitaria, e in unione a questi colleghi tenne ancora numerosi Seminarii sopra temi che dovevano sembrare estranei all'indirizzo matematico, ma nei quali Egli si orientò colla rapidità delle sue vedute superiori, spiegandovi ancora quella ricchezza di idee e quella vivacità di interesse che sempre accompagnarono il suo insegnamento.

Ricordiamo in fine un'ultima ed alta benemerenza del Klein verso la Scuola. Eletto nel Congresso matematico di Roma del 1908 a Presidente della Commissione internazionale dell'insegnamento matematico, Egli diresse l'inchiesta sulle condizioni fatte a questo insegnamento nelle diverse nazioni; in particolare dalla Sottocommissione tedesca ricevette l'incarico di preparare e stendere la relazione sull'insegnamento matematico in Germania. I risultati dell'immane lavoro, compiuto con grande energia e colla più alta competenza, trovansi ora riuniti in otto volumi con appendice (Teubner, 1909-1916) e formano un insigne documento di coltura che descrive lo stato dell'insegnamento matematico in Germania prima della guerra. Il posto ivi assegnato alla matematica corrisponde al pensiero già espresso dal Klein in una conferenza del 1896, e cioè che: *la matematica ha accompagnato lo sviluppo della cultura umana in tutti i suoi gradi, e perciò la sua diffusione è atta a produrre il convincimento della solidarietà di tutti gli alti interessi spirituali.*

L'opera compiuta da FELICE KLEIN nella sua vita piena di pensiero e di volontà è una delle più alte che si possano ammirare. Lo straordinario suo talento matematico, coltivato collo studio indefesso, gli permise di arricchire la scienza di nuove e splendide conquiste.

Fu il Klein di alta e maestosa figura che già al primo accostarlo ispirava la riverenza, e dal suo vivace e piacevole conversare emanava come la luce della sua vita interiore. Coll'esempio della sua nobile vita, piena di continuo e fecondo lavoro, cogli scritti e colla animata parola, che ne diffusero le geniali idee, esercitò un fascino che, suscitando nuove energie, ne assicurò l'ulteriore sviluppo pel progresso della scienza.

Commemorazione del Socio straniero Giorgio Schweinfurth

letta dal Socio O. MARINELLI nella seduta del 3 giugno 1926 ⁽¹⁾.

Nel settembre scorso, quando si sparse nel mondo civile la notizia della morte di Giorgio Schweinfurth, avvenuta il 19 di tale mese, a Berlino, parve a molti che si spegnesse l'ultimo rappresentante di una generazione ormai da un pezzo scomparsa. Era quasi novantenne e rappresentava effettivamente una sopravvivenza del periodo eroico dell'esplorazione dell'Africa, di quel periodo, sotto tanti aspetti glorioso, non per una sola nazione, ma per tutte le nazioni civili, le quali, di fronte agli interessi della scienza e dell'umanità, avevano momentaneamente saputo coordinare i loro sforzi per sollevare il grande velo che copriva il centro del continente africano, quando ancora terre ben più lontane avevano già rivelati tutti i loro segreti. Le gare per la conquista coloniale vennero dopo o, almeno, dopo si accentuarono, onde si assistè allora per la prima volta, nella storia delle scoperte geografiche, ad un movimento di esplorazione della superficie terrestre promosso da intenti prevalentemente scientifici, e al quale parteciparono studiosi di tutte le nazioni, dandosi, per così dire, scambievolmente la mano. Lo Schweinfurth personificò meglio di qualunque altro questi concetti, e non a torto egli era considerato alla pari di un concittadino, non solo nella sua terra natale, la Lettonia, e nella sua residenza prediletta, l'Egitto e nella sua patria d'adozione, la Germania, ma anche in molti altri paesi, non escluso il nostro. Nel 1888, quando l'Accademia dei Lincei volle attestargli stima e ammirazione con la nomina di Socio straniero, essa veniva a sanzionare l'analoga nomina a Socio onorario fatta dalla Società Geografica Italiana e l'assegnazione della medaglia d'oro da questa concessagli fino dal 1874.

Lo Schweinfurth dovette la sua ampia notorietà al grande e fortunato viaggio nell'Africa equatoriale da lui compiuto fra il 1868 ed il 1871; e a questa memorabile impresa pare oggi di veder coordinata l'intera sua attività, quasi che, tutto quanto di studi e di ricerche egli ebbe a fare precedentemente non si dovesse considerare se non come una preparazione all'impresa stessa, e quanto egualmente di studi e di azione venne dopo, nel lungo corso di una vita operosa e faticosa, non fosse che uno sviluppo ed una ulteriore

(1) Il Socio Marinelli si spense immaturamente, fra il profondo compianto dei colleghi, pochi giorni dopo di aver letto questa commemorazione, senza poterne correggere le bozze di stampa; la revisione fu fatta a cura del Corrisp. prof. R. Almagià. (*Nota della Segreteria*).

elaborazione dei risultati da essa ottenuti. Noi amiamo gli uomini cui è rivolta la nostra simpatica attenzione tutti di un pezzo e tutti di un colore, e amiamo riguardare tutta la loro operosità come l'esplicazione di un unico piano preordinato.

Nel caso dello Schweinfurt sembra proprio che una simile concezione trovi una rispondenza nella realtà: sembra, cioè, che ben presto egli sentisse veramente la sua vocazione e intravedesse la via che doveva condurlo alla gloria, nella quale s'incamminò con passo sicuro e con costanza d'intendimenti, traendo vantaggio dalle sue stesse favorevoli attitudini fisiche e dai mezzi di cui disponeva per le condizioni di famiglia.

Nato a Riga, il 29 dicembre 1836, da padre commerciante, dopo aver fatto i primi studi nella città natale, iniziò la sua istruzione naturalistica a Heidelberg (1857-1860), per completarla poi a Berlino (1860-1862). Ci dicono i suoi biografi come ancor giovanetto, in lunghe e solitarie passeggiate nelle provincie baltiche, egli si allenasse al viaggiare e, mentre era studente universitario, compisse assai più lunghe escursioni in Germania, nelle alte Alpi ed in Sardegna (1858); e senza dubbio in queste peregrinazioni relativamente ampie avviò la sua preparazione per più vaste intraprese. Va anche ricordato come una delle sue più vecchie pubblicazioni (1861), il *Saggio sulla vegetazione dei dintorni di Straussberg*, fosse accompagnata da una carta geografica nella quale con segni e numeri erano indicati i luoghi precisi delle raccolte.

Decisivi per il suo avvenire sembra che fossero anche i contatti che egli ebbe col botanico Ascherson e col viaggiatore Barth. Si ricorda anche la circostanza che a lui venisse affidato lo studio delle collezioni botaniche raccolte nel Sudan dall'Hartman. Egli prese la laurea a Berlino alla fine del 1862 e un anno dopo iniziava i suoi viaggi in Africa; viaggi continuati negli anni seguenti e che ebbero per mèta le sponde montuose del Mar Rosso e quella regione fra codesto Mare ed il Nilo, che deve considerarsi il vero vestibolo dei paesi equatoriali, ai quali doveva essere poi diretta la maggiore intrapresa.

Non è qui il momento per intrattenersi sulle vicende di questo viaggio memorabile, che durante più di tre anni (1868-71) si svolse in buona parte attraverso regioni e popoli, dei quali, se pur non erano del tutto sconosciuti, si avevano solo notizie vaghe e incomplete e meritevoli di riscontro. Il viaggio dello Schweinfurt ebbe per mèta quel territorio che egli stesso felicemente definì il « cuore dell'Africa », perchè posto a quasi eguale distanza fra i due Oceani e percorso anche dallo spartiacque continentale. Egli era stato preceduto solo da due Italiani, l'Ori e il Piaggia, dei quali non mancò di segnalare la fedeltà delle indicazioni, e di riconoscere che l'opera propria in qualche caso era consistita soltanto nel verificarne le scoperte.

Nonostante questi precedenti, così onorifici per noi, conviene attribuire allo Schweinfurt il merito principale di aver rivelato alla scienza, da un lato il bacino del Fiume delle Gazzelle, uno dei principali affluenti del Nilo,

dall'altro l'alto corso dell'Uelle, uno dei principali affluenti del Congo. Vale appena la spesa di notare l'errore dello Schweinfurt di aver ritenuto l'Uelle stesso affluente dello Sciari e quindi tributario del Lago Ciad, anzichè, come è effettivamente, del Congo: l'ultimo, questo, fra i grandi fiumi del mondo ad apparire sulle carte geografiche a completo col suo corso incurvato assieme al numeroso corteo dei suoi seguaci. Pur così prudente nelle congetture geografiche, pur conscio della loro frequente fallacia, della quale egli stesso conosceva le molteplici cause, lo Schweinfurth non poteva neppur lui essere in questo campo sempre fortunato. Nel caso del Fiume delle Gazzelle e di quel ventaglio di fiumi che vi convergono, non si trattò poi solo di completare, in base ad informazioni di indigeni dal ristretto orizzonte geografico, poche osservazioni dirette, ma di una esplorazione relativamente particolareggiata, dalla quale risultò chiara l'intera idrografia della regione. Fiume del resto anche quello rimasto per un pezzo misterioso e di cui nessuno per secoli aveva sospettata l'importanza, perchè dove esso mescola le proprie acque con quelle del Nilo, si distende il « sedd », la maggiore forse fra le masse di vegetazione paludosa, in parte natante, in parte colle radici nel suolo, massa che fin dall'antichità aveva costituito una barriera quasi insormontabile alla esplorazione del Nilo. Se gli antichi ne conobbero infatti la regione delle sorgenti equatoriali, ciò era potuto avvenire soltanto grazie al commercio dell'avorio e ai cacciatori d'elefante che avevano le loro stazioni, organizzate dai Tolomei d'Egitto, sulle coste dell'Oceano Indiano a sud della Somalia. Del « sedd » lo Schweinfurth dava la prima descrizione scientifica, anche se al Junker e ad altri più moderni doveva spettare il compito di chiarirne meglio l'estensione (quasi 100.000 kmq.) e la variabilità.

Lo Schweinfurth rese conto dei suoi viaggi in un libro, cui non mancò la meritata fortuna e che si può veramente noverare fra i classici della letteratura concernente l'esplorazione dell'Africa. L'edizione originale tedesca, uscita nel 1874, fu tradotta in varie lingue, non esclusa l'italiana, ma spesso in forma ridotta e tale da non dare un'idea completa del libro. Ebbe anche nel 1878, una seconda edizione tedesca, curata dallo stesso autore, che, oltre a vari ritocchi particolari, restrinse la parte narrativa conservando invece quella descrittiva. Il libro risultò in parte migliorato, ma perdette forse quella freschezza che è uno dei principali pregi della edizione originaria. In ambedue esso appare opera notevole per l'importanza del contenuto ed anche per la maestria della esposizione. Pochi libri danno una idea più completa dei paesi attraversati e dei popoli con cui il viaggiatore fu a contatto, attraverso le varie vicende di un viaggio avventuroso. Pochi seppero, infatti, come lo Schweinfurth, associare così bene la narrazione che tiene sempre desto l'interesse del lettore e la descrizione che lo trasporta in paesi sconosciuti e gli fa vedere le cose da lui viste; viste anzi con occhio di naturalista. Oltre che la preparazione ad osservare ed a de-

scrivere, egli aveva anche l'arte del disegnare, e il suo libro è illustrato con schizzi originali.

La preparazione dello Schweinfurth ai viaggi era anzitutto nel campo naturalistico. La botanica è la scienza che meglio giova al tirocinio di uno che si dedichi a viaggi scientifici: abitua più di ogni altra ad osservare diligentemente, non solo i singoli oggetti, ma anche il paesaggio, che, particolarmente in Africa, trae le sue caratteristiche principali dalla vegetazione. Con senso di naturalista lo Schweinfurth considera del resto, non solo il mondo animale, ma anche i popoli e perfino i problemi di ordine sociale. I suoi quadri dei Niam Niam, dei Mombutù, degli Accà, non hanno avuto solo valore per le molte cose nuove e curiose che fecero conoscere agli Europei, nè lo conservano solo perchè riproducono condizioni ormai superpassate, ma hanno valore anche in sè stessi come saggi di trattazioni etnografiche.

La considerazione della schiavitù, quale si presentava nel Sudan più di cinquanta anni fa, difficilmente poteva essere fatta con maggiore arte ed anche con più elevato sentimento di umanità. Poichè un carattere dello Schweinfurth traspare dalle pagine dedicate a questo argomento, come da molte altre: quello spirito di benevolenza, di compatimento per le debolezze umane, di simpatia verso i popoli inferiori, che, insieme ad un ottimismo e ad una sicurezza nella propria salute e nella propria fortuna, furono elementi non trascurabili del suo successo. Egli aveva sotto gli occhi l'Africa, triste sede della schiavitù, quando la sognava già, invece che quale era, quale avrebbe dovuto essere, il meraviglioso territorio di una libera collaborazione ai fini collettivi dell'umanità. Non dubitò mai di una vittoria finale della bontà, non dubitò mai dell'avvenire della razza negra. Egli fu uomo di fede, oltre che di scienza, e a quella come a questa si deve la grandezza e la popolarità dell'opera sua.

Non è possibile leggere l'elogio che lo Schweinfurth nel 1882 pronunciava alla Società Chediviale di geografia del Cairo per la morte del Piaggia, senza la più viva soddisfazione per vedere riconosciuto quanto la scienza e l'umanità debbono al viaggiatore italiano, senza la più profonda commozione per il profondo senso di gratitudine e di rimpianto che trapela da ogni parola. Lo Schweinfurth dichiarava di averlo preso a modello, di essersi forzato ad imitare quell'uomo pieno di nobiltà, di gentilezza, di commiserazione verso gli infelici, che, solo, aveva potuto vivere sicuro per un anno intero fra le popolazioni più feroci dell'Africa, lasciando fra di esse unicamente sensi di rispetto e di devozione; il nome di quel vero pioniere della civiltà era rimasto in tanta considerazione presso di essi, da costituire una vera protezione per quelli che erano venuti dopo di lui. Lo Schweinfurth con questo attestato di riconoscenza verso un suo precursore, mostra non solo l'altezza dell'animo suo, ma anche svela veramente il segreto della sua propria fortuna. Apparteneva anch'egli a quei tipi di viaggiatori abituati a viag-

giare soli, senza compagni e spesso indifesi, protetti dalla stessa loro superiorità, dal senso di rispetto che destano l'altezza d'animo e di cuore anche presso genti selvagge.

Un'altra preparazione aveva lo Schweinfurth, acquisita nei precedenti studi e nei precedenti viaggi; l'esperienza gli aveva dato quella che egli chiamava « facoltà di generalizzare », per cui le impressioni che si provano e i fatti che si osservano non rimangono disgregati e collegati solo alla loro successione nel tempo o nello spazio, ma sono sentiti e veduti da un un punto di vista comprensivo, sintetico, onde i tratti caratteristici di un paese possono essere rilevati e rappresentati nel loro assieme e nelle giuste proporzioni.

In ordine a preparazione specifica per i viaggi nel bacino del Nilo, egli aveva poi la conoscenza dell'arabo volgare, mentre lo soccorreva la robustezza fisica e una specie di refrattarietà alla febbre malarica, che pure aveva mietuto tante vittime anche fra i viaggiatori europei. Al costo del suo viaggio aveva poi provveduto la Fondazione Humboldt, che aveva lo scopo di incoraggiare qualunque ricerca fatta sulle vie aperte dal sommo maestro, e soprattutto grandi viaggi.

È quasi superfluo aggiungere che se ciò che lo aveva mosso ad intraprendere già i primi viaggi in Africa fra il mare stesso e il Nilo, era stata la passione del « cacciatore di piante », sempre più in seguito egli ascoltò la voce della natura anche nelle altre più svariate e meravigliose espressioni, sempre più provò vivo l'amore per i paesi ove si possono scordare i miserabili convenzionalismi del mondo civile, si può godere la gioia di vivere liberamente in un ambiente nel quale tutto sembra spontaneo, tutto armonioso, dove la nostra mente è ansiosa di avere e di riflettere sempre nuove immagini. Il senso della natura, come quello dell'arte, può anche considerarsi un dono divino, ma per manifestarsi, per raffinarsi, ha bisogno della lunga e continua esperienza. Lo Schweinfurth la sua esperienza l'aveva già in parte fatta nei suoi primi viaggi e la consolidò nel maggiore.

Uno dei pochi casi veramente disgraziati, di cui lo Schweinfurth ebbe a soffrire, fu la perdita della maggior parte dei suoi appunti e delle sue raccolte di viaggio, avvenuta per l'incendio della zeriba ove era accampato nel dicembre 1870. Ciò non ostante il frutto scientifico di questo viaggio fu grandissimo, nei campi più svariati, da quello delle lingue delle genti visitate, a quello della flora. Il viaggio doveva poi far sempre meglio rivolgere la mente dello Schweinfurth ad una quantità di problemi geologici, antropologici, etnografici, linguistici e perfino storici e sociali, alla indagine ed alla risoluzione dei quali egli doveva poi dedicare in seguito tutta la sua più viva attenzione di studioso.

Lo Schweinfurth, non ostante le contrarie apparenze, aveva trovato nello stesso Egitto, ove aveva per necessità fatte tante soste per la preparazione dei suoi viaggi, una terra sotto molti rispetti, non escluso il geo-

grafico, quasi incognita, con aree inesplorate a poca distanza dal Cairo. Ben poco infatti si era fatto per la sua conoscenza scientifica dopo l'impresa napoleonica, così meravigliosa anche per le sue conseguenze culturali. Al Cairo egli (1875) fondò la Società Geografica Egiziana e da quella metropoli eseguì una serie di escursioni nelle Oasi libiche (1874) e nel Deserto arabico (1876, 1877, 1878, 1880, 1881, 1884, 1885, 1887), non trascurando viaggi più lunghi nel Libano (1880), sulle coste meridionali dell'Arabia (1881), a Tobruk in Cirenaica (1883), nel Jemen (1889), in Eritrea (1891-1894).

In questo lungo periodo di attività esploratrice lo Schweinfurth, per vario che fosse il campo di sua attività, non mancò mai di perseguire anzitutto quegli intenti più strettamente geografici che, insieme a quelli floristici, avevano caratterizzato pure il periodo precedente e che trovavano una delle loro principali espressioni nei rilievi itinerari propriamente detti o in osservazioni strettamente coordinate con essi.

L'opera sua era pertanto coordinata a quell'indirizzo della scienza che aveva avuto il più eminente suo rappresentante nel Petermann, il quale considerava che la geografia era anzitutto ed essenzialmente cartografia: concetto questo, che si era pure avuto nell'antichità e nell'inizio dei tempi moderni, sempre in periodi di grandi scoperte ed esplorazioni, quando il compito più urgente ed al quale sembrava convenisse volgere i massimi sforzi pareva proprio quello di raccogliere e registrare graficamente ogni nuovo passo che fosse fatto nel campo appunto della scoperta e della esplorazione. La morte del Petermann, avvenuta nel 1878, fu vivamente sentita dallo Schweinfurth, come risulta fra altro da una lettera da lui diretta al Presidente della Società Geografica Italiana e che questa conserva inedita. Il punto di vista del Petermann doveva però, se non passare in seconda linea, divenire meno importante, man mano che si allargava il campo di attività della Geografia e si vedeva in questa, meglio che la sua funzione più elementare di rappresentare la superficie terrestre, quella di coordinare regionalmente i dati raccolti dalle varie scienze.

Lo Schweinfurth rimase certamente fino a età molto avanzata l'esploratore che tutto osserva, tutto raccoglie, nulla trascura, nè una misura itineraria, nè una determinazione meteorica, nè la raccolta di un umile insetto, nè di fare un rilievo antropologico, nè di annotare il significato di una voce indigena; ma sempre più i problemi particolari lo spingevano verso questa o quella direzione scientifica, allontanandolo in fondo dalla Geografia. Tale è ad esempio, il caso delle sue ricerche geologiche, che portarono contributi veramente preziosi particolarmente alla conoscenza della serie dei terreni dei dintorni del Cairo e a quella, di ordine più generale, della cronologia geologica e preistorica del Quaternario.

L'Egitto, che per secoli aveva presentato agli uomini l'enigma dei suoi geroglifici, presentava poi ancora quello della sua origine, cioè della prove-

nienza prima dei suoi abitanti e di tutti quei germi di civiltà che dovevano poi svilupparsi in modo così portentoso. Lo presenta, quest'ultimo, in gran parte tuttora, ma quando lo Schweinfurth scelse a propria residenza l'Egitto, questo campo era altrettanto inesplorato quanto lo era il cuore dell'Africa allorchè egli vi aveva diretto il suo memorabile viaggio. Nè senza una grave ragione alcuni dei problemi sui quali aveva cercato di portare qualche luce a proposito dell'Africa tenebrosa, si collegavano strettamente con quelli delle condizioni originarie e della preistoria dell'Egitto: erano problemi che investivano tutta la sfera delle più antiche civiltà e che uscivano dal bacino del Nilo per interessare quasi tutta l'Africa di NE e l'Asia anteriore. Lo Schweinfurth fu, se non il primo, certo fra i primi a considerare il problema dello stato naturale dell'Egitto, della provenienza degli Egiziani e dell'origine dei vari elementi della loro civiltà, a considerarli da un punto di vista più profondo e più ampio di quello nel quale erano soliti aggirarsi storici ed egittologi, a considerarlo, cioè, da vero naturalista che sa tener conto di tutti gli elementi paleontologici, etnografici e archeologici che possono condurre ad una sua soluzione. Non è ancora venuto il momento per poter affermare se egli vedesse giusto su alcuni di questi argomenti, ma molto è stato il materiale da lui raccolto.

Particolare importanza egli soleva giustamente attribuire alla origine ed alla diffusione degli animali domestici e delle piante coltivate, ancora più che sotto l'aspetto zoologico e botanico, come elementi per la storia della civiltà.

Nel suo viaggio nel Jemen, al quale pure si era accinto principalmente allo scopo di stabilire l'identità di un certo numero di piante descritte dal Forskall nella sua magistrale *Flora egiziaco-arabica*, e cioè specialmente per erborizzare, la sua particolare attenzione fu dedicata a raccogliere elementi per determinare la parte che l'Arabia meridionale aveva avuto nell'utilizzare per la prima volta a beneficio dell'uomo piante coltivate e soprattutto nel trasmetterle al resto dell'umanità. Nell'ultimo suo viaggio nella Colonia Eritrea egli non trascura certo di arricchire le sue collezioni di piante, ma la sua particolare attenzione è posta ai limoni ed agli aranci che crescono spontanei nella regione ed al cotone selvatico ed ai problemi relativi all'origine delle corrispondenti piante coltivate.

Lo interessa poi in modo particolarissimo il grande e geniale esperimento di colonizzazione che l'Italia, allora, nel 1894, andava iniziando in Eritrea, e cerca, attraverso il successo che riconosceva nelle varie nostre iniziative politiche, amministrative, commerciali, agricole, di indagare l'avvenire del paese, avvenire che egli vedeva nella italianizzazione degli elementi indigeni, non già nella sostituzione ad essi di elemento bianco. Spingendo anzi lo sguardo in un futuro più remoto, egli scorgeva in questa regione le condizioni favorevoli per la formazione di una di quelle razze miste, nelle quali egli considerava un necessario sviluppo di ogni colo-

nizzazione che non abbia di mira o non possa conseguire l'estermidio delle razze indigene. Lo Schweinfurth, mentre da un lato nella classe dei sanguinisti aveva incontrato solo esempi di individui egregi, sia sotto l'aspetto fisico, sia sotto quello morale, pensava che un paese europeo solo in quel modo avrebbe potuto prepararsi dei nuclei affezionati alla madre patria e in grado di recare ad essa continuo sostegno. La politica coloniale doveva necessariamente tendere quindi ad un sempre maggiore avvicinamento e fusione della razza indigena con quella dominante. Alla grande simpatia con la quale lo Schweinfurth considerò, anche più tardi, gli sforzi, non sempre fortunati, dell'Italia per crearsi un campo di attività coloniale proporzionato alla sua potenza politica e civile, non è estranea la circostanza che egli vedeva nel nostro il popolo più adatto a comprendere e ad attuare il suo ideale di elevamento degli Africani e di intima collaborazione di essi con le nazioni d'Europa.

Il lontano avvenire dell'umanità ed il suo passato più remoto, problemi di possibilità di culture e di origine delle piante coltivate, dovevano occupare la mente dello Schweinfurth fino agli ultimi anni della sua vegeta vecchiaia. Nel 1922, egli, già ottantacinquenne, esaminava in suo scritto ciò che l'Africa ha ricevuto dall'America in fatto di piante coltivate.

Nè i contatti dello Schweinfurth con Italiani e il suo interessamento a cose italiane si limitarono a quelli derivanti dal fatto che i paesi ai quali egli aveva rivolto la propria attenzione durante l'intero corso della sua vita, fossero entrati nell'orbita dell'attività esploratrice e civilizzatrice dell'Italia; essi derivavano anche dalla circostanza che alcuni dei problemi a cui dedicava la propria attenzione potevano offrire elementi di studio nello stesso nostro paese. Nelle varie sue ricerche sull'età della pietra, considerò con indagini dirette e indirette il paleolitico della Sicilia, specialmente in relazione con quello della Tunisia e dell'Algeria, regioni pure a più riprese da lui visitate (1901, 1906 e 1908).

Dei vari campi ai quali lo Schweinfurth dedicò con preferenza la propria attività scientifica, questo della preistoria fu certo uno di quelli in cui egli raccolse più utili risultati, contribuendo alla discussione di soggetti assai dibattuti, come quello delle così dette *voliti*. Anche in questo campo della paletnologia e in quello dell'etnografia di popoli poco civili, come pure in quello botanico, che egli coltivò più ampiamente e con maggior continuità di ogni altro, si può affermare che l'opera sua sia stata quasi più grande come raccoglitore di materiale che non come studioso di esso. Le sue collezioni furono di una straordinaria ricchezza e si conserveranno, in erbari e musei, monumento imperituro di gloria e materiale prezioso per le future ricerche. Per quanto sia stata pur notevole la sua attività nella illustrazione del materiale raccolto, essa non poteva essere esauriente. È quasi superfluo aggiungere come egli non si allontanasse in fondo mai dall'indirizzo che la sua scienza prediletta ebbe fino a cinquanta anni fa, indirizzo essenzial-

mente floristico e tutt'al più fitogeografico. L'attività sua di ricercatore anche in altri rami della Storia naturale, ebbe pure un indirizzo simile, per cui anche nella scienza lo Schweinfurth rappresentava un po' una sopravvivenza di un periodo trascorso; un periodo però classico per le discipline naturali e verso il quale non pochi pensano non solo si debba oggi guardare con simpatia, ma con vera nostalgia, di cui forse è da auspicare anche un parziale ritorno.

Giacchè a me toccò l'onorevole compito di parlare a voi di questo sommo, che tanto operò per la scienza e per l'umanità, sia permesso di ripetere qui, in fine, quasi a conclusione del mio dire, un concetto che risulta in parte già adombrato, quello cioè che Schweinfurth fu grande soprattutto come esploratore e il nome suo conserverà in ogni tempo un posto eminente nella storia della conoscenza della Terra. Sembrò a qualcuno che egli negli ultimi decenni della sua vita si allontanasse dal campo della esplorazione per ritornare alla scienza nella quale aveva mossi i primi passi, ovvero per approfondirsi nei problemi della storia o della preistoria. L'allontanamento era solo apparente e dipendente dal fatto che egli vedeva che in queste regioni della scienza vi erano plaghe ancora più tenebrose di quelle dell'Africa centrale che egli aveva contribuito ad illuminare. Il suo piano, preordinato con meravigliosa intuizione, al quale dovevano convergere tutte le sue forze in un momento della sua vita, poteva parere in gran parte esaurito da lui e da altri, mentre l'uomo che sembrava nato per la scoperta e per l'indagine vedeva innanzi a sè sempre nuovi problemi insoluti e cercava di affaticarsi attorno ad essi.

INDICE

Commemorazione del Socio straniero J. Massart	Pag.	III
» » Socio Nazionale C. Viola	»	XIV
» » prof. Antonio Maria Antoniazzi	»	XIX
» » Socio straniero Felice Klein	»	XXVI
» » Socio straniero Giorgio Schweinfurth	»	XXXVI

